BOULIERS ET ECRITURE DES NOMBRES AU C.M.

Nicolas BALACHEFF–IMAG Université de Grenoble I
Robert NEYRET – Ecole normale de Grenoble

I – GENERALITES SUR LES BOULIERS.

1-1 Présentation des bouliers
1-2 Rappels sur la numération
1-3 Quelques bouliers particuliers

II – UTILISATION DES BOULIERS.

2-1 Usage des bouliers dans la vie quotidienne
2-2 Intérêt de l'utilisation des bouliers en classe

III – ACTIVITES DANS UNE CLASSE DE CM 2

3-1 Construction des bouliers
3-2 Présentation des bouliers
3-3 Essai d'explicitation de règles de comptage

IV – BOULIER (5, 2) ET NOTION D'ALGORITHME.

4-1 Introduction
4-2 Ajouter 1
4-3 Compter de n en n

Ce dernier paragraphe, un peu plus théorique, permettra au lecteur curieux d'approcher la notion d'algorithme en manipulant un boulier et de rencontrer quelques notions informatiques.

La deuxième partie – Bouliers et opérations – sera publiée dans un prochain numéro de IN.

I – GENERALITES SUR LES BOULIERS.

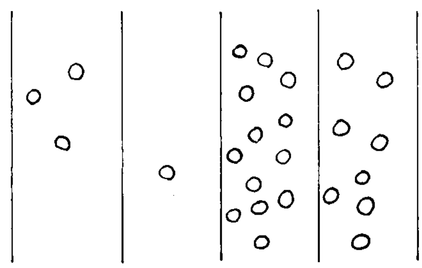
1-1 Présentation des bouliers.

Pour réaliser leurs calculs les hommes ont assez rapidement ressenti le besoin de s'adjoindre des auxiliaires : d'abord les doigts de la main, mais cela est assez vite limité, puis des cailloux dont chacun est censé représenter un objet ou un groupe d'objets sur lesquels on veut opérer. (Le mot calcul vient du latin "calculus" qui signifie caillou).

En fait, pour les grands nombres, on rencontre des problèmes importants de manipulation et d'organisation des calculs.

Alors que dans le domaine de la numération,les techniques évolueront pour aboutir à la numération de position, dans celui des auxiliaires de calcul, on verra apparaître les abaques, puis les bouliers . . . puis la machine de Pascal . . . les calculettes . . .

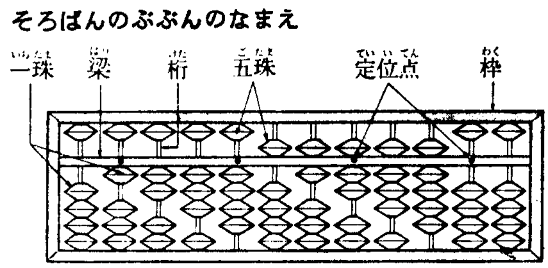
Les abaques consistent en des colonnes tracées côte à côte sur le sol ou sur une plaque, correspondant à une numération de position. Ainsi en numération décimale, pour l'abaque représentée par le dessin ci-contre, il y a 8 caillous (ou jetons) dans la colonne des unités, 13 dans celle des dizaines, 1 dans celle des centaines, et enfin 3 dans celle des mille.



On remarque que pour les abaques,on n'a pas de contraintes stricte analogues à celles que l'on a en numération de position : une colonne peut contenir un nombre quelconque de cailloux.

Le boulier substitue aux colonnes et aux cailloux des tiges (broches) de bois ou de métal sur lesquelles sont enfilées des boules ; le tout est assemblé par un cadre.

Ce dispositif a pour contrainte que chaque broche ne peut contenir qu'un nombre déterminé de boules. En base 10 elles peuvent assez naturellement contenir dix boules, mais il y a d'autres possibilités.



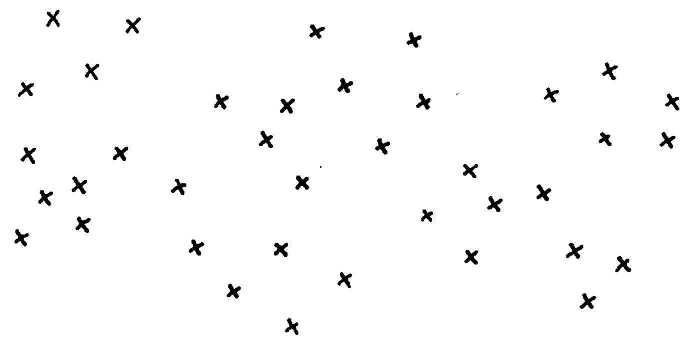
1-2 Rappels sur la numération.

– Numération à base unique.

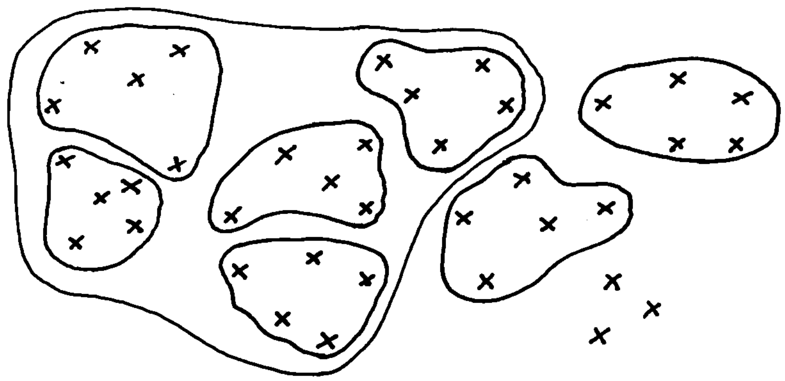
Le principe des numérations à base unique est de définir une règle de constitution de paquets :

Par exemple, en base 5, on regroupe les objets par 5 autant que cela est possible : on fait les paquets, et éventuellement, il reste des objets. Ensuite, si cela est possible, on constitue des paquets de 5 paquets, puis des paquets de 5 paquets de paquets, etc.

Au terme de ce processus il reste au plus 4 individus de chaque espèce. Ainsi pour la collection ci-dessous :



On obtient en base 5 les regroupements suivants : 1 paquet de paquets, 2 paquets et 3 individus:



Pour coder le résultat obtenu, en numération de position, on a besoin d'attribuer un symbole pour désigner le nombre de chaque collection possible d'individus de même espèce (en base 5 il faudra cinq symboles : 0, 1, 2, 3, 4) ; puis on range ces symboles en une file en ordre croissant des espèces de droite à gauche : les objets, les paquets, les paquets de paquets, les paquets de paquets de paquets, etc.

Dans le cas de l'exemple ci-dessus on obtient le code :

1 2 3

– Numération en base alternée.

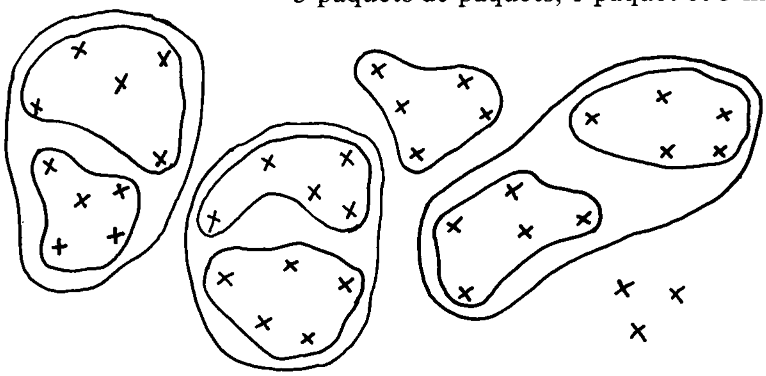
Pour les numérations en base alternée on choisit deux nombres p et q, et on fixe la règle suivante :

On constitue des paquets de p objets autant que possible, puis des paquets de q paquets, puis des paquets de p paquets de paquets . . . ainsi de suite en fixant alternativement à p et à q le nombre des individus à grouper.

On dit qu'on utilise une base alternée (p, q).

Reprenons pour illustrer ceci la collection représentée plus haut, dans le cas de la base alternée (5, 2), on obtient les regroupements :

3 paquets de paquets, 1 paquet et 3 individus :



Pour écrire les nombres en numération de position il faudra autant de symboles que le plus grand des deux nombres p et q, puis constituer une file de ces symboles de façon analogue à celle constituée pour une numération à base unique. On aura de droite à gauche : le nombre d'objets, le nombre des paquets de p objets, le nombre des paquets de q paquets, le nombre des paquets de p paquets de paquets, etc.

La collection sur laquelle nous avons fait les regroupements de la base (5, 2) est codée :

3 1 3

Le système de numération romain-modifié (cf. par. : 3-2) est un système à base alternée (5, 2) :

Associons à chaque objet d'une collection le symbole I .
Dès que l'on a cinq I on les remplace par V, dès que l'on a deux V on les remplace par X, dès que l'on a cinq X on les remplace par L, etc.

le nombre est :	I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I I
XXXVII	V V V V V V V
	X X X

C'est aussi le cas du système de monnaie français, pour les sommes supérieures au franc et avant l'apparition des pièces de 2 francs et des billets de 20 francs.

Un maniaque de la base alternée peut, chaque fois qu'il a cinq pièces de 1 F. les remplacer par une pièce de 5 F. Lorsqu'il a deux pièces de 5 F. il les remplace par une pièce (ou un billet) de 10 F. Lorsqu'il a cinq pièces (ou billets) de 10 F. il les remplace par un billet de 50 F. etc.

1-3 Quelques bouliers particuliers.

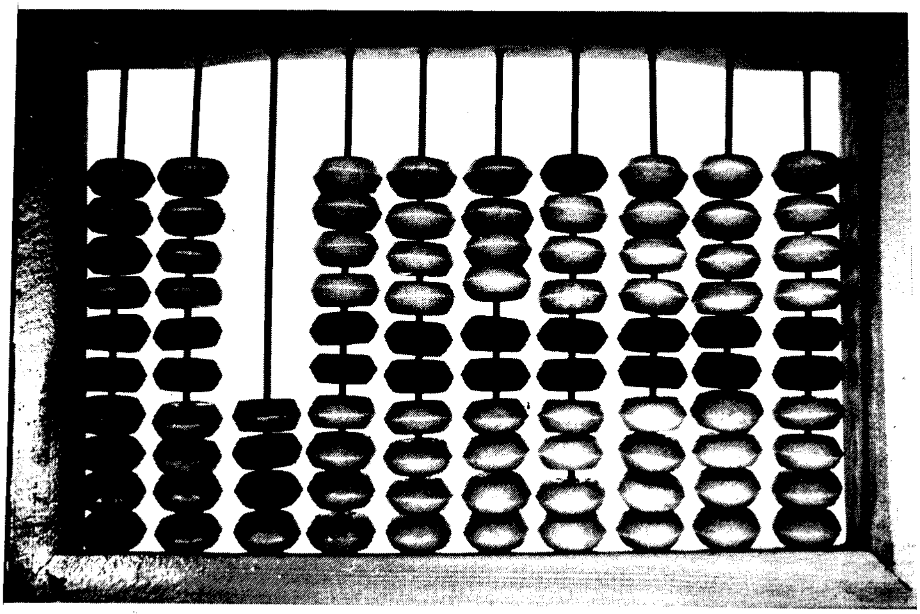
Les bouliers que nous allons présenter sont ceux dont l'usage est actuellement le plus répandu. Ils relèvent des deux systèmes de numération que nous venons de rappeler, à base unique et à base alternée.

– Le boulier russe.

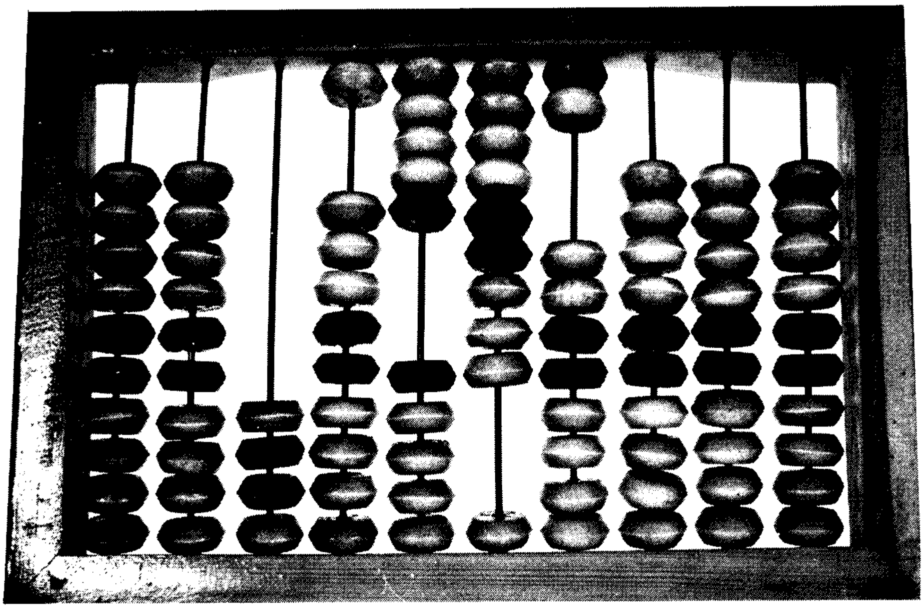
Ce boulier correspond à la numération en base 10 avec des aménagements dûs à son utilisation commerciale. (Ce boulier est encore utilisé en Union Soviétique).

La signification des broches est liée au système monétaire : le rouble, ses multiples décimaux et ses fractions, le quart de rouble, le centième de rouble (le kopek).

Les boules noires sont là pour faciliter les manipulations en permettant de repérer plus facilement des groupes de 5 boules, ou pour aider à la lecture des nombres (boule représentant les mille).

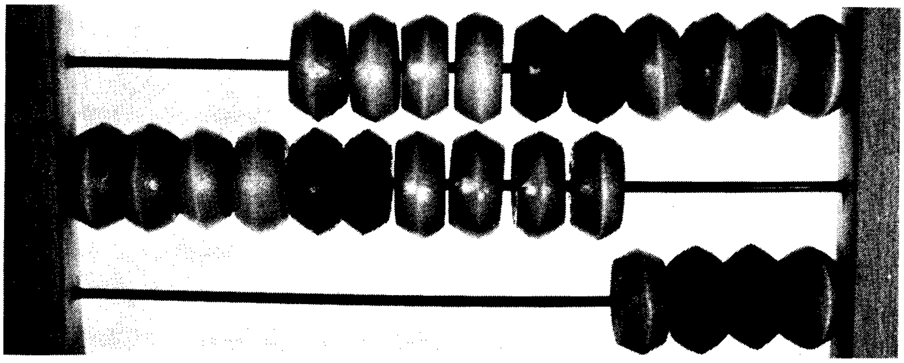


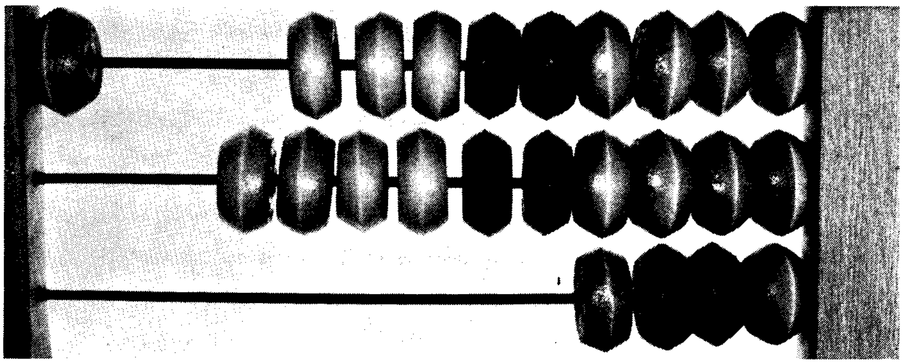
Pour utiliser ce boulier, on repousse d'abord toutes les boules contre un de ses bords (comme sur la photo précédente) ; puis pour représenter un nombre, on amène autant de boules qu'il le faut contre l'autre bord . Sur le boulier ci-dessous est représenté le nombre 2951.



Remarquons que sur chaque broche il n'y a pas 9 boules, comme cela suffirait, mais 10 ce qui, contrairement au système de numération, permet deux représentations de certains nombres.

Voici par exemple deux écritures de 10 :

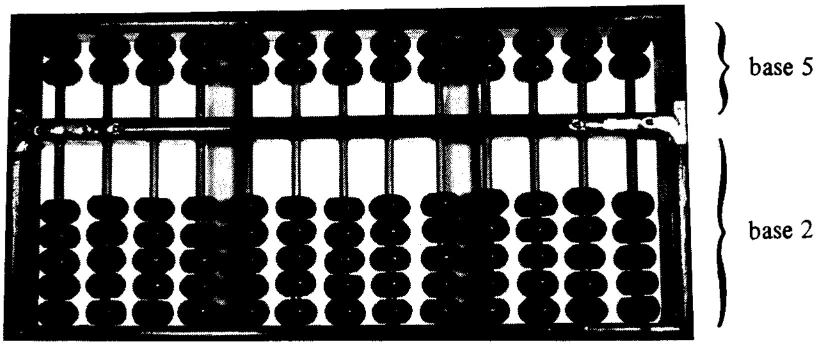




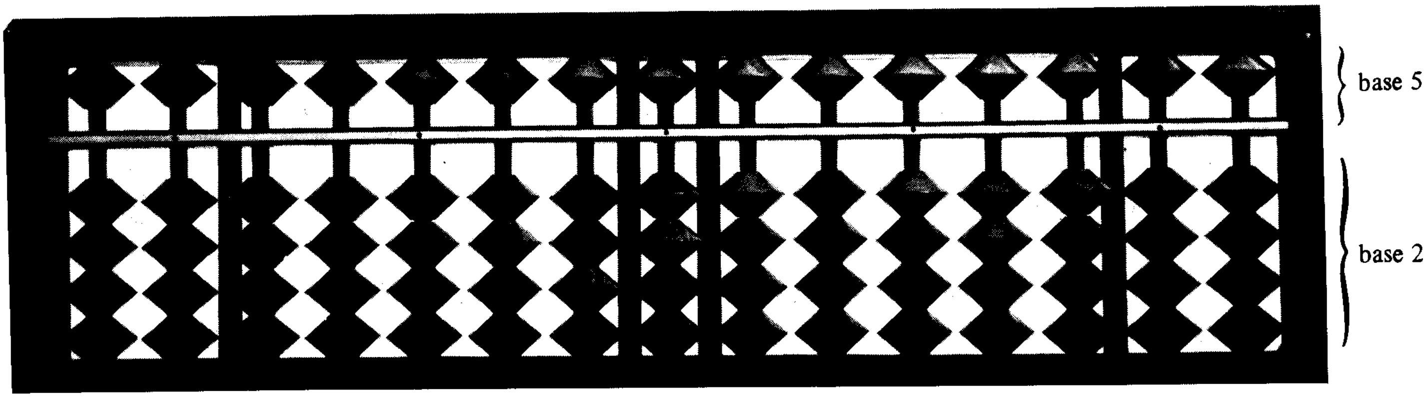
– **Les bouliers chinois et japonais.**

Ces bouliers correspondent à la numération en base alternée (5, 2) et sont en fait utilisés dans le cadre d'un système décimal.

Les broches sont séparées en 2 parties par une traverse, chacune des deux parties du boulier est associée à l'une des deux bases. On pose les bouliers de façon à ce que la partie associée à la base 5 soit la partie inférieure et celle associée à la base 2 soit la partie supérieure.



Boulier chinois (ou Suan pan)



Boulier japonais (ou Soroban)

La différence entre ces deux bouliers réside dans le nombre de boules que comporte chacune des parties. Le boulier chinois a 2 boules sur la partie supérieure des broches et 5 sur la partie inférieure, alors que pour le boulier japonais les broches portent 1 boule sur leur partie supérieure et 4 pour la partie inférieure.

Avec le boulier chinois certains nombres peuvent avoir plusieurs écritures (nous en donnons plus loin un exemple). Avec le boulier japonais chaque nombre a une écriture unique, ce qui correspond à une utilisation stricte de la base alternée (5, 2).

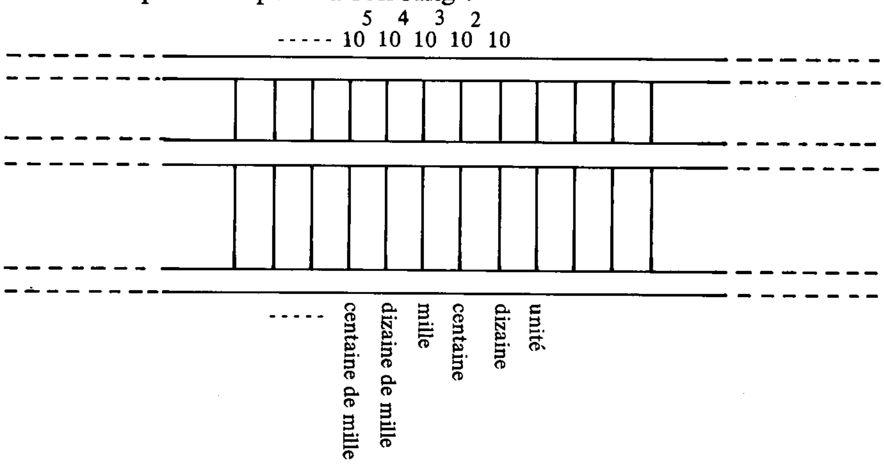
– **Représentation des nombres.**

Avant d'exécuter un calcul avec le boulier chinois ou japonais, ou simplement avant d'y inscrire un nombre on le met dans l'état illustré par les schémas ci-dessus : toutes les boules de la partie supérieure sont repoussées contre la barre supérieure, toutes les boules de la partie inférieure sont repoussées contre la barre inférieure.

En fait dans cet état, c'est le nombre 0 qui est représenté.

Pour représenter des nombres il faut d'abord faire le choix d'une broche marquant la position des utnités. Sur le boulier japonais ceci est facilité par des marques sur la traverse, pour le boulier chinois (du moins ceux rencontrés dans le commerce) il faudra faire preuve d'un peu de mémoire.

Une fois ce choix fait, chaque broche sur la gauche de la position unité a pour valeur celle de l'ordre décimal qui correspond à son rang :

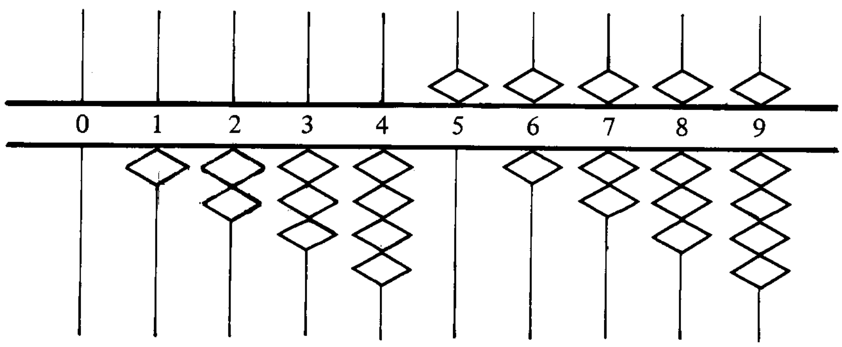


Le chiffre de chaque ordre décimal du nombre que l'on veut écrire est représenté sur la broche correspondant à cet ordre en amenant les boules contre la traverse avec la règle suivante :

– les boules de la partie inférieure ont pour valeur 1.

– les boules de la partie supérieure ont pour valeur 5.

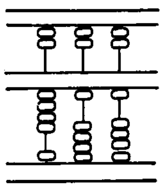
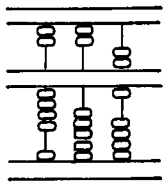
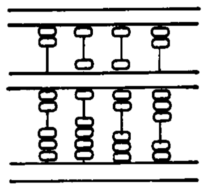
Sur le schéma ci-dessous nous donnons une représentation des 10 chiffres du système décimal :



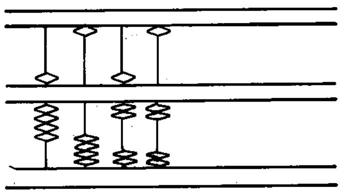
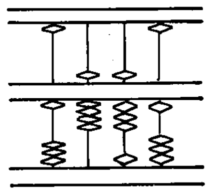
Remarquons que nous n'avons pas représenté les boules qui restent contre les barres inférieure et supérieure. Leur nombre diffère suivant qu'il s'agit du boulier chinois ou japonais.

Voici quelques exemples d'écriture de nombres :

sur le boulier chinois :

écritures de 411 :  et  ; de 2673 : 

sur le boulier japonais :

écriture de 9072 :  de 1981 : 

– **Autres bouliers.**

Nous allons, pour finir cette présentation générale des bouliers, signaler rapidement d'autres appareils ou des variantes des précédents. Nous ferons ensuite quelques suggestions.

*** Les ancêtres**

L'abaque la plus ancienne semble être une table de marbre de 149 cm sur 75 cm retrouvée en Grèce sur l'Ile de Salamine. Il s'agit de l' *abacus athenum* qui daterait du IVe siècle avant J.C. Sur une face elle présente des lignes déterminant des colonnes dans lesquelles venaient se ranger des jetons ou des cailloux.

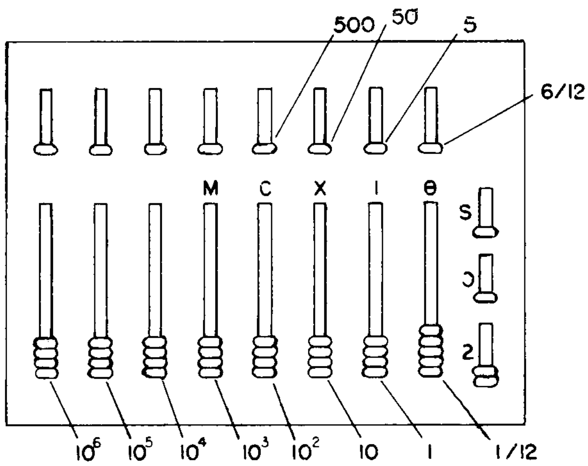
Au moyen-âge les tables à compter, très semblables à la table de Salamine, sont très répandues ; on en voit une représentation sur la gravure *"Boetius et Pytagorus"* .

(gravure représentée à la page suivante)

En voici aussi le souvenir dans des vers populaires :

"Les courtisans sont des jetons
Leur valeur dépend de leur place
Dans la faveur des millions
Et des zéros dans la disgrâce !"

L'ancêtre le plus proche des bouliers orientaux que nous avons présentés plus haut est probablement l' *abacus romanum.* Il s'agit d'une petite abaque de bronze, transportable, munie de jetons maintenus dans des glissières où ils peuvent coulisser.



(d'après P. MOON)

Des abaques très semblables à l'abaque romaine sont décrites dans des traités chinois des IIIe et IVe siècles.

Le boulier chinois que nous connaissons actuellement est semblable à ceux utilisés au XVe siècle en Chine et dont on trouve la description dans de nombreux ouvrages de cette époque. C'est à ce moment qu'il a gagné sa popularité dans ce pays (époque Ming).

*** Des variantes.**

On peut concevoir aisément des variantes d'un type de boulier donné, ne serait-ce qu'en modifiant le nombre de ses broches. De cette façon on modifie la taille des nombres qu'il est possible de représenter.

On trouve ainsi au catalogue du musée des Arts et Métiers des bouliers chinois de 13 à 19 broches.

D'autres variantes sont obtenues en modifiant le nombre des boules. Jusqu'à la fin du XIXe siècle, étaient en usage au Japon des bouliers portant 1 boule dans la partie supérieure et 5 boules dans la partie inférieure.

Au catalogue du musée des Arts et Métiers figure un boulier d'origine chinoise, dit Jekim, composé de six broches portant chacune une boule valant respectivement 1, 2, 4, 8, 16 et 32 unités. Il figure aussi dans ce catalogue des bouliers russes différant les uns des autres, à la fois par le nombre de leurs broches et celui de leurs boules.

– Des perspectives.

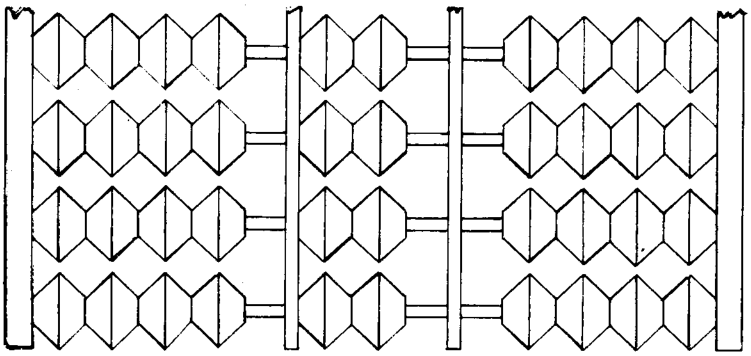
Nous avons jusqu'ici décrit des bouliers existants à différents moments de l'histoire et dans différentes parties du monde tels qu'ils étaient en usage.

On peut imaginer une utilisation nouvelle des bouliers orientaux sans les modifier matériellement, il suffit pour cela de donner une signification différente aux boules qu'ils portent.

Ainsi, en faisant abstraction de la traverse, si on attribue la valeur 1 à chaque boule, le boulier chinois permet de faire les calculs en base 8 (il a 7 boules sur chaque broche) et le boulier japonais en base 6 (il a 5 boules sur chaque broche).

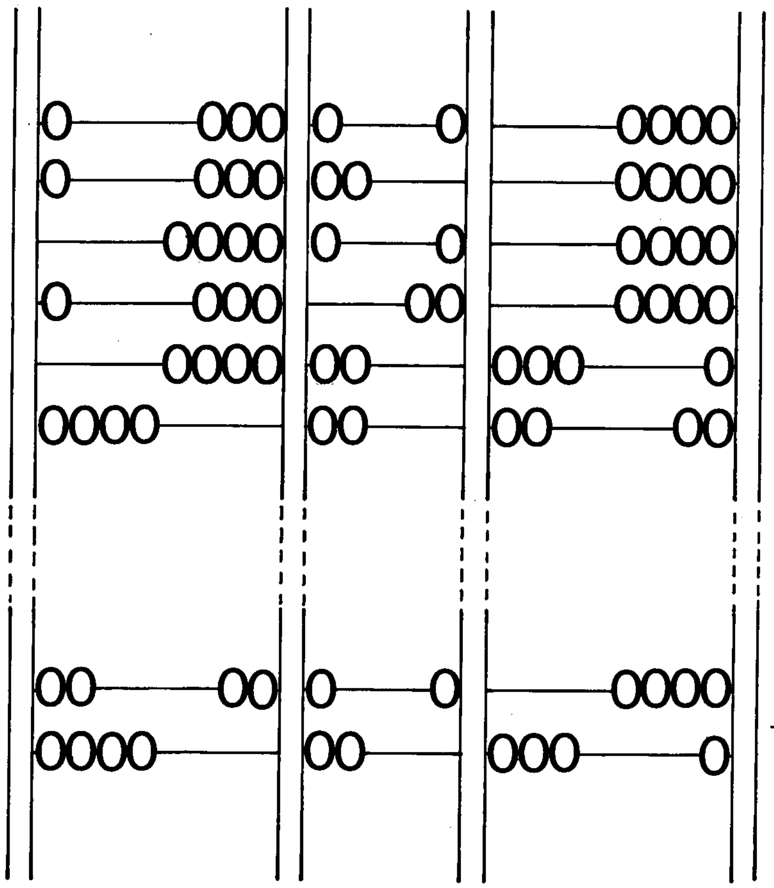
En conservant l'usage de la traverse on peut envisager diverses bases alternées : le boulier chinois peut être utilisé pour compter en base (6, 2) qui correspond en base unique à 12, ou bien en base alternée (5, 3) qui correspond en base unique à 15, ou encore en base (6, 3) qui correspond à la base unique 18 ! On peut, de la même façon, multiplier les utilisations du boulier japonais.

On peut aussi prolonger le principe des bouliers existants pour inventer de nouveaux appareils. Parry MOON, dans un ouvrage sur les abaques (1), propose un boulier à deux traverses permettant ainsi d'introduire la représentation de nombres négatifs : Voici par exemple le boulier (– 4, 2, 4) qu'il propose :



poids 1 poids 5 poids-1

Sur ce schéma est représenté le nombre 0, en voici quelques autres :



8 (5 + 3)
3
9
13 (10 + 3)
1 (4 – 3)
– 2

- 23 (– 30 + 7)

Nous ne présenterons pas ici l'usage de cet appareil, nous laissons le lecteur imaginer les ouvertures qu'il rend possible.

(1) *Parry MOON, the abacus, Gordon et Breach Ed., New York, 1971.*

II – UTILISATION DES BOULIERS.

2-1 Usage des bouliers dans la vie quotidienne.

Depuis quelques années, de nombreux bouliers ont fait leur apparition en France : ainsi dans la région grenobloise un commerçant avait importé de Chine un nombre important de bouliers qui se vendirent très rapidement . Cependant ces derniers restent en France à l'état de gadget.

Il n'en est pas de même dans des pays tels que l'URSS, la Chine ou le Japon où l'usage en est très répandu aussi bien au niveau scolaire qu'au niveau de la vie quotidienne. Nous regarderons plus particulièrement le cas du Japon pour lequel nous possédons quelques informations. *

Sur le plan scolaire, les cours de bouliers sont obligatoires pour les petits japonais dans les classes de 10ème et 9ème (ce qui correspond chez nous aux élèves de CE 2 – CM 1). Par la suite il existe de nombreuses écoles spécialisées : on cite le nombre de 1200 écoles privées à Tokyo et 1000 à Osaka. Ainsi on signalait en 1972 plus de 2 000 000 de candidats aux examens de la Chambre de commerce et de l'industrie pour les certificats de soroban (nom japonais du boulier).

Cette institutionnalisation des bouliers dans les écoles correspond à un usage fréquent de ceux-ci dans la vie quotidienne où bouliers et ordinateurs continuent à coexister :

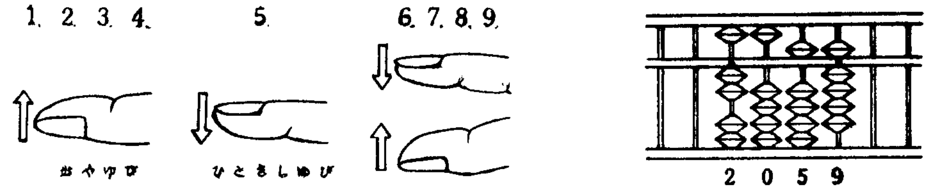
Ainsi dans les banques, le boulier, peu cher et très maniable est utilisé pour les additions et soustractions simples, l'ordinateur pour les multiplications et divisions complexes.

Il semble d'ailleurs que pour une personne bien entraînée, il est plus rapide d'effectuer une addition en utilisant un boulier qu'en manipulant le clavier d'un ordinateur comme l'ont montré de nombreux concours organisés au Japon.

(*) Le Japon : n° 2 ministère des affaires étrangères : l'ancien abaque plus rapide que les ordinateurs.

数のおきかた

まんなかの定位点を，1のくらいときめて，書くときとおなじように，左から右へ数をおく。1. 2. 3. 4. をおくときは，おやゆびで。5をおくときは，ひとさしゆびで，6. 7. 8. 9. をおくときは，おやゆびとひとさしゆびで，つまむようにおく。2,059をおくときは下の図のようになる。



Les bouliers continueront peut être à être largement utilisés au Japon : la production était de 2 300 000 bouliers en 1971.

Nous avons essayé de montré dans la suite de cet article l'intérêt que présentent les bouliers sur le plan pédagogique en situant l'usage que l'on peut en faire par rapport aux objectifs et instructions de l'enseignement au niveau cycle moyen.

2-2 Intérêts de l'utilisation des bouliers en classe (cycle moyen).

Les programmes du cycle moyen parus en 1980 précisent dans les instructions pédagogiques (paragraphe "écrire, nommer, comparer les nombres naturels") à propos des désignations écrites des nombres :

" L'objectif du cycle moyen est d'assurer chez les enfants une bonne maîtrise du fonctionnement de notre système de numération (positionnel, à base dix). Pour cela, le maître proposera : [..........]

- des activités conduisant à confronter notre système de numération à d'autres systèmes (numération romaine, numérations complexes ..... etc.). "

Pour cette étude plusieurs voies sont possibles :

– étude de numération de position en base autre que dix.
– étude de numérations anciennes (égyptienne, romaine, sino-japonaise, ...)
– emploi de calculatrices
– utilisation des bouliers et étude de la numération associées.

La première voie qui est souvent utilisée depuis 1970 comporte certains inconvénients (cf. article sur la numération IN numéro 24) en particulier le risque du "déjà vu" et l'interférence avec le système très proche de notre numération de position en base dix.

Notre préférence va aux trois dernières voies.

– l'étude de numérations anciennes qui commence à être proposée dans certains livres (collection math et calcul CM 1 – Ermel - cycle moyen)

– l'emploi de calculatrices commence à apparaître dans certaines classes mais cela nécessite d'avoir le matériel adéquat,

– l'utilisation des bouliers que nous allons examiner dans le cadre de cet article.

Voici donc les différents points qui nous semblent intéressants.

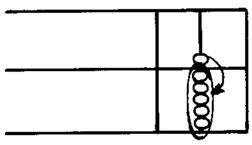
- Utilisation d'un matériel construit par les enfants.

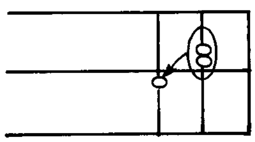
Le boulier est un matériel qui se construit facilement dans le cadre des activités manuelles *. Nous avons pu observer que les élèves ont du plaisir à manipuler un matériel fabriqué par eux et que cela représente une motivation supplémentaire.

- Etude des similitudes et des différences avec notre système de numération.

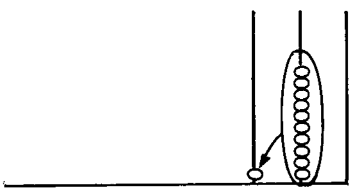
– Règles de fonctionnement :

La numération associée au boulier chinois est une numération de position comme la nôtre, mais fonctionnant en base alternée (5, 2) (voir paragraphe 12). Le boulier chinois permet de concrétiser les échanges schématisés ci-dessous :





Cela permet un retour sur **notre** numération décimale où dix unités d'un ordre sont échangées contre une unité de l'ordre supérieur ; ce que l'on peut d'ailleurs matérialiser sur le boulier décimal par l'échange effectif :



(*) Voir paragraphe suivant 23.

– Ecritures associées :

Les décompositions associées au boulier sont du type

267024 = 200 000 + 50 000 + 10 000 + 5 000 + 2 000 + 20 + 4
= (2 X 100 000) + (1 X 50 000) + (1 X 10 000) + (1 X 5 000) + (2 X 1 000)

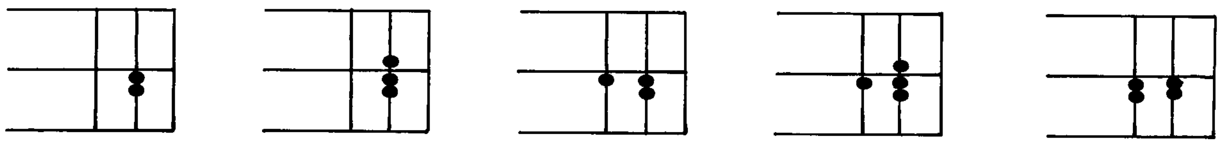
Les activités de codage sur ce boulier d'un nombre écrit dans notre système, ou le travail inverse de décodage recourrent aux décompositions précédentes, mais le plus souvent passent par l'intermédiaire de décompositions du type :

267 024 = 200 000 + 60 000 + 7 000 + 20 + 4

Or les instructions pédagogiques recommandent de faire "des exercices fréquents de changements et d'utilisation de différentes écritures liées au codage décimal des nombres".

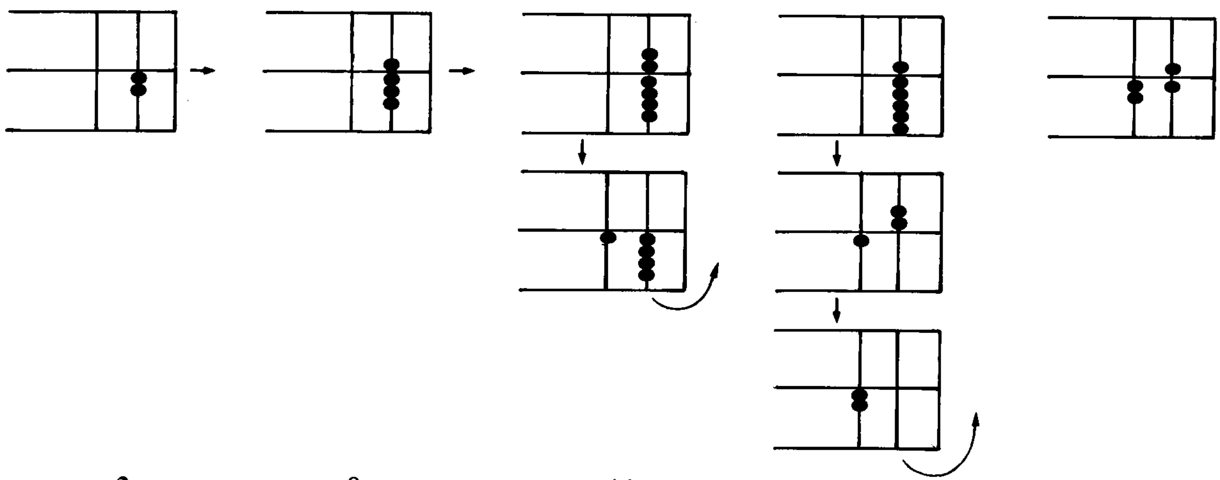
- Visualisation associée à une action.

La manipulation du boulier permet de "voir" ce qui se passe : Ainsi lorsqu'on compte de 5 en 5, les enfants voient les boules que l'on enlève ou que l'on rajoute et les étapes successives du comptage.



2	5 +2	10+2	10+5+2	20+2
	7	12	17	22

Il en est de même lorsqu'on leur demande de compter de 6 en 6.*



2 **8** **14** **20** **26** ....

(*) *Voir paragraphe 4, l'organigramme concernant cet algorithme.*

On verra dans le prochain numéro de IN, que lorsqu'on fait des opérations, le boulier permet de voir les états successifs au cours des différentes phases du calcul. Cela permet de suivre son mécanisme et par suite d'en analyser le fonctionnement.

- Utilisation très fréquente du calcul mental.

Le codage et le décodage des nombres sur le boulier nécessitent de les décomposer ou recomposer sous la forme

$$737 = 500 + 200 + 30 + 5 + 2$$

Ceci est fait mentalement par les enfants. De même, on verra dans les chroniques d'activités que le recours au calcul mental est constant, aussi bien pour établir des listes de nombres que pour réaliser des opérations.

- Initiation à l'algorithmique.

Ce matériel se prête bien à l'étude pas à pas d'algorithmes simples (par exemple compter de n en n). Cela peut constituer une initiation à des processus de pensée dont l'utilité est actuellement mise en évidence par le développement de l'informatique.

III – ACTIVITES DANS UNE CLASSE DE C.M.2

Nous*avons mené dans le cadre de l' I.N.R.P., pendant deux ans, une expérimentation dans une classe de C.M.2, où sont utilisés de manière fréquente les bouliers.

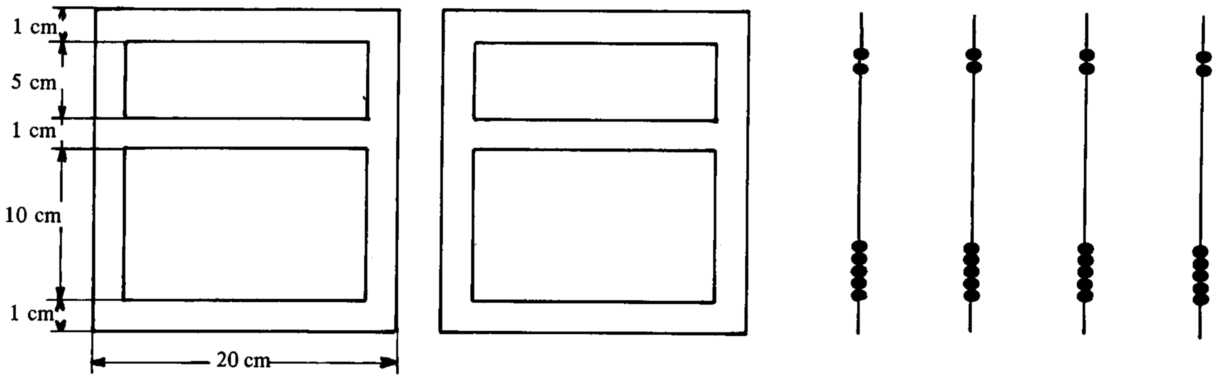
Après avoir fait construire aux enfants des bouliers et leur avoir donné les règles de fonctionnement, nous les avons fait travailler sur des problèmes de comptage de n en n, ce qui va faire l'objet essentiel de la suite de cet article. Ensuite nous leur avons fait réaliser des additions et des soustractions avec leur boulier : nous étudierons ces questions dans un prochain article de IN.

3-1 A propos de la construction des bouliers.

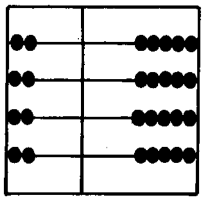
- Les enfants construisent eux-mêmes des bouliers de la manière suivante : Dans du carton fort, ils découpent deux cadres avec les dimensions indiquées ci-dessous et disposent des perles sur quatre fils.

Ils mettent les quatre fils sur un cadre et collent l'autre.

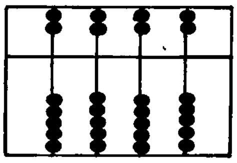
(*) "Nous" renvoie à l'équipe de l'I.N.R.P. dont fait partie R. Neyret.



Il est nécessaire de prévoir un boulier collectif de dimension nettement plus grande. Sur le plan pratique, ce boulier est accroché au tableau avec les tiges horizontales, ce qui évite aux boules de glisser. Il est donc vu par les enfants de la manière suivante :



Cette disposition n'est pas la même que celle utilisée par les enfants.

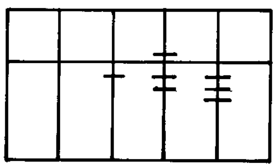


Celle-ci leur permet de parler des boules "du haut" et des boules "du bas".

Le passage d'une disposition à une autre ne pose pas de difficulté.

- Les règles de fonctionnement du boulier sont rapidement données (1 séance) : en effet, comme nous le verrons plus loin, l'objectif est de travailler sur les suites d'écritures des nombres et sur les opérations. (une voie plus lente, consistant à laisser inventer des règles aux enfants et à voir si elles sont compatibles avec les contraintes du matériel, a été adoptée dans une autre classe, mais cette démarche a demandé trois séances).

- Les représentations sont introduites très rapidement avec la convention suivante : on ne dessine que les boules déplacées, ce qui donne par exemple pour 173



que l'on traduit aussi par l'écriture associée suivante.

0	0	1	0
0	1	2	3

● Nous avons utilisé dans cette partie non seulement les bouliers, mais aussi la numération romaine modifiée où les nombres sont codés de la manière suivante :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I	II	III	IIII	V	VI	VII	VIII	VIIII	X
20	30	40	50	60	70	80	90	100	
XX	XXX	XXXX	L	LX	LXX	LXXX	LXXXX	C	
200	300	400	500	600	700	800	900	1000	
CC	CCC	CCCC	D	DC	DCC	DCCC	DCCCC	M	

La numération romaine modifiée comme le boulier chinois utilise la base alternée (5, 2), mais elle est non positionnelle puisque un nom est donné aux différents groupements : I, V, X, L, C. L'écriture IICCCM a la même signification que MCCCII.

L'étude de la numération romaine, jointe à celle des bouliers, permet des comparaisons plus riches avec notre système de numération décimale.

Nous avons adopté, pour la numération romaine, une "écriture associée", illustrée par l'exemple suivant :

M	D	C	L	X	V	I
1	1	3	1	4	0	2

La deuxième ligne de ce tableau représente MDCCCLXXXXII.

Ce tableau permet d'écrire une suite de nombres, par exemple :

M	D	C	L	X	V	I
1	1	3	1	4	0	2
1	1	3	1	4	0	3
1	1	3	1	4	0	4
1	1	3	1	4	1	0

.... etc.

alors que les écritures équivalentes associées au boulier sont :

0	1	1	0
1	3	4	2

0	1	1	0
1	3	4	3

0	1	1	0
1	3	4	4

0	1	1	1
1	3	4	0

etc.

Ces deux écritures sont, évidemment, formées des mêmes chiffres ; cependant, le tableau utilisé pour la numération romaine, facilite l'interprétation de chaque colonne et le rapproche de l'écriture usuelle en base dix. De plus, il permet une meilleure perception des régularités qui sont à la base des activités de comptage de n en n.

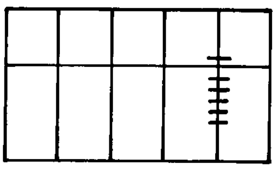
Voici les 3 séances que nous avons consacrées à la présentation des bouliers et de la numération romaine.

– Lundi 3 Novembre 1980 : présentation et manipulation des bouliers.

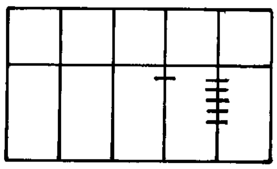
Chaque paire d'enfants dispose d'un boulier, les boules étant éloignées de la barre centrale.

Les enfants sont invités à écrire 1, puis 2, 3, 4 et 5. En général, ils choisissent une tige (à gauche ou à droite) et rapprochent successivement une boule de la barre. A partir de maintenant, on commencera en utilisant la tige la plus à droite.

Pour écrire 6, la plupart marquent :



ou

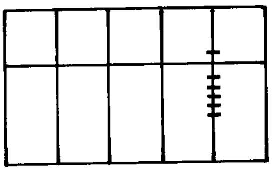


Le maître leur indique que cela fait 10 ou 15.

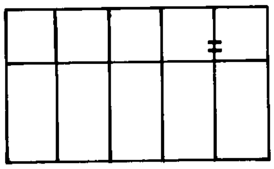
Aussi certains se posent des questions.

– c'est séparé, ça doit servir à quelque chose.
– c'est les dizaines, centaines.
– c'est peut- être en base cinq.

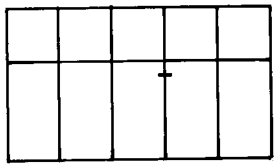
Quelques élèves affirment qu' "une boule du haut ça fait cinq" ce que confirme le maître : cela permet aux enfants d'écrire 7, 8, 9. Pour l'écriture de 10, les enfants proposent l'une des trois dispositions suivantes.



n° 1



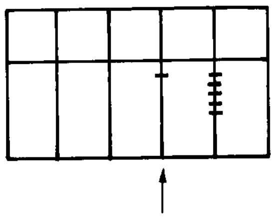
n° 2



n° 3

La disposition n° 3 est justifiée par un enfant qui se réfère à une intervention précédente du maître.

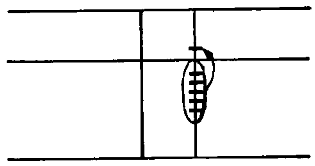
– Tout à l'heure, vous nous avez dit que cette disposition faisait quinze, donc



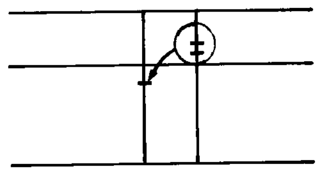
nécessairement cette boule (celle correspondant à la flèche) vaut dix.

Le maître signale que ces trois dispositions indiquent bien dix et fait découvrir aux enfants les équivalences qui permettent de réaliser des échanges :

– cinq boules situées en bas valent une boule située en haut.

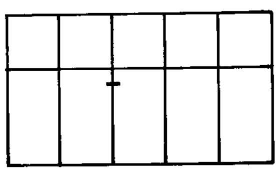


– deux boules d'en haut valent une boule valent une boule d'en bas située sur la tige à côté.

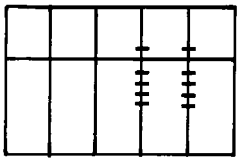


Les enfants sont invités à écrire successivement 12 - 15 - 19 - 20 - 30 - 50 - 90 - 95 98 - 99 - 100 pour bien percevoir que les règles précédentes s'appliquent quelle que soit la position des tiges.

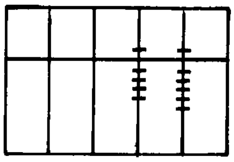
– Pour 100, certains enfants écrivent directement



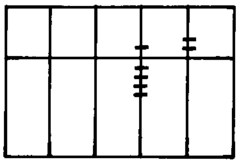
– Pour ceux qui ont des difficultés, on repart de 99 et on ajoute un, puis on réalise les échanges possibles.



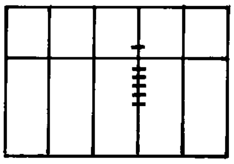
99

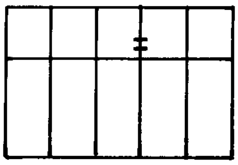


100

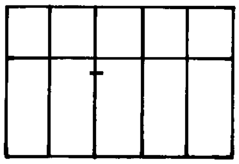


100





puis



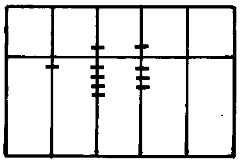
100

On observe à nouveau qu'un même nombre peut être noté de manière différente, mais on convient qu'on prendra la disposition utilisant le moins de boules possible. Ainsi une boule située sur la 3ème tige en bas vaut cent.

Le maître, à partir de ce moment, fait travailler les enfants aussi bien au niveau du boulier lui-même qu'au niveau de la représentation ; il fait coder ou décoder des nombres assez grands.

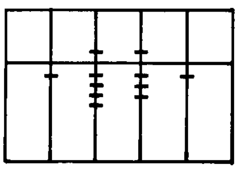
par exemple :

253 ; 927 ou encore



Ce travail a pour but de faire bien saisir aux enfants la valeur de chaque boule selon sa position.

En fin de séance les enfants écrivent les nombres sur le boulier et les décompositions additives associées.



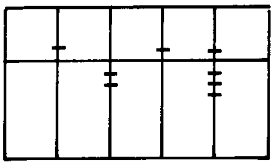
1000 500 50 1
+ 400 + 30

1000 parce qu'il y a une boule qui vaut 1000
500 parce qu'il y a une boule qui vaut 500
400 parce qu'il y a quatre boules qui valent 100
50 parce qu'il y a une boule qui vaut 50
30 parce qu'il y a trois boules qui valent 10
1 parce qu'il y a une boule qui vaut 1

– Jeudi 7 novembre 1980 : Vérification de la bonne utilisation du boulier
Passage du boulier à différentes écritures associées.

Dans un premier temps, le maître vérifie si tous les enfants ont compris les règles de manipulation du boulier, en proposant des exercices de codage et de décodage de nombres à 3 ou à 4 chiffres.

Puis il donne l'écriture conventionnelle associée à une disposition sur le boulier.



1	0	1	1
0	2	0	3

La grande majorité des enfants codent ou décodent correctement les nombres proposés. Cependant trois enfants n'ont pas encore saisi complètement la signification des 1 de la première ligne : ainsi Nathalie, au moment de l'écriture de 1980 sous la forme

0	1	1	0
1	4	3	0

dit :

– je ne comprends pas

1
3

1 et 3 ça fait quatre, ça ne fait pas 8.

Beaucoup d'enfants n'ont cependant pas encore perçu nettement que l'on ne peut pas mettre en bas des chiffres supérieurs à 5. Aussi quand le maître, en fin de séquence propose à chaque enfant d'écrire un nombre que leur voisin décodera, on voit apparaître beaucoup d'écritures du type :

1	0	1	1
4	8	2	7

Les discussions qui s'ensuivent au moment du décodage permettent de préciser les chiffres que l'on peut inscrire dans les cases, en rapport avec le nombre de boules disposées sur chaque tige.

– Vendredi 8 Novembre 1981 : Vérification de l'écriture associée au boulier.
Introduction de la numération romaine.

La séquence débute par le décodage d'une écriture proposée par le maître.

1	1	0	1	0
0	2	0	4	2

Puis Stéphane propose l'écriture suivante

2	1	1	2	1
5	4	1	4	2

qui laisse perplexe un certain nombre d'enfants. On constate qu'il y a une disposition correspondante sur le boulier, mais que l'on peut procéder à des échanges. (si le boulier est assez grand)

On les réalise et on obtient

0	1	1	1	0	1
1	0	4	2	4	2

C'est l'occasion de voir à nouveau qu'il n'y a pas une seule écriture pour un nombre. Des exercices de passage d'écritures à des écritures "plus simples" sont proposées : quelques enfants qui ont des difficultés utilisent le boulier et réalisent les échanges possibles.

La deuxième partie de la séquence consiste à réintroduire la numération romaine que les enfants ont déjà rencontrée dans des classes antérieures. Pour les raisons exposées dans le paragraphe précédent 23, on adopte

l'écriture IIII et non IV – XXXX et non XL ....

Les différents signes utilisés sont écrits au tableau

1	5	10	50	100	500	1000
I	V	X	L	C	D	M

Le maître fait écrire :

14 : XIIII – 24 : XXIIII – 55 : LV – 126 : CXXVI –
1980 : MDCCCCLXXX – 809 : DCCCVIIII

On peut noter quelques erreurs : ainsi certains élèves codent

1980 M VIIIIC LXXV
809 VIII VIIII ou LIII VIII

(influence de la numération orale, ou non prise en compte de la valeur du chiffre selon sa position).

3-2 Essai d'explicitation des règles de comptage de 5 en 5 et de 10 en 10.

Nous lisons dans les instructions pédagogiques :

"Les exercices de conversion consolident le rôle joué par la base dans notre système de numération.

Il en est de même pour des exercices oraux ou écrits consistant à :

– donner la suite des nombres à partir d'un nombre donné, ou la suite des instants de seconde en seconde (de minute en minute) à partir d'un instant donné,

– compter de 2 en 2, de 5 en 5, ou de 5 secondes en 5 secondes, de 5 minutes en 5 minutes, de 15 secondes en 15 secondes, de 30 minutes en 30 minutes, etc ...

– compter ou décompter de 10 en 10, de 100 en 100, ou de 60 secondes en 60 secondes, 60 minutes en 60 minutes."

Examinons comment se traduit en numération sexagésimale le comptage de 10 s en 10 s à partir d'un instant donné.

heures	minutes	secondes
03	27	32
03	27	42
03	27	52
03	28	02
03	28	12
03	28	22

Si on prolonge cette énumération on observe que le chiffre de la dernière colonne est toujours le même, que dans la deuxième colonne apparaît le cycle

$$\begin{array}{l} 0 \to 1 \to 2 \to 3 \\ 5 \leftarrow\!\!-\!\!-\!\!-\; 4 \end{array}$$

que le passage du 5 au 0 déclenche un changement dans la troisième colonne où apparaît le cycle

$$\begin{array}{l} \;\;\; 0 \to 1 \to 2 \to 3 \to 4 \\ 9 \quad 8 \leftarrow 7 \leftarrow 6 \leftarrow 5 \end{array}$$

que la passage du 9 au 0 dans la 3e déclenche un changement dans la quatrième colonne où apparaît le cycle

$$\begin{array}{l} 0 \to 1 \to 2 \\ \qquad\quad\;\; 3 \\ 5 \leftarrow 4 \end{array}$$

etc ...

Il en est de même à propos de la numération romaine ou celle associée au boulier. Ainsi dans la liste établie par les enfants (voir p. 58)

M	D	C	L	X	V	I
1	0	1	0	2	1	3
1	0	1	0	3	0	3
1	0	1	0	3	1	3
1	0	1	0	4	0	3
1	0	1	1	0	1	3

on observe les cycles dans la 2e, 4e, 6e colonne $0 \rightleftarrows 1$

et le cycle

$$\begin{array}{l} 0 \to 1 \to 2 \\ \;\; 4 \leftarrow 3 \end{array}$$

dans la 3e, 5e, 7e colonne les changements ayant lieu au moment du passage de 1 au 0 et du 4 au 0.

Les enfants sont capables d'utiliser intuitivement les règles signalées plus haut, cependant on pourra se rendre compte qu'ils ont des difficultés pour les expliciter convenablement. Ce travail nous paraît intéressant, car les élèves prennent ainsi du recul par rapport à la situation ; ils perçoivent des analogies entre différents systèmes, ce qui leur permet de mieux comprendre le fonctionnement de ceux-ci.

Voici le compte rendu des 4 séances que nous avons consacrées à ces questions :

– **Samedi 9 Novembre 1980 : Ecriture associée à la numération romaine.**

Le maître écrit au tableau :

M	D	C	L	X	V	I

et propose de venir coder 1246, 1524, 2847. Les enfants n'éprouvent aucune difficulté et viennent écrire :

M	D	C	L	X	V	I	
1	0	2	0	4	1	1	MCCXXXXVI
1	1	0	0	2	0	4	MDXXIIII
2	1	3	0	4	1	2	MMDCCCXXXXVII

Des exercices de décodage sont proposés

M – Peut-on avoir l'écriture suivante

M	D	C	L	X	V	I
1	2	1	2	2	0	5

E – Non, mais on peut la transformer (sans doute les élèves retrouvent ici des choses rencontrées dans la séquence précédente) : ils écrivent

M	D	C	L	X	V	I
2	0	2	0	2	1	0

Des exercices de passage d'une écrîture à une autre montrent qu'il existe encore certains problèmes ; par exemple sept élèves écrivent :

MM	LXXXX	VIII
2	9	8

- ils lisent :

deux cent quatre vingt dix huit.

De même 6 élèves n'arrivent pas à décoder 1 120 014 en écriture décimale.

Les autres ont des procédures variées pour y arriver :

– passage à l'écriture romaine : 1 12 00 14 → MOCCVIIII → 1 709

– valeur associée à chaque chiffre : 1 12 00 14 → 1000 + 500 + 200 + 5 + 4 → 1 709

– écriture décomposée en tranches de 2 chiffres et convertie directement :

$\underbrace{1}_{1}\ \underbrace{12}_{7}\ \underbrace{00}_{0}\ \underbrace{14}_{9} \rightarrow 1\ 709$

La discussion à partir de ces différentes procédures montre que l'écriture associée à la numération romaine fonctionne comme le boulier à condition de grouper par deux les chiffres.

$\underbrace{1}\ \underbrace{12}\ \underbrace{00}\ \underbrace{14}$

0	1	0	1
1	2	0	4

– Mercredi 12 Novembre 1980 : Règles concernant les algorithmes de succession des nombres. (séance 5)

La classe est répartie en 4 groupes :

– l'un travaille directement avec le boulier chinois
– l'un travaille sur les écritures associées au boulier chinois
– l'un travaille sur la numération romaine
– le dernier travaille sur la numération associée à la numération romaine.

La consigne est la suivante (pour chacun des groupes)

Comptez de 5 en 5, de 10 en 10. Ecrivez les règles que vous avez trouvées pour en faire part aux autres groupes.

Dans les groupes on voit apparaître des suites de nombres ; par exemple le groupe travaillant sur la numération romaine.

V – X – XV – XX – XXV – XXX

et

X – XX – XXX – XXXX – L – LX – LXX ....

Mais les enfants n'arrivent pas à formuler des règles pouvant être communiquées à d'autres groupes. Aussi le maître décide t-il de faire travailler collectivement les enfants en inscrivant quelques nombres au tableau et en invitant cinq enfants à venir établir les listes en comptant de 5 en 5. Ainsi apparaissent :

II	III	V	I	IIII
VII	V III	X	V I	V IIII
X II	X III	X V	X I	X IIII
X V II	X V III	X X	X V I	X V IIII
X X II	X X III	X X V	X X I	X X IIII
X X V II	X X V III	X X X	X X V I	X X V IIII
X X X II	X X X III	X X X V	X X X I	X X X IIII

En observant les différentes listes, les élèves formulent les règles :

– on change le V par un X puis le X par un V

– quand on change le X par un V, il faut mettre un X devant.

Ensuite le maître propose au groupe qui s'occupe de l'écriture associée à la numération latine de venir faire le même travail. On voit donc apparaître les listes.

L	X	V	I
			2
		1	2
	1	0	2
	1	1	2
	2	0	2
	2	1	2
	3	0	2

L	X	V	I
			3
		1	3
	1	0	3
	1	1	3
	2	0	3
	2	1	3
	3	0	3
	3	1	3

L	X	V	I
		1	0
	1	0	0
	1	1	0
	2	0	0
	2	1	0
	3	0	0
	3	1	0
	4	0	0

L	X	V	I
			4
		1	4
	1	0	4
	1	1	4
	2	0	4
	2	1	4
	3	0	4
	3	1	4

La formulation des règles en reste au niveau suivant :

– il y a toujours le même chiffre dans la 1e colonne

– dans la deuxième colonne, il y a 1,0 , 1,0 , 1,0 , 1,0

– dans la troisième colonne, il y a 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, ...

Les enfants perçoivent les régularités dans les colonnes, mais non les liens entre les chiffres situés dans les colonnes.

Pour terminer, le maître demande aux enfants d'écrire les suivants de 10302 en comptant de 5 en 5, c'est à dire :

1 0 3 0 2
1 0 3 1 2
1 0 4 0 2
1 0 4 1 2
1 1 0 0 2
1 1 0 1 2
1 1 1 0 2

Les enfants ne font pas d'erreurs dans leur grande majorité.

Remarque : il semble que les enfants aient été très motivés par cette activité puisque beaucoup ont écrit des suites impressionnantes à l'étude ou chez eux.

– Jeudi 13 Novembre 1980 : Formulation collective de règles concernant l'algorithme de succession (séance 6).

Le maître présente le tableau suivant et demande d'écrire le nombre en face de la flèche.

(on compte de 5 en 5 et on ne peut pas écrire les nombres intermédiaires)

M	D	C	L	X	V	I
1	0	1	0	2	1	3

Les enfants utilisent les règles vues la veille :

1e colonne 3, parce qu'il y a toujours le même chiffre dans la 1e colonne

2e colonne 0, parce qu'on a la suite 1, 0, 1, 0, 1, 0, ...

		5e colonne	4e colonne	3e colonne	2e colonne	1e colonne
M	D	C	L	X	V	I
1	0	1	0	2	1	3
					0	3

A partir de la 3e colonne, certains veulent marquer 4 parce qu'on a la suite 2, 2, 3, 3, 4, 4, mais d'autres perçoivent qu'en ajoutant 5 au premier nombre, il va apparaître un 3 tout de suite après, aussi on aura 2, 3, 3, 4, 4, 0 et finalement c'est 0 qu'il y aura dans la ligne fléchée.

Pour valider le maître fait écrire la suite des nombres,

M	D	C	L	X	V	I	
1	0	1	0	2	1	3	
1	0	1	0	3	0	3	
1	0	1	0	3	1	3	
1	0	1	0	4	0	3	
1	0	1	0	4	1	3	
1	0	1	1	0	0	3	←

puis demande de poursuivre l'écriture de la suite des nombres : certains remplissent mécaniquement les colonnes d'autres écrivent les nombres les uns après les autres.

M	D	C	L	X	V	I	
1	0	1	0	2	1	3	
1	0	1	0	3	0	3	
1	0	1	0	3	1	3	
1	0	1	0	4	0	3	
1	0	1	0	4	1	3	
1	0	1	1	0	0	3	←
1	0	1	1	0	1	3	
1	0	1	1	1	0	3	
1	0	1	1	1	1	3	
1	0	1	1	2	0	3	
1	0	1	1	2	1	3	
1	0	1	1	3	0	3	

Le maître demande alors aux enfants d'écrire les règles : ils décrivent ce qui se passe dans chaque colonne mais sans formuler les liens entre les chiffres figurant dans les différentes colonnes, comme en témoigne la rédaction de Roxane (qui utilise pourtant implicitement les règles de manière correcte).

le nombre de l'unité reste toujours la même !
dans la colone V selon le nombre de depart,
il y a toujours .... 0 ..... 0 ..... 0.
dans la colone X selon le nombre de depart
il y a toujours 0 - 0 - 1 1 2 2 3 3 4 4
quand il y a 5 il faut changér
dans les colones M D C L le nombre de depart
de ce morceau reste toujours pareille
s'il y a pas plus de 4 dans la colonne X
en fonction du nombre de depart on
prend le même nombre et après le
succédeur, on le reprend le même, après
on prend encore le succéceur, ect....

Un travail de formulation collective est entrepris sous la direction du maître.

Colonne 1 : on garde le chiffre de départ

Colonne 2 : on trouve 0 1 0 1 0 1 .... ou 1 0 1 0 1 0 ... suivant le chiffre de départ

Colonne 3 : on trouve 0 0, 1 1, 2 2, 3 3, 4 4, 0 0, ... ça change quand on est passé du 1 au 0 dans la 2e colonne

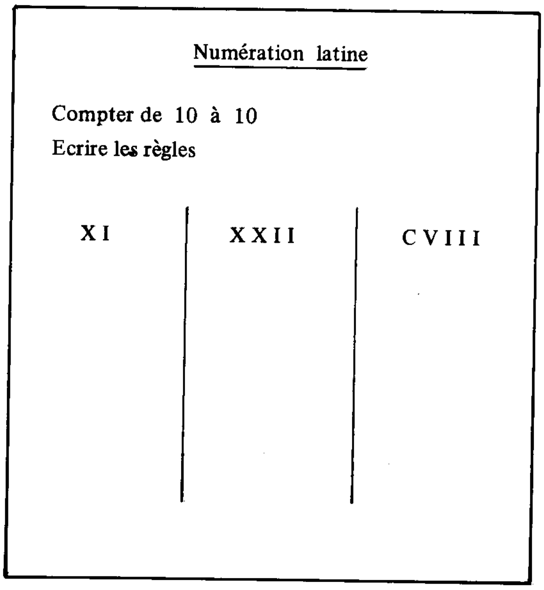
Colonne 4 : on trouve des zéros et des 1 ; ça change quand on passe du 4 au 0

Colonnes 5, 6, 7 : on garde les mêmes chiffres.

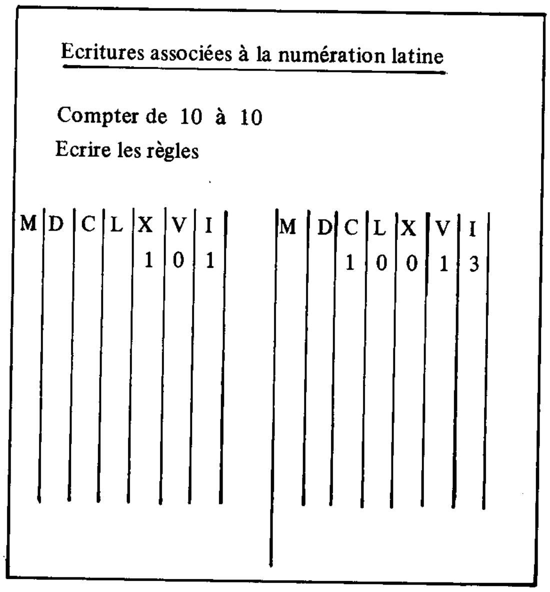
Certains enfants entrevoient le fait que dans la colonne 5, on trouve une suite de 1, une suite de 2, ..., une suite de 4 et que ça change quand on passe de 1 au 0 dans la 4e colonne.

– Samedi 15 Novembre 1980 : Formulation des règles (suite) (séance 7)

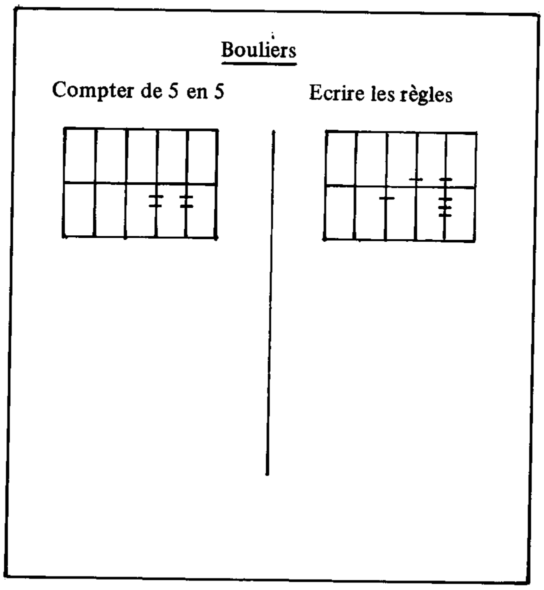
La classe est partagée en 4 groupes. Chaque groupe reçoit une fiche.



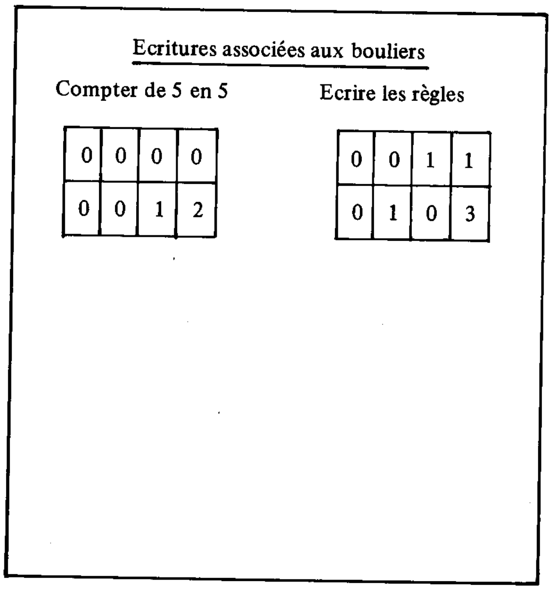
groupe 1



groupe 2



groupe 3



groupe 4

Les élèves écrivent sans peine les listes demandées. Voici les remarques faites suivant les groupes.

Numération latine.

X I
X X I
X X X I
X X X·X I

L I
L X I
L X X I
L X X X I
L X X X X I

C I
C X I
C X X I
C X X X I
C X X X X I

X X II
X X X II
X X X X II

L II
L X II
L X X II
L X X X II
L X X X XII

C II
C X II
C X XII
C X X X II
C X X X XII

C V III
C X V III
C X X V III
C X X X V III
C X X X X V III

C L V III
C L X V III
CLX X X V III
CLX X X X V III
C C V III

Les enfants notent que chaque fois il y a "un bloc"

par exemple

V III
X V III
X X V III
X X X V III
X X X X V III

que l'on retrouve en le faisant précéder par ex. de C, puis CC puis CC. Ils n'entrevoient pas de réitération de règles.

Ecritures associées à la numération latine.

M	D	C	L	X	V	I
				1	0	1
				2	0	1
				3	0	1
				4	0	1
			1	0	0	1
			1	1	0	1
			1	2	0	1
			1	3	0	1
			1	4	0	1
		1	0	0	0	1

M	D	C	L	X	V	I
		1	0	0	1	3
		1	0	1	1	3
		1	0	2	1	3
		1	0	3	1	3
		1	0	4	1	3
		1	1	0	1	3
		1	1	1	1	3
		1	1	2	1	3
		1	1	3	1	3
		1	1	4	1	3
		1	2	0	1	3
		1	2	1	1	3

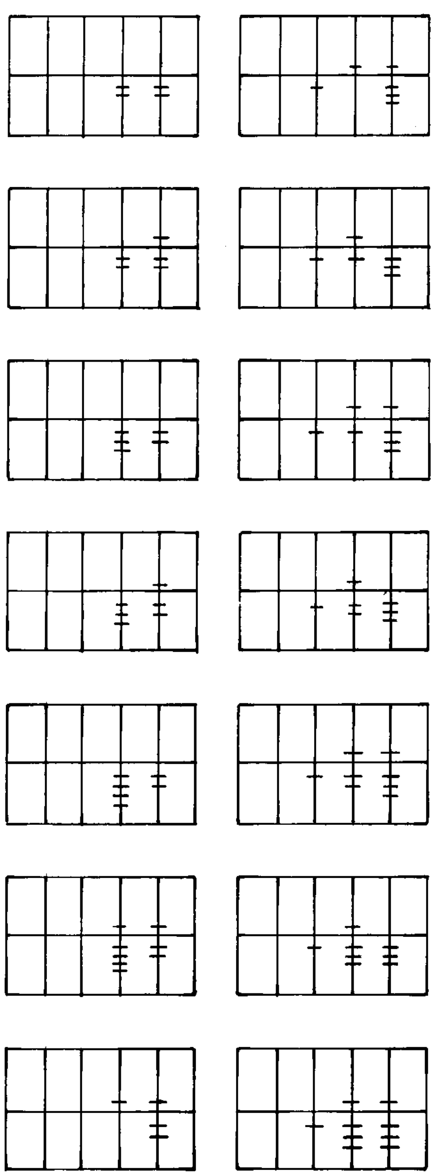
Les règles sont formulées selon ce qui a été fait la séance précédente.

(régularité suivant les colonnes avec indication du changement dans une colonne en fonction de la colonne précédente).

Au cours de la synthèse, le maître amène les enfants à remarquer que le passage d'un bloc à l'autre (en numération latine) correspond dans le cas des écritures associées au passage de 4 à 0 dans la colonne du X. C'est à dessein que les mêmes nombres avaient été choisis pour chacun des deux groupes car cela permet de faire des comparaisons intéressantes.

Bouliers et écritures associées.

0	0	0	0		0	0	1	1
0	0	2	2		0	1	0	3
0	0	0	1		0	0	1	0
0	0	2	2		0	1	1	3
0	0	0	0		0	0	1	1
0	0	3	2		0	1	1	3
0	0	0	1		0	0	1	0
0	0	3	2		0	1	2	3
0	0	0	0		0	0	1	1
0	0	4	2		0	1	2	3
0	0	0	1		0	0	1	0
0	0	4	2		0	1	3	3
0	0	1	0		0	0	1	1
0	0	0	2		0	1	3	3



Dans l'un et l'autre groupe, les élèves formulent difficilement les règles (la représentation et les écritures prennent déjà beaucoup de temps), ils le font case par case

– en bas à droite, on laisse toujours la même chose.
– en haut et à gauche, on met une boule (ou un en plus) puis on l'enlève.
– dans la deuxième colonne en bas on ajoute une boule (ou un en plus) tous les deux coups.

Au cours de la synthèse, le maître fait remarquer que ces formulations ne sont pas suffisantes ; il faut indiquer quand on fait les changements.

IV – BOULIER (5, 2) ET NOTION D'ALGORITHME.

4-1 Introduction.

L'utilisation du boulier nécessite de savoir coder et décoder les nombres, pour le reste les calculs se ramènent à des manipulations de boules le long des broches.

L'étude de son fonctionnement permet une réflexion féconde sur la numération, les quatre opérations et leurs relations. Les expériences d'utilisation en classe que nous rapportons ci-dessus en sont un exemple, mais on peut les envisager à d'autres niveaux tels que le premier cycle du second degré ou la formation des maîtres.

Cette étude fait aussi apparaître le caractère mécanique des manipulations sur le boulier (c'est par cet aspect qu'il se place parmi les ancêtres des instruments de calcul moderne). Elle peut être l'occasion d'une introduction à la notion d'algorithme : c'est-à-dire la description, à l'aide d'un nombre limité d'actions élémentaires, de ce qu'il faut faire pour effectuer certaines opérations sur le boulier. On rencontre aussi quelques notions informatiques de base, c'est-à-dire concernant le traitement systématique de l'information (ici, de l'information numérique).

C'est de ce point de vue que nous abordons la quatrième partie de cet article. Nous avons été obligés d'introduire quelques représentations ou quelques symboles pour pouvoir exprimer les algorithmes de calcul sur le boulier à l'aide d'organigrammes ou de programmes. Pour se familiariser avec elles nous conseillons, bien que nous ayons accompagné cette présentation de nombreux exemples, d'aborder la lecture de cette dernière partie avec un boulier chinois à portée de main.

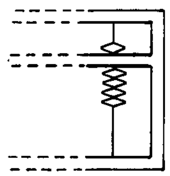
Notations

Il n'est pas possible de représenter sur le boulier un nombre quelconque, pour pouvoir présenter certains algorithmes dans leur généralité il nous faut recourir à des symboles. En particulier il nous sera utile de pouvoir décrire l'état d'un boulier, c'est-à-dire le (ou les) nombres qu'il représente ; voici le mode de représentation que nous utiliserons :

Nous noterons Etat (X_b^a) l'état du boulier lorsqu'on a noté le nombre $5a + b$ sur la broche la plus à droite, et pour lequel on ne s'intéresse pas à ce qui est représenté sur la gauche.

Par exemple :

Etat (X_4^1) correspond à

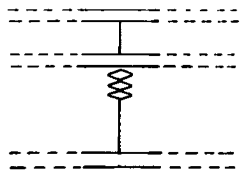


Nous ne faisons pas figurer sur les schémas, les boules qui restent contre les barres supérieure ou inférieure. Ils conviennent donc aussi bien pour le boulier chinois que pour le boulier japonais.

Si nous nous intéressons à ce qui est représenté sur une broche quelconque du boulier, mais pas à ce qui se trouve à sa gauche et à sa droite, nous noterons : Etat $(X_b^a Y)$

Par exemple :

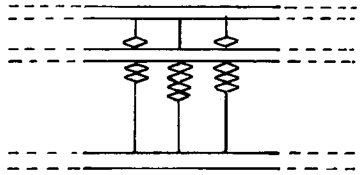
Etat $(X_3^0 Y)$ correspond à



Nous donnons maintenant l'état d'un boulier sur lequel est représenté le nombre 748 :

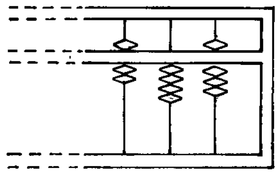
– sans contrainte de position dans le boulier :

Etat $(X\,{}^{1}_{2}{}^{0}_{4}{}^{1}_{3}\,Y)$



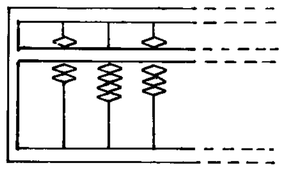
– en plaçant le chiffre des unités sur la broche la plus à droite :

Etat $(X\,{}^{1}_{2}{}^{0}_{4}{}^{1}_{3})$



– en plaçant le chiffre des centaines sur la broche la plus à gauche :

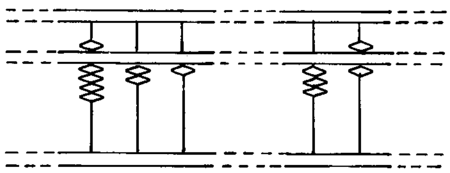
Etat $({}^{1}_{2}{}^{0}_{4}{}^{1}_{3}\,X)$



Les exemples suivants donnent l'état d'un boulier sur lequel sont représentés les deux nombres 921 et 36.

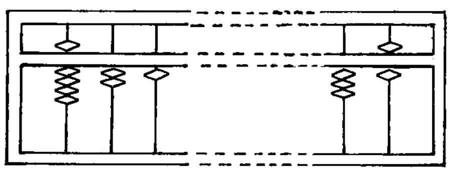
– sans contraintes de position :

Etat $(X\,{}^{1}_{4}{}^{0}_{2}{}^{0}_{1}\,Y\,{}^{0}_{3}{}^{1}_{1}\,Z)$



– en plaçant les deux nombres chacun à une extrêmité du boulier :

Etat $({}^{1}_{4}{}^{0}_{2}{}^{0}_{1}\,X\,{}^{0}_{3}{}^{1}_{1})$

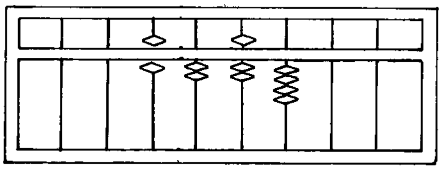


Nous dirons que le boulier, ou une de ses parties, est dans l'état Nul lorsque toutes ses boules sont repoussées vers les barres extérieures. C'est l'état dans lequel on met le boulier avant de l'utiliser.

Il nous arrivera de vouloir indiquer qu'en dehors des broches pour lesquelles nous donnons des indications spécifiques l'état du boulier est nul, nous le marquerons par le symbole O.

Ainsi, par exemple, si nous voulons représenter 6274 et indiquer que le reste du boulier est dans l'état nul, nous écrivons :

Etat $(\mathbf{O}\,{}^{1}_{1}{}^{0}_{2}{}^{1}_{2}{}^{0}_{4}\,O)$ – qui représentera pour un boulier à 8 broches l'état :



4-2 Ajouter 1.

Ajouter 1 est l'opération de base du boulier, elle se réalise en faisant glisser une boule de poids 1 (partie inférieure) vers la traverse centrale.

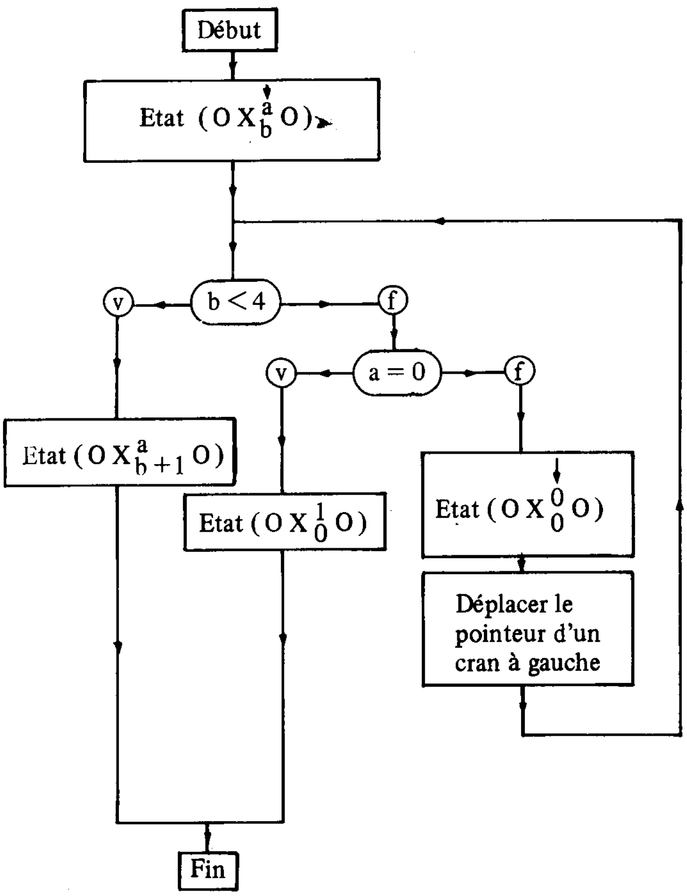
Bien sûr ceci n'est réalisable aussi simplement que si toutes les boules de la partie inférieure ne sont pas déjà toutes contre cette traverse.

Nous allons décrire à l'aide d'un schéma de boites et de flèches comment ajouter 1 à un nombre représenté par Etat $(O\,X^{a}_{b}\,O)$ sur le boulier. Pour faciliter la description nous allons compléter nos notations par un pointeur : " $\downarrow$ ", dont le rôle est de désigner la broche sur laquelle nous travaillons.

Par exemple :

$$\text{Etat } \left(O\,\substack{1\\3}\,\substack{0\\2}\,\overset{\downarrow}{\substack{1\\1}}\,\substack{0\\4}\,O\right)$$

signifie que l'on va s'intéresser à la broche portant le chiffre des dizaines du nombre représenté.



Commentaire :

- Le pointeur est fixé sur la broche des unités.
  Le calcul se déroule en suivant les flèches.
- Si b est inférieur à 4 alors il suffit d'ajouter une boule sur la partie inférieure de la broche.
  Si b est égal à 4 alors ajouter 1 provoque la création d'un paquet d'ordre supérieur dans la base alternée. Ou encore il faut répercuter une retenue, alors que la partie inférieure de la broche affiche zéro :
- Si a est égal à 0 alors il suffit de lui ajouter 1 ; sinon, c'est-à-dire si a est égal à 1 on provoque à nouveau en ajoutant 1 un paquet d'ordre supérieur ; il faut cette fois répercuter la retenue sur la gauche de la broche sur laquelle nous calculions :
- Nous déplaçons le pointeur sur la gauche, il faut en fait maintenant ajouter 1 au nombre représenté par X sur le boulier.

  Remarque : dans la suite du calcul a et b désignent le nombre de boules sur les parties supérieure et inférieure de la broche marquée par le pointeur.

Légende.

Ce schéma s'appelle un organigramme ; on le parcourt en suivant les flèches en entrant par $\boxed{\text{début}}$. Lorsque l'on se trouve sur une boite ⬭ on sort du côté v si l'expression qu'elle contient est vraie, du côté f si l'expression qu'elle contient est fausse.
Le cheminement est terminé quand on arrive sur $\boxed{\text{Fin}}$.

Remarquons que nous avons décrit ce calcul sans faire d'hypothèsess sur le nombre en question, en fait il n'est possible que si le résultat final ne nécessite pas plus de broches qu'il y en a sur le boulier ; dans le cas contraire on dit qu'il y a un dépassement de capacité. Ceci arrivera si on veut ajouter 1 à 99999 sur un boulier à cinq broches.

Une (dernière) notation, si Etat (ON O) est l'état du boulier sur lequel nous avons représenté le nombre x, alors nous noterons Etat $(O\mathcal{S}(N) O)$ l'état du boulier sur lequel est représenté le nombre $x + 1$.

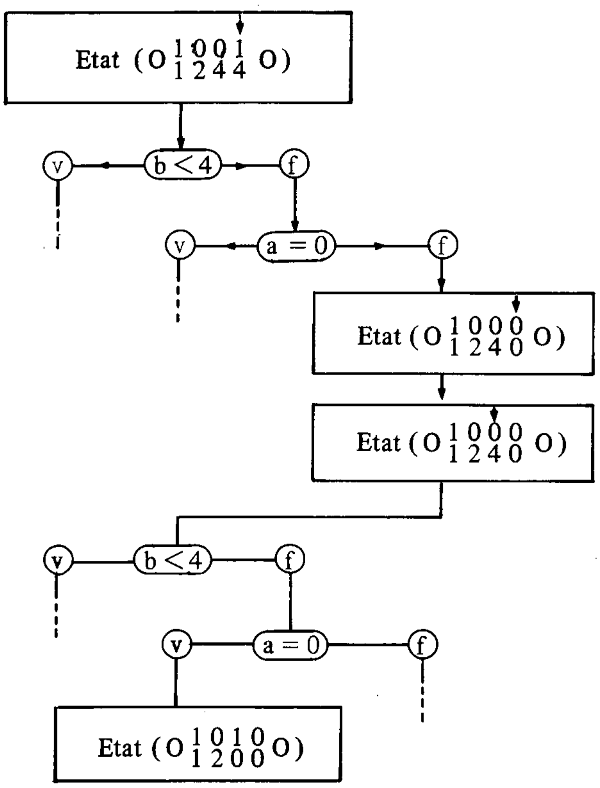
Nous allons profiter de cette notation pour donner une autre description de l'opération "ajouter 1", qui fait apparaître son caractère récurrent.

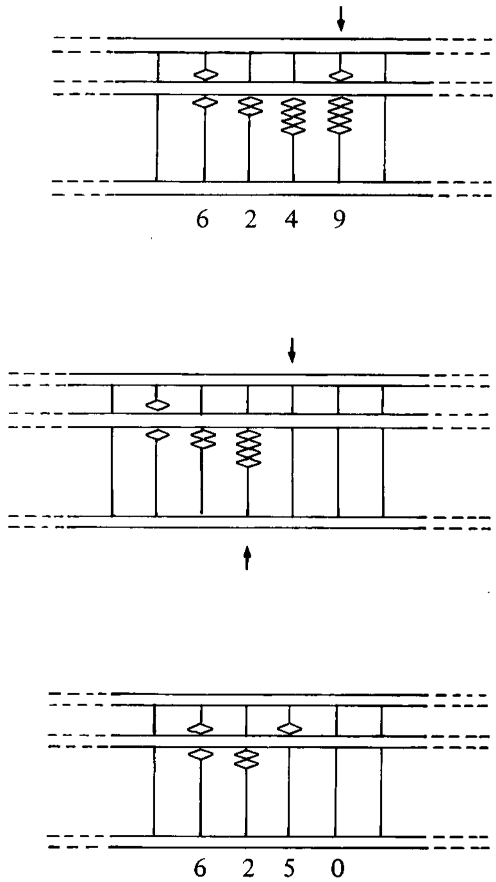
Ajouter 1 au nombre représenté par Etat $(O\, X{}^{a}_{b}\, O)$ c'est en fait calculer Etat $(O\mathcal{S}(X{}^{a}_{b}) O)$:

> Etat $(O\mathcal{S}(X{}^{a}_{b}) O)$ est égal :
>
> – si $b < 4$ alors à Etat $(O\, X{}^{a}_{b+1}\, O)$.
>
> – si $b = 4$ alors :
>
> – si $a = 0$ alors à Etat $(O\, X{}^{1}_{0}\, O)$
>
> – si $a = 1$ alors à Etat $(O\mathcal{S}(X){}^{0}_{0}\, O)$

On voit que dans le dernier cas on est ramené à ajouter 1 au nombre représenté à gauche de la broche unité du nombre de départ.

Un exemple de calcul, ajouter 1 au nombre 6249 :

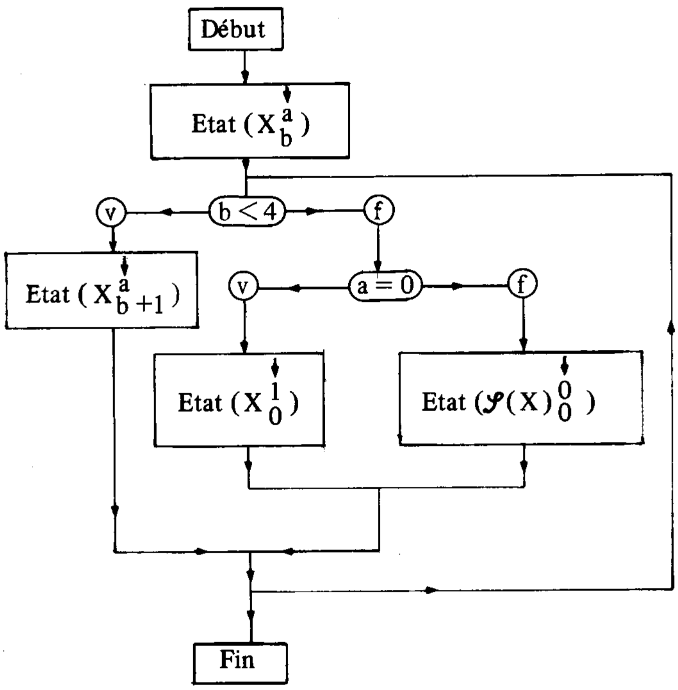




4-3 Compter de n en n.

Compter de n en n avec le boulier comme dans le cas de la numération écrite (ou parlée) revient à répéter plusieurs fois l'addition d'un même nombre. Mais comme pour elle, ce n'est particulièrement intéressant ou simple à réaliser que dans certains cas. En particulier lorsque les manipulations peuvent être systématisées sans faire référence à l'addition.

C'est le cas de façon évidente lorsqu'il s'agit de compter de 1 en 1 à partir d'un nombre n :
Soit Etat (X_b^a) l'état du boulier sur lequel le nombre n est représenté, l'organigramme ci-dessous décrit le comptage de 1 en 1 à partir de ce nombre :

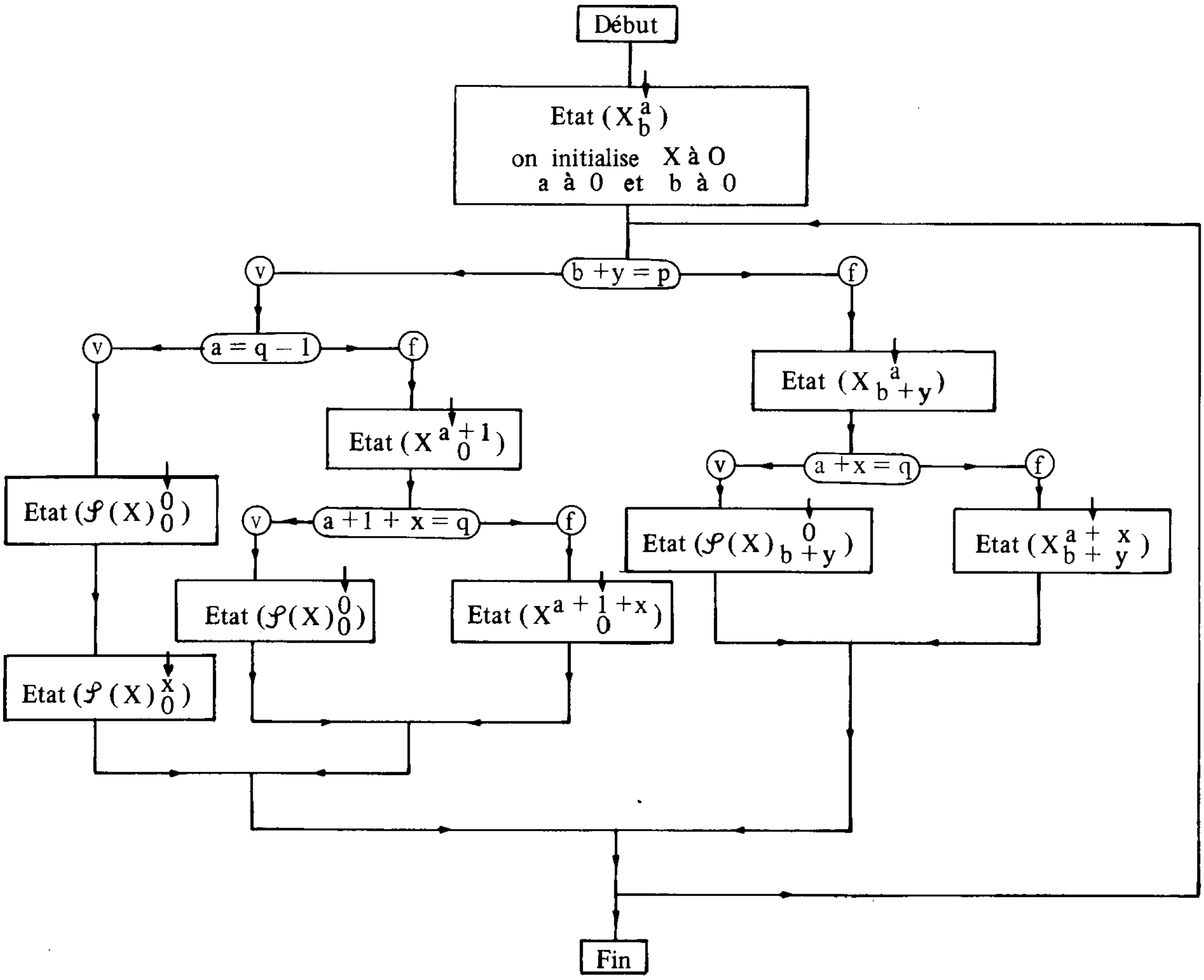


Remarquons que le pourtour reste toujours sur la broche des unités. Par ailleurs nous faisons appel dans ce calcul au calcul de $\mathcal{S}(X)$ qui apparaît dans cet organigramme comme une opération élémentaire.

On peut montrer que pour compter de n en n avec un boulier quelconque B (p, q) cela est plus particulièrement facile si n est un diviseur de p ou bien la somme de p et d'un diviseur de p.

Ainsi pour B (6, 2) les cas les plus faciles sont : 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9 et 12 ; pour B (5, 2) on trouve les cas 1, 5, 6. On peut remarquer que s'il est facile de compter de n en n alors il le sera aussi de compter de 10 n en 10 n, ou de 100 n en 100 n, etc.

Voici la description générale du comptage de n en n pour le boulier B(p, q) avec n représentable par $\binom{x}{y}$ sur le boulier où : x = 0 ou x = 1, et y est diviseur de p.



Plutôt que de commenter pas à pas cet organigramme nous allons donner deux exemples de son utilisation.

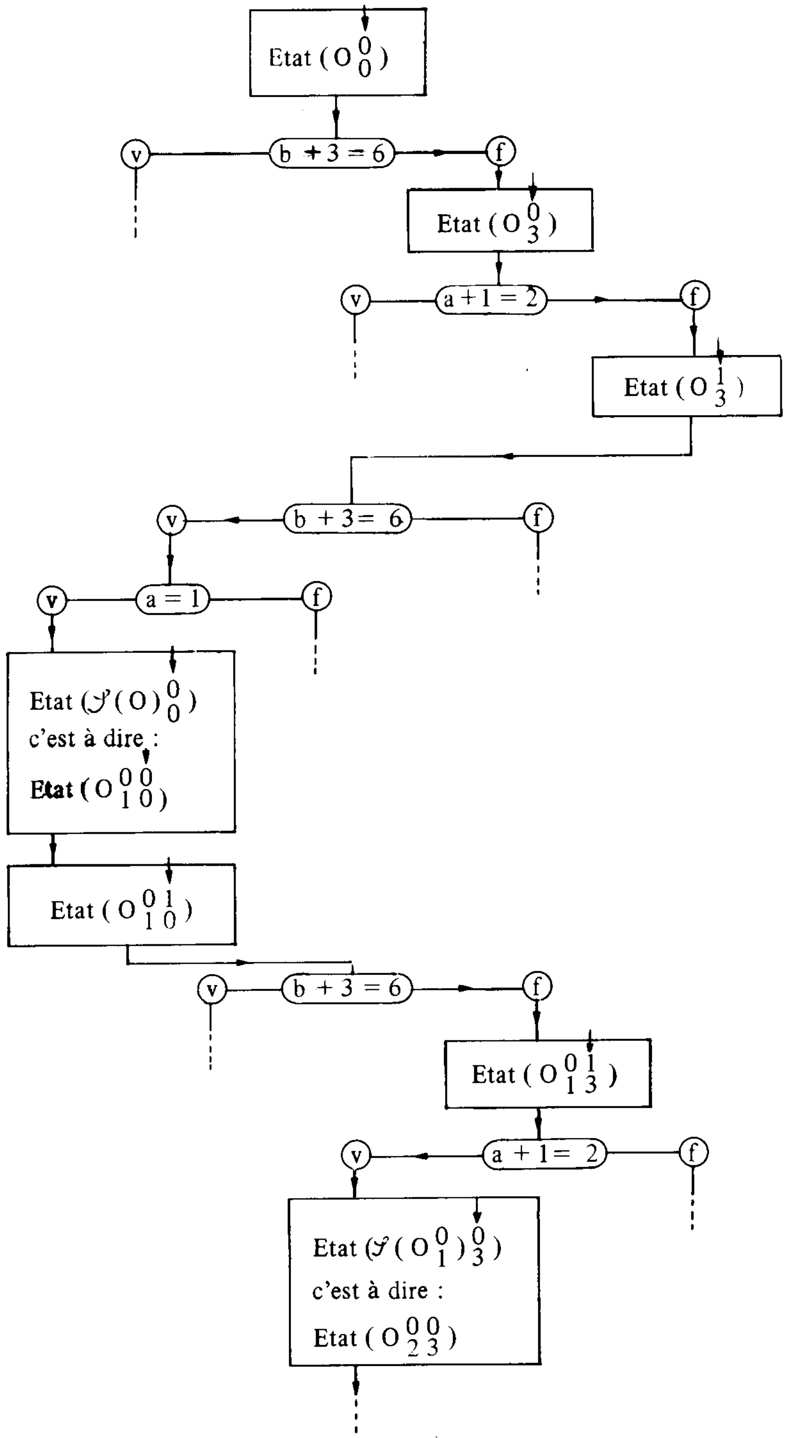
Puis nous donnerons un programme des manipulations pour compter de n en n sur un boulier B (p, q).

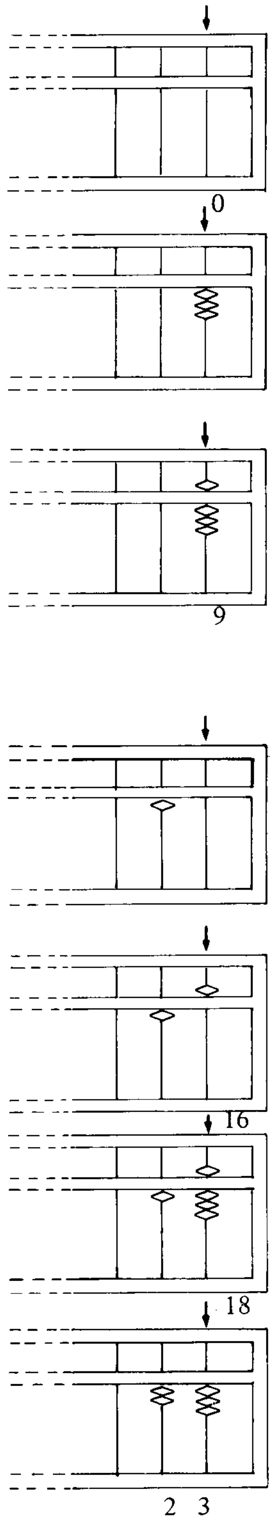
Exemple 1 : compter de 9 en 9 sur le boulier B (6, 2).

Dans ce cas n est représentable par $(^1_3)$.

(on pourra re-écrire l'organigramme ci-dessus dans ce cas particulier)

Notons que la numération écrite à base unique associée à ce boulier sera la numération à base 12.





attention, on est
en base 12!

Exemple 2 : Compter de 6 en 6 avec le boulier B (5, 2). Dans ce cas n est représentable par $\binom{1}{1}$.
(On pourra re-écrire l'organigramme donné plus haut, pour ce cas particulier).