L'ALGEBRE AVANT LA LETTRE

Abraham ARCAVI
Alex FRIEDLANDER
Rina HERSHKOWITZ
Département de l'Enseignement des Sciences
Institut Weizmann des Sciences, Israël

Les auteurs tiennent à exprimer leur gratitude à leur collègue Baruch Schwarz qui, avec patience, dévouement et élégance, a su rendre en français, non seulement le texte, mais aussi l'esprit de cet article.

Introduction

La formulation d'hypothèses et leurs généralisations («théorèmes»), ainsi que la justification (ou preuve avant la lettre) de ces généralisations sont essentielles dans toute activité mathématique.

L'écolier, en tant qu'«apprenti mathématicien», consacre la plupart de son temps à apprendre des algorithmes ou à manipuler des symboles mathématiques, et il oublie (s'il l'a jamais appris) que ces connaissances ne représentent que de simples outils au cours du véritable apprentissage mathématique.

Cet état de fait caractérise tout particulièrement l'enseignement de l'algèbre : tout d'abord, sont apprises les expressions algébriques en tant que telles, puis des manipulations formelles, et enfin une maîtrise des lois de la langue algébrique. Dans le meilleur des cas, nous repoussons l'application ou la signification de l'utilisation de ces lois à un stade ultérieur de l'apprentissage. Dans des cas moins heureux mais plus fréquents, la «cuisine algébrique» finit par devenir un but en soi (Booth, 1989).

Dans un tel enseignement, beaucoup d'élèves ne voient pas en l'algèbre un outil qui puisse leur permettre d'exprimer des généralisations et des processus de justification mathématiques et ce, même lorsqu'ils sont capables de maîtriser totalement les techniques algébriques.

Afin de modifier l'enseignement de l'algèbre pour que l'élève soit mis en présence d'une langue (aussi bien que des techniques qu'elle contient) en tant qu'**outil de pensée,** il est nécessaire de comprendre les processus de pensée qui sont latents au stade de la généralisation et de la justification.

Un bon nombre de recherches ont tenté de découvrir ces processus chez des élèves en cours d'apprentissage formel de l'algèbre, bien qu'ils ne soient que partiellement familiarisés avec la langue algébrique. Lee & Wheeler (1987), par exemple, ont étudié (en algèbre) les processus de preuve chez des lycéens. Ils ont trouvé que même les élèves qui utilisèrent l'outil algébrique (à peu près la moitié de l'échantillon de l'étude) ne saisirent pas réellement le sens d'une telle utilisation. S'il est vrai que l'algèbre ait représenté un raccourci pour décrire un problème, les expressions algébriques ne servirent en général qu'à engendrer des exemples numériques. Les élèves accordèrent à ces exemples numériques une importance plus grande qu'aux expressions desquelles ils furent extraits lors du processus de preuve. Pour beaucoup, l'algèbre apparaît donc comme n'étant pas de propos, bien que, pour des raisons obscures, maîtres aussi bien que livres s'entêtent à l'utiliser.

Ces résultats sont en accord avec d'autres études sur l'apprentissage de l'algèbre. Kieran (1989) donne une vue synthétique d'un grand nombre d'études et conclut qu'il existe des preuves indubitables qui indiquent que les élèves sont capables d'utiliser avec succès des manipulations algébriques, sans pouvoir aller beaucoup plus loin.

La présente étude tente de reconnaître des processus de pensée à propos de généralisation et de preuve **à leur état embryonnaire**, chez des élèves juste avant le commencement de l'enseignement de l'algèbre à l'école. A ce stade, la langue algébrique n'est pas connue, et l'élève ne peut pas «se réfugier» délibérément dans des manipulations algébriques. Notre hypothèse est que son attention aura plutôt tendance à être portée vers le besoin de généralisation et de preuve. De plus, l'élève devra adopter, voire créer, des outils pour les exprimer. Il expérimentera les processus de généralisation et de preuve par le biais des outils qu'il aura lui-même mis en œuvre.

Cette étude a été entreprise à l'aide d'une analyse méticuleuse d'interviews de couples d'élèves. A cette fin, furent développées trois situations-problèmes pour lesquelles tous les couples d'élèves durent produire des processus de généralisation et de justification.

Les «situations-problèmes»

Trois situations-problèmes ont été choisies et développées pour les besoins de notre recherche.

1) Etude des lois qui sont régies par la soustraction des inverses de deux entiers naturels consécutifs (avec justification).

2) Etude de la variation du périmètre d'un rectangle lorsqu'on augmente une de ses dimensions d'une unité et que simultanément l'on diminue l'autre dimension d'une unité.

3) Etude des liens existants entre date et jour de la semaine inscrits sur une feuille mensuelle d'un calendrier (par exemple, septembre 1988).

L'interview

L'interview a été conçu pour refléter les différents stades décrits dans la table ci-dessous. L'ordre dans lequel les situations-problèmes sont exposées varie suivant le couple d'élèves en question.

Présentation de la tâche

La situation-problème est présentée grâce à un certain nombre d'exemples numériques ou de façon générale. L'élève est invité à créer à son tour des exemples ayant trait à ce qui lui a été présenté.

Vers une «généralisation opérante»

A - Trouver d'autres exemples.
B - Trouver des exemples dans d'autres domaines de nombres.
C - Résoudre des problèmes inverses (reconstitution de la tâche à partir du résultat).

Vers une généralisation explicite

Création d'une description explicite de généralisation grâce à un outil, quel qu'il soit.

Vers une justification de la généralisation

...

Examinons par exemple la situation-problème 1, à la lumière de la structure de l'interview exprimée dans la table.

Présentation de la tâche

«Calculer 1/2 - 1/3 = 1/3 - 1/4 = ».

Vers une «généralisation opérante»

Nous appelons «généralisation opérante» une sensation intuitive et implicite de loi générale qu'il est possible d'éveiller chez l'élève en lui demandant d'accomplir efficacement des tâches intermédiaires. Il n'est pas nécessaire d'exprimer la généralisation de façon verbale ou autre, afin de s'en servir. Les tâches intermédiaires furent les suivantes.

A) «Trouver d'autres exemples»

Dans le processus, les élèves doivent remarquer les points communs entre les exercices qui leur ont été présentés (ici, que les nombres sont des inverses d'entiers consécutifs) ; ils doivent alors continuer à créer d'autres exemples.

B) «Pouvez-vous trouver la différence 1/212 - 1/213 sans faire de calculs ?». L'élève doit confronter des nombres «pas très sympa» ; il est alors contraint d'éviter les calculs à l'aide de stratégies plus «généralisantes».

C) «Trouver les nombres manquants dans 1/7 - 1/? = 1/??, et dans 1/? - 1/?? = 1/110». La reconstitution de l'exercice est un autre moyen d'inviter implicitement l'élève à examiner les mécanismes qui gèrent les exemples particuliers.

Vers une généralisation explicite

«Que vois-tu de commun entre les exemples sur lesquels tu as travaillé ?».

Cette question amène l'élève à passer d'une généralisation opérante qu'il a utilisée à des stades antérieurs, à une généralisation explicite. Cette question révèle dans quelle mesure l'élève est à même d'exprimer, par un moyen quelconque, une généralisation véritable.

Vers une justification

Les élèves sont invités à convaincre, à justifier et à prouver» les lois et conclusions qu'ils ont trouvés.

Quelques remarques mathématiques et épistémologiques

Quand on en vient à créer et à développer, pour des buts pédagogiques ou de recherche, des situations-problèmes qui impliquent des processus de généralisation et de justification, il s'avère que la structure mathématique du problème a des répercussions sur la nature de ces processus. Nous rappellerons, dans cette étude, deux différents types de telles structures.

Premier type. la structure du processus de justification (ou de preuve) est analogue à celle qui a été exécutée sur des exemples isolés. C'est le cas de la situation créée par la soustraction des inverses de deux entiers consécutifs (situation 1 ci-dessus). Après avoir résolu un certain nombre d'exemples comme :

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6},\ \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{30},\ \frac{1}{7} - \frac{1}{8} = \frac{1}{56}$$

l'élève est à même de justifier ses calculs, car le résultat de son opération est toujours une fraction dont le numérateur est l'unité et dont le dénominateur est le produit des dénominateurs des fractions soustraites

(en langage algébrique, $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$).

La justification formelle peut être exécutée complètement par l'élève (verbalement ou de façon purement algébrique), suivant des stades tout à fait analogues à ceux suivis lors de la résolution des exemples isolés.

Observons, en effet, le parallélisme entre les deux processus suivants :

$$\frac{1}{7} - \frac{1}{8} = \frac{8}{56} - \frac{7}{56} = \frac{1}{56}$$

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1}{n(n+1)} - \frac{n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Il est bien sûr possible d'exprimer verbalement le langage algébrique ; ce ne sera, ici encore, que le reflet de l'exemple isolé. En d'autres termes, l'exemple contient en son sein la justification complète.

Deuxième type. Examinons, par exemple, le problème suivant : «Essayez de découvrir quelques propriétés générales de la différence entre le cube d'un entier et l'entier lui-même». Grâce à un certain nombre d'essais (en substituant quelques valeurs), l'élève est à même de découvrir que toutes les différences sont des nombres divisibles par 6. Néanmoins, s'il veut en donner une preuve, l'élève doit tout d'abord exprimer la différence algébriquement, $n^3 - n$; puis il doit factoriser l'expression trouvée, $n^3 - n = n(n - 1)(n + 1)$. Il doit alors appliquer la «règle» suivante : il y a parmi trois naturels consécutifs, un nombre divisible par 3 ; il y a aussi un nombre pair ; le produit de ces trois nombres est donc toujours divisible par 6.

Une telle justification ne peut donc être donnée sans (savoir) mener un raisonnement mathématique et sans posséder de bagage mathématique - ici, plus spécifiquement, le bagage algébrique.

En définitive, les tâches du premier type ne permettront à l'élève qui fait des essais isolés de passer du cas particulier au cas général que lorsqu'il saura tirer de ces essais isolés de «bonnes» conclusions. Les exemples isolés ouvrent une voie et la structure générale de la justification est susceptible d'être découverte à travers eux.

Pour ce qui est des tâches du second type, la structure générale de la justification est le pendant d'une autre découverte qui exige bien souvent une maîtrise de l'outil algébrique à un niveau supérieur.

Le clivage entre ces deux types n'est pas très net. Il est souvent possible de faire correspondre un problème au premier aussi bien qu'au second type, suivant la méthode de résolution empruntée. Pourtant cette séparation entre types de tâche contribue grandement à la compréhension de la pensée mathématique (de l'élève) comme à sa description.

Résultats

Les interviews d'élèves travaillant par paires sur les situations-problèmes décrites plus haut nous ont révélé une grande variété et une grande richesse de processus de généralisation et de justification. Bien que ces deux processus soient intimement liés, nous allons tirer des conclusions séparées et nous donnerons çà et là quelques indications sur la nature de leur lien.

I - Processus de généralisation

Les couples d'élèves accomplirent leurs tâches sans difficulté lorsqu'ils furent explicitement invités à trouver des généralisations sur la base de lois qu'ils observèrent dans leurs activités antérieures. Toutes ces équipes de deux créèrent une variété de généralisations, de nature et de niveau différents, exprimées elles-mêmes de manière différente. Nous allons passer en revue les différents genres de généralisations qui ont été trouvés.

Premier genre

- *«Quand des nombres (des dénominateurs) se suivent, alors un est pair et l'autre impair, et alors l'un après l'autre, faut les multiplier».*
- *«La somme des nombres dans les diagonales* [de tout carré dans la table d'un mois dans un calendrier] *vaut toujours la même chose».*

Ces deux généralisations (qui ont trait aux situations-problèmes 1 et 3 respectivement) ont été créées lors des premiers stades et reflètent tout simplement des calculs superficiels effectués sur des exemples. Autrement dit, elles sont une expression verbale d'une similitude de formes qui saute aux yeux en observant un certain nombre d'exemples. Une telle généralisation est similaire de la généralisation appelée dans la littérature une «généralisation empirique» (voir, par exemple, Dörfler, 1989). Elle est liée au genre de problème et à la curiosité éveillée chez «l'observateur». Dans la première citation (ci-dessus), le résultat de l'algorithme est effectué sur les exemples.

La première citation comprend aussi des généralisations auxiliaires de propriétés qui découlent du résultat de base mais qui ne sont pas nécessaires ou adéquates à l'existence de la loi. Par exemple, *«quand des nombres se suivent»* (propriété nécessaire) *«alors un est pair et l'autre impair»* (propriété non nécessaire).

Deuxième genre

La citation suivante est une réponse donnée à l'interviewer qui exige d'être «sûr» de la généralisation qu'il a entendue. Elle concerne l'exemple «1/8 - 1/9».

«Mais y'a quelque chose qui se passe ! Chaque fois qu'on a 72 qu'on divise par... 8, ça fait 9, maintenant 9 moins ça [8] ça fait toujours... Bon ! si on multiplie ça et ça et on divise le résultat par 9, on va avoir 8 et si on divise par 8, on aura alors 9, donc si on divise un par l'autre... un nombre moins un nombre qui est avant lui, ça fait toujours 1,... c'est évident...».

La citation ci-dessus renferme une tentative d'exprimer la justification de cette généralisation, en même temps qu'une vision de la généralité du mécanisme qui est latent dans l'exemple. Une telle généralisation est différente de celle qui a été décrite plus haut parce qu'elle a été saisie en observant des caractères communs existant lors de la répétition d'une opération. Dörfler (1989) l'appelle «perception of the invariants of actions».

Cette citation met en exergue le caractère rudimentaire de l'outil qui décrit la généralisation. En l'absence d'outil algébrique et en raison du fait que l'outil visuel est ici inadéquat, l'outil est verbal. On sent l'effort de l'élève pour exprimer un phénomène général qui va au delà de ce qui est visible dans l'exemple isolé.

Troisième genre

L'élève trouve la loi à partir des exemples qui lui ont été présentés. Cette loi éveille en lui le besoin de créer d'autres exemples grâce auxquels il généralise la loi première pour créer des lois d'un ordre supérieur.

Par exemple, après que Eli et Roni eurent décrit verbalement la loi

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$$

pour la situation-problème à propos des inverses d'entiers, ils continuèrent à créer de nouveau exemple :

Eli choisit de considérer des exemples avec des numérateurs différents de 1. Verbalement, il exprima la loi algébrique suivante :

$$\frac{x}{n} - \frac{x}{n+1} = \frac{x}{n(n+1)} .$$

Roni examina des exemples pour lesquels les dénominateurs ne sont pas des entiers consécutifs. Verbalement, il exprima la loi algébrique suivante :

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+a} = \frac{a}{n(n+a)}.$$

C'est alors que Roni unit ces deux lois en une seule en affirmant : *«Lorsqu'on soustrait une fraction d'une autre fraction ayant le même numérateur, le numérateur du résultat est le produit du numérateur commun de deux fractions par la différence de deux dénominateurs, et le dénominateur est le dénominateur commun»*. Roni a donc exprimé verbalement la loi suivante :

$$\frac{x}{n} - \frac{x}{n+a} = \frac{xa}{n(n+a)} .$$

Les exemples et leurs caractéristiques sont la matière première sur laquelle les généralisations de deux premiers genres - la généralisation empirique et la généralisation du mécanisme - sont basées. Quant au troisième genre de généralisation, il ouvre, au delà de l'exemple, un passage vers des généralisations d'un ordre supérieur.

Ces généralisations «supérieures», élargissent le champ d'action des situations-problèmes, les transformant en cas particuliers. Certains mathématiciens voient là le germe des véritables processus de généralisation en mathématique (voir, par exemple, Davis et Hersh, 1981).

II- Processus de justification

Nous avons déjà noté plus haut, lors de la description de la structure de l'interview, que les élèves furent interrogés sur les points suivants :

- *Es-tu certain que cela va être toujours vrai ?*

- *Comment pourrais-tu convaincre quelqu'un d'autre que ce que tu as trouvé est vrai ?*

Ces questions furent posées afin d'éveiller chez les élèves un besoin de justification (explications, raisons ou preuves) pour les «lois» qu'ils avaient trouvées.

Dans certains cas, les élèves cherchèrent des justifications «extérieures» qui dépendaient de facteurs étrangers à l'exemple en question.

Ainsi, Yoni (à propos des inverses de naturels) : *«y'a peut-être une formule que j'sais pas, comme celles de la géométrie. J'sais pas si une formule comme ça existe»*.

La plupart du temps, les élèves essayèrent de mettre en jeu un certain nombre d'outils afin d'élaborer leurs justifications :

1. Utilisation des différentes formes que prennent les exemples isolés.
2. Les justifications verbales - les «récits».
3. Utilisation d'outils visuels.
4. Utilisation de symboles.

1. Utilisation d'exemples

Nous allons passer en revue les trois types d'utilisation d'exemples que nous avons trouvés.

* Le premier type consiste à apporter l'exemple en tant que témoignage légal (garant) de la véridicité de la loi. La preuve est saisie comme l'apport d'un fait (l'exemple) qui certifie ou qui rejette la loi. Un nombre réduit d'exemples a un pouvoir «légalisant» absolu.

* Pour ce qui est du second type, les exemples isolés **représentent** pour l'élève une classe plus large. C'est ainsi que pour le cas des inverses de naturels, la justification se fonde sur de «petits nombres» et de «grands nombres».

* Quant au troisième type, la justification complète est donnée verbalement. La formulation n'est pas exprimée de façon générale, mais elle est soutenue par l'exemple isolé en même temps que par l'application d'un mécanisme général de justification. Revenons, par exemple, sur un extrait de l'interview que nous avons présentée plus haut.

Mais y'a quelque chose qui se passe ! Chaque fois qu'on a 72 qu'on divise par... 8, ça fait 9, maintenant 9 moins ça [8] ça fait toujours... Bon ! si on multiplie ça et ça et on divise le résultat par 9, on va avoir 8 et si on divise par 8, on aura alors 9, donc si on divise un par l'autre... un nombre moins un nombre qui est avant lui, ça fait toujours 1, c'est évident...».

2. Les justifications verbales - les «récits»

Le premier stade d'une justification verbale est le troisième type d'utilisation d'exemples tel que nous venons de le voir.

Mais certains élèves allèrent plus loin : la formulation de la justification fut pour eux «épurée» de l'utilisation de l'exemple. C'est ainsi que pour les inverses de naturels, on peut citer : *«Lorsqu'on soustrait deux fractions qui ont pour numérateurs et pour dénominateurs des nombres consécutifs, alors pour soustraire, faut mettre les fractions du même dénominateur. Et alors, au numérateur, les nombres (consécutifs qui se trouvent au dénominateur) changent de place et leur différence est 1».*

3. Utilisation d'outils visuels

Dans la situation-problème 2, Noa et Keren «traduisent» toutes deux la question par des exemples numériques et commencent à calculer le périmètre d'un rectangle lorsque l'on rallonge deux côtés d'une unité et que l'on raccourcit deux côtés d'une unité.

Keren qui est la plus rapide, a déjà calculé le périmètre de deux rectangles qu'elle a construit, mais n'est pas encore arrivée à la conclusion.

Noa qui est plus lente, se redresse soudain et dit avec assurance : *«ça donne la même chose, bien sûr»*. Elle explique sa conclusion en montrant son crayon et dit : *«Si on prend cette ligne, si on la casse et on fait de ça un rectangle, il restera la même chose, quoi qu'on fasse»*.

Les qualités visuelles dont est dotée Noa lui permettent de se débarrasser complètement de l'exemple et de voir la généralité du mécanisme.

C'est ainsi que Fischbein (1988) décrit une telle faculté : «... visual representations contribute to the organization of information in synoptic representations and thus constitute an important factor of globalization. On the other hand, the concreteness of visual images is an essential factor for creating the feeling of self-evidence and immediacy. A visual image not only organizes the data at hand in meaningful structures but it is also an important factor guiding the analytical development of a solution».

La dynamique créée par un couple d'élèves ainsi qu'entre les élèves et l'interviewer, fournit plus d'un type de justification, à travers leurs discussions et leurs débats.

Par exemple : lors de la situation-problème 1 à propos d'inverses d'entiers naturels, Noa et Keren durent expliquer quelle justification leur parut la plus convaincante, un exemple ou un «récit» verbal. C'est alors que se déroula le débat suivant.

Keren : *je lui* [une tierce personne qui doit être convaincue] *raconterai une histoire, c'est plus facile que de lui dessiner beaucoup d'exemples.*

Noa : *Je lui raconterai une histoire, et lui montrerai beaucoup d'exemple pour lui **prouver.***

Int : *Si tu devais choisir, laquelle des deux [méthodes] serait plus convaincante pour **prouver**...*

Noa : *Les deux sont convaincantes, parce que...*

Keren : [l'interrompant] ... *Je crois que l'histoire est plus convaincante.*

Int : *Pourquoi ?*

Keren : *Parce que, disons... j'explique pourquoi ça arrive...*

Noa : *L'explication est plus convaincante que l'exemple, mais pour prouver, faut aussi ajouter comme si c'était pour prouver. Il dit* [la tierce personne qui doit être convaincue] *jusqu'à présent, j'ai compris, maintenant je veux que tu me prouves.*

4. Usage de symboles

Bien que les élèves interviewés n'aient pas appris encore l'algèbre de façon formelle, certains d'entre eux tentent d'utiliser des symboles algébriques, de leur propre initiative ou sous l'instigation de l'interviewer.

Par exemple, Ofri et Doron tentent de justifier pourquoi la différence entre le produit des nombres diagonaux (dans les «carrés du calendrier», situation-problème 3) donne toujours 7.

Int : *Je vous propose de travailler avec des lettres.*

Ofri : *Bon, on prend* a . *mais y'a pas d'formule... attendez, ouais y'a une différence, j'vais faire a, b, c, d... mais si je prends c, qu'est-ce que j'f'rais avec ça* [apparemment, Ofri a des difficultés avec les nombres qui se trouvent entre b et c dans la rangée inférieure, et qui ne sont pas représentés par la consécutivité des lettres. Il écrit

a b
c d

multiplie les diagonales et «sèche»].

Int : *Pouvez-vous réduire le nombre de lettres ?*

Ofri : *On peut faire a, a + 1, b, b + 1*

[il écrit a a + 1
b b + 1

et vérifie sur des exemples numériques]. *Si on met 2 à la place de a et 3 à la place de b, ça peut pas être vrai. Alors, on donne la même valeur* [apparemment il veut dire la même lettre... il guide son camarade] *mets ici a et là a + 1.* [Ils en viennent enfin à

a a + 1
a + 7 a + 7 + 1].

Int : *Pouvez-vous maintenant expliquer pourquoi la différence entre les produits des diagonales est toujours 7 ?* [Au terme d'une discussion, ils en arrivent aux produits a(a + 7 + 1) et (a + 1)(a + 7)].

Doron : [avec contentement] *Alors voilà, on a trouvé si on met 3, alors là on aura* [pour a(a + 7 + 1)] *33 et là* [pour (a + 1)(a + 7)] *on aura 40.*

Ofri : *Bon, d'accord, mais c'est un exemple. On lui a donné un exemple, et alors ? ... Non ! c'est qu'un exemple !*

Doron : *Non ! On lui a montré avec des nombres et puis après avec des lettres...*

Ofri : [apparemment frustré] *Non ! On lui a pas montré avec des lettres.*

On voit ici que Doron se contente tout à fait d'exemples numériques, créés à partir de l'expression algébrique obtenue. Le fait qu'ils aient réussi à construire une expression algébrique qui décrive la règle, contente les besoins de justification de Doron. En effet, il peut utiliser l'expression de façon générique afin d'obtenir des exemples qui satisfont à la règle. Par contre, Ofri ressent la nécessité d'une justification générale à l'aide de lettres, et comme il se sent incapable de l'accomplir, il a un sentiment de frustration. Bien que la construction de l'expression dérive d'exemples, et que d'autres exemples puissent être engendrés grâce à cette même expression, cela ne suffit pas à Ofri pour constituer une justification générale. Nous sommes donc ici en présence d'une conduite dérivée d'une tâche de généralisation et de justification bien que, épistémologiquement parlant, la justification ne soit pas basée sur des exemples : la structure de la justification est conditionnée ici (comme nous l'avons vu plus haut) par une nouvelle «découverte» mathématique qui exige souvent une maîtrise de l'outil algébrique que l'élève ne possède pas encore. Ofri est parvenu aux limites de ses connaissances algébriques, et ressent qu'un manque de connaissances inhibe sa pensée mathématique. Il est raisonnable de penser que l'enseignement de manipulations algébriques à partir de telles situations sera hautement significatif.

Epilogue

Les résultats ci-dessus révèlent des aptitudes et des difficultés chez les élèves seuls ou travaillant par paires, au passage de l'exemple (ou des exemples) à la généralisation et la justification. Nous avons vu qu'en général, les élèves sont capables de parvenir au stade de généralisation, ainsi qu'à différents types de justifications sans utiliser de langue algébrique. Par contre, on a reconnu un certain nombre de situations pour lesquelles l'absence d'outil symbolique représente un obstacle à la pensée et à l'action.

De plus, on a vu que de telles situations sont susceptibles de représenter un terrain propice pour inviter les élèves à être conscients de la nécessité de l'acquisition de l'outil symbolique manquant. Nous pensons comme d'autres chercheurs (par exemple, Bell, 1988) que ces situations donnent un sens à l'enseignement du langage algébrique, de ses lois et de sa «grammaire».

Références

A. BELL, (1988), Algebra, Choices in curriculum design. An exploratory teaching experiment. In : *Proceedings of the 12th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME XII).* Veszprem, Hungary : 1, 147-153.

L. BOOTH, (1989), *A question of structure.* In Wagner S. and C. Kieran (Eds.) *Research issues in the learning and teaching of algebra. NCTM,* Reston, Virginia, pp. 57-59.

P.J. DAVIS and R. HERSH, (1981), *The mathematical experience.* Houghton Mifflin Co, Boston.

W. DORFLER, (1989), *Forms and means of generalization.* [Preprint available from the author].

E. FISCHBEIN, (1988), Intuition in science and mathematics. *An educational approach.* Reidel, Dordrecht, The Netherlands.

C. KIERAN, (1989), A perspective on algebraic thinking. In : *Proceedings of the 13th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME XIII).* Paris, 2, 163-171.

L. LEE and D. WHEELER, (1987), Algebraic thinking in high school students : their conceptions of generalisation and justification. *Report. Department of mathematics,* Concordia University, Montreal.