L'AIRE ET LA MESURE

Marie Jeanne Perrin-Glorian
IREM Paris 7

Introduction

Le titre de l'exposé[1] est vaste. Nous parlerons surtout d'aire et très peu des autres mesures. Mais, pour analyser la notion d'aire, nous sommes amenés à nous interroger sur les notions de grandeur et de mesure de façon plus générale.

Le contexte de ce travail : quel apprentissage de la notion d'aire ?

Avec R. Douady, nous avons construit des séquences sur l'enseignement de la notion d'aire à des élèves de l'école élémentaire et de sixième, et nous les avons réalisées dans deux classes de CM2[2]. Au départ, notre réflexion portait :

- d'une part sur l'analyse du contenu mathématique en prenant en compte les trois pôles objets géométriques, grandeurs, nombres et sur l'analyse des implications didactiques que peut avoir l'identification de deux d'entre eux,
- d'autre part sur les erreurs habituelles des élèves, en particulier les confusions aire périmètre et les confusions de formules.

Dans l'enseignement que nous avons cherché à mettre au point, nous visions deux objectifs , le premier lié à l'analyse du contenu, le second fondé sur les erreurs habituelles des élèves :

1. **associer un nombre au maximum de surfaces** (en particulier à tous les polygones et aux disques) de façon à pouvoir faire des comparaisons et des calculs. Cependant, pour définir une application mesure entre surfaces et nombres avec suffisamment de sens pour les élèves, nous avons fait l'hypothèse qu'il faut d'abord *construire l'aire comme grandeur autonome en distinguant aire et surface aussi bien qu'aire et nombre.*

2. **différencier aire et longueur**, en particulier aire et périmètre, et ceci **avant même d'avoir un moyen de mesurer les aires** — le périmètre est en effet, pour les élèves, une autre "mesure" de la surface.

Nous avions choisi de *retarder l'identification entre aire et nombre* avec l'hypothèse qu'*une identification précoce entre grandeurs et nombres favorise l'amalgame des différentes grandeurs en jeu* (ici aire et longueur).

---

[1] Ce texte reprend un exposé fait en juillet 1988 à Olivet lors de l'Université d'été de formation en didactique des mathématiques des formateurs d'instituteurs.
[2] voir Petit x numéros 6 et 8.

«petit x» n° 24 pp.5 à 36, 1989-1990

L'analyse des productions des élèves en classe, au cours d'entretiens et à des épreuves écrites a permis de dégager les acquis, les difficultés qui résistent et les difficultés non prévues qui nous ont amenées à faire de nouvelles hypothèses et à modifier les séquences.

En outre, pour éclairer notre démarche et la situer dans l'évolution de cet objet d'enseignement parmi d'autres démarches correspondant à d'autres choix didactiques, j'ai été amenée à analyser l'évolution de l'enseignement de l'aire et de la mesure à travers les programmes de l'école élémentaire et du premier cycle depuis un siècle. La mesure des surfaces planes est un problème très ancien puisque fortement lié aux activités sociales (mesures agraires en particulier), et depuis le début de l'école obligatoire son enseignement fait partie des programmes de l'école élémentaire. Cependant les notions mathématiques à enseigner à ce propos n'ont pas toujours été les mêmes.

L'objet de cet article

J'exposerai rapidement les grandes lignes de notre ingéniérie didactique, mais ce n'est pas cette partie que je développerai ici : on peut la trouver dans diverses publications, notamment dans Petit x n° 6 et 8 (Douady et Perrin-Glorian, 1983, 1984-85, 1987, 1989). De plus, le détail des observations dans l'une des classes paraîtra ultérieurement.

Mon projet est ici d'aborder l'analyse de la transposition didactique de la notion d'aire de surface plane. Pour cela, nous nous interrogerons sur le contenu mathématique visé, sur les manières de l'enseigner, nous donnerons les grandes lignes des programmes de l'école élémentaire et de la classe de 6ème sur le sujet depuis la fin du siècle dernier et évoquerons rapidement les approches de manuels utilisés au cours des trente dernières années. Nous verrons que la signification des termes employés, surface, aire, a évolué en même temps que l'objectif même de l'enseignement de la mesure des aires.

I. Transposition didactique de la notion d'aire

Yves Chevallard a défini la transposition didactique comme “le "travail" qui d'un objet de savoir à enseigner fait un objet d'enseignement”, (Chevallard 1985 p. 39) mais il précise aussitôt que “l'étude scientifique du processus de transposition didactique suppose la prise en compte de la transposition didactique” au sens large “représentée par le schéma —> objet de savoir —> objet à enseigner —> objet d'enseignement”. En ce qui concerne la notion d'aire de surface plane, nous nous intéressons surtout à la dernière flèche, même si pour éclairer ce travail, nous sommes amenés à faire quelques incursions sur celles qui sont en amont, et, pour l'étude de cette dernière flèche, l'analyse porte principalement sur une période assez récente (depuis 1960).

La mesure des surfaces est un problème qui sur le plan pratique s'est posé à l'homme de tout temps ; sur le plan théorique, c'est un problème très ancien également (voir par exemple les travaux d'Archimède sur l'aire du segment de parabole). Les objets de savoir à ce propos ont évolué au cours du temps, surtout dans une période relativement récente avec l'apparition de la théorie de la mesure depuis Jordan, Riemann, Banach, Lebesgue... Avec la notion d'aire, nous sommes dans le cas assez rare où l'objet à enseigner a existé avant même que l'objet de savoir soit bien reconnu et identifié : on admettait implicitement l'existence d'une mesure et le problème était de calculer les mesures de surfaces données. La question de l'existence d'une mesure et de son ensemble de définition n'a été posée et résolue qu'assez récemment (Hausdorff 1914, Banach 1923, 1924). Elle ne pouvait d'ailleurs l'être avant qu'on ne dispose d'une bonne définition des nombres réels, c'est à dire avant Dedekind.

1. Le problème mathématique

a) propriétés de la mesure

Par surface, nous entendons ici une partie du plan, même si nous sommes amenés par la suite à faire référence à d'autres usages de ce terme. *Le problème qui nous intéresse est la comparaison de la place occupée par des surfaces dans le plan et, pour faciliter cette comparaison, celui d'associer à une surface un nombre qui rende compte de la place qu'elle occupe de manière à remplacer la comparaison des surfaces par celle des nombres.*

Le problème mathématique est donc celui de la définition d'une fonction mesure μ de l'ensemble des surfaces planes dans R^+ (auquel on ajoute éventuellement une valeur infinie si on ne se limite pas aux surfaces bornées) ***qui vérifie "de bonnes propriétés" d'additivité et d'invariance par déplacement.***

En fait, μ ne sera pas définie partout mais sur un certain ensemble de surfaces, l'ensemble des surfaces mesurables pour μ, et cet ensemble de surfaces mesurables va dépendre des exigences qu'on met sur la fonction mesure. On peut trouver une approche du problème théorique de la mesure des aires dans Revuz (1959).

Si on demande que μ vérifie les propriétés suivantes :

- si S_1 et S_2 sont disjointes, alors $\mu(S_1 \cup S_2) = \mu(S_1) + \mu(S_2)$
- $\mu(S) \geq 0$ pour tout S
- μ est invariante par isométrie : pour toute isométrie g, et toute surface S, $\mu(g(S)) = \mu(S)$,

il est clair que μ ne peut être définie qu'à un coefficient de proportionnalité près : si μ convient, pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda\mu$ convient aussi. On peut montrer que, pour tout polygone convexe A, il existe une et une seule application μ définie sur l'ensemble des polygones et vérifiant les propriétés ci-dessus et telle que $\mu(A) = 1$. D'ailleurs μ est définie de manière unique sur un ensemble plus grand de surfaces qui ne dépend pas du choix de A, c'est l'ensemble des surfaces quarrables. On prend le plus souvent pour A un carré.

En fait, Banach a montré, en utilisant l'axiome du choix, qu'une telle application peut se prolonger à l'ensemble de toutes les parties du plan (Banach 1923) mais alors on perd l'unicité qui n'est garantie que sur l'ensemble des parties quarrables. Cette propriété est particulière aux dimensions 1 et 2 : en dimension 3, Hausdorff (1914) a prouvé qu'une mesure vérifiant les propriétés ci-dessus ne pouvait être définie partout. Banach et Tarski (1924) ont prolongé son travail et montré qu'on peut trouver 2 boules de rayons différents et une partition finie de chacune d'elles en n parties $B = UA_i$ $B' = UA'_i$ avec pour tout i, A_i et A'_i isométriques.

Ces résultats ont un grand intérêt théorique mais ils sont assez loin de nos préoccupations. Ce qui nous importe plutôt, c'est *l'existence et l'unicité de la fonction mesure sur les parties quarrables.*

b) différentes constructions de l'application mesure

Soit C un carré, on pose $\mu(C) = 1$. On peut définir μ de plusieurs manières. La question qui se pose est de savoir si, quelle que soit la méthode de construction de μ, on va obtenir la même application, définie sur le même ensemble de surfaces. Cette question n'est pas évidente et pose des problèmes théoriques différents suivant la manière dont on la construit. On va se contenter de l'existence et de l'unicité sur les parties quarrables.

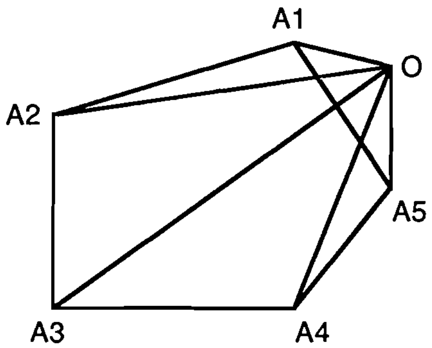
* **Une première manière de définir** μ est de considérer dans le plan un réseau de maille C, et des subdivisions de ce réseau par partage des côtés suivant les puissances de 10 : C_i est le carré obtenu en partageant les côtés de C en 10^i. Si on prend une surface plane S, on peut compter le nombre n_i de carrés C_i qui sont contenus dans S et le nombre N_i de carrés C_i qui contiennent un point de S. L'aire de S est définie si $\frac{N_i - n_i}{100^i}$ tend vers 0 quand i tend vers l'infini. La limite commune de $\frac{N_i}{100^i}$ et $\frac{n_i}{100^i}$ est alors l'aire de S.

On montre que les rectangles ayant des côtés parallèles aux axes ont une aire, que tout polygone convexe a une aire et qu'une réunion de polygones convexes disjoints a pour aire la somme des aires.

Mais dans cette présentation, il reste à démontrer l'invariance par isométrie et c'est une question qui n'est pas triviale (voir Lebesgue 1975 p. 41-44). On en déduit que l'aire ainsi définie ne dépend pas de la position dans le plan du carré choisi mais seulement de sa taille. On peut d'ailleurs calculer l'influence de la taille du carré : si on remplace le carré C par un carré C' dont le côté est k fois celui de C, la nouvelle aire est l'ancienne divisée par k^2, ou encore si on applique à une surface une homothétie de rapport k, son aire est multipliée par k^2. Il reste à voir que les aires ainsi définies sont les seules à répondre au problème (à un coefficient multiplicatif près) : si on suppose qu'il existe une application définie sur une famille de surfaces planes contenant les polygones à valeurs dans $\mathbf{R}^+$ invariante par translation et additive (l'aire de la réunion de surfaces disjointes est la somme des aires), alors cette application est entièrement déterminée par la donnée de l'aire d'un carré et on obtient l'aire définie précédemment.

* Lebesgue examine **une autre manière d'aborder le problème** en définissant directement les aires des polygones convexes : soit un point O du plan et un polygone convexe $A_1 A_2 ..... A_n$, on va définir l'aire du polygone par la quantité

$1/2\,(\pm A_1A_2 \times \mathrm{dist}(O, A_1A_2) \pm \ldots\ldots\ldots \pm A_nA_1 \times \mathrm{dist}(O, A_nA_1))$
avec le signe + devant A_iA_{i+1} si O est du même côté que le polygone par rapport à la droite A_iA_{i+1}, le signe - dans le cas contraire. Remarquons que cela reste vrai pour un polygone quelconque, la position du polygone par rapport à la droite étant alors considérée au voisinage du segment $[A_i, A_{i+1}]$.



Cette fois, le point crucial est de montrer que cette quantité ne dépend pas du choix du point O, ce qui permet de définir ainsi l'aire du polygone, et ensuite d'autres surfaces éventuellement non polygonales par additivité, encadrements et limite. L'aire définie de cette manière vérifie les propriétés demandées.

* **Un autre exposé classique** consiste à se servir de l'invariance par déplacement et de l'additivité pour définir l'aire. On part d'un carré C qui a pour aire 1 ; tous les carrés superposables à C ont aussi pour aire 1. On montre alors en se servant de l'additivité que l'aire d'un rectangle peut être obtenue par le produit des dimensions, on établit les formules permettant de calculer l'aire d'un triangle et de diverses surfaces usuelles. L'aire d'un polygone est obtenue en décomposant le polygone en somme de triangles.

Le problème central est alors de montrer que le nombre obtenu ne dépend pas de la décomposition choisie. C'est l'exposé d'Hadamard (1928) dans l'annexe de la dixième édition de ses leçons de géométrie élémentaire plane : il montre que l'aire d'un triangle ABC ne dépend pas du choix du côté pris pour base et qu'elle est égale à ± aire de ABO ± aire de ACO ± aire de BCO (le signe est + si O est du même côté que le triangle par rapport au côté considéré, - dans le cas contraire). Il étend ensuite ce résultat au cas des polygones. La deuxième présentation de Lebesgue s'appuie sur cette méthode, directement pour les polygones.

Si on ne montre pas que l'aire est indépendante de la décomposition, il faut admettre l'existence de l'aire et son unicité. Ainsi il n'est pas évident qu'en partageant un polygone en un nombre fini de morceaux polygonaux, on ne puisse pas réarranger les morceaux de façon à obtenir un polygone strictement inclus dans le polygone de départ et d'aire plus petite. On peut montrer géométriquement qu'un polygone est équivalent (par découpage et recollement de morceaux disjoints) à un rectangle dont un côté est un segment donné. Le problème revient alors à voir que deux tels rectangles ne peuvent être équivalents si leurs autres côtés sont inégaux. Or on ne sait pas montrer cela sans recourir aux nombres (voir Lebesgue 1975 p. 53-56).

c) aire : nombre ou grandeur ?

Dans toutes ces présentations l'aire est un nombre ou, dans les écrits plus récents (Revuz 1974) l'application mesure elle-même. Ainsi définie, l'aire dépend du choix de l'unité. On peut cependant, d'un point de vue mathématique, donner un autre sens au mot aire, indépendant de l'unité : si on a choisi une surface unité A et défini l'application μ_A correspondante, on peut définir une relation d'équivalence $\mathcal{R}_A$ par $S\mathcal{R}_A S'$ si et seulement si $\mu_A(S) = \mu_A(S')$. Les classes d'équivalence obtenues ne dépendent pas du choix de A. On peut alors appeler aire β de B la classe d'équivalence de B pour n'importe laquelle des relations $\mathcal{R}_A$ et définir la mesure de l'aire β comme la mesure de n'importe laquelle des surfaces de β. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S} \arrow[rr, "\mu_A"] \arrow[dr, "\chi"'] & & \mathbf{R}^+ \\ & \mathcal{A} \arrow[ur, "m_A"'] & \end{tikzcd}$$

pour B dans $\mathcal{S}$

$\chi(B) = \beta$

$m_A(\beta) = \mu_A(B)$

Ainsi *on peut donner un fondement mathématique à la notion d'aire en tant que grandeur*, même s'il faut définir au préalable la mesure pour lui donner ce fondement.

On pourrait envisager d'avoir un accès direct aux classes d'équivalence sans passer par l'intermédiaire de la mesure en définissant la relation d'équivalence sur les surfaces elles-mêmes. Cela se fait très bien pour les longueurs, en disant que deux segments sont dans la même classe s'ils sont superposables, c'est-à-dire, s'il existe une isométrie qui envoie l'un sur l'autre (cf "Grandeur Mesure" - Mots VI - brochure APMEP). Mais pour les aires, la situation est plus complexe : les surfaces qui ont même mesure ne sont pas nécessairement superposables. On peut avoir recours au "découpage et recollement" et dire que deux surfaces ont même aire si on a une partition de chacune d'elles en n morceaux deux à deux superposables. Cela suffit dans le cas des polygones : si deux polygones ont même mesure, on peut toujours ramener l'un à l'autre de cette façon, mais comment faire pour un disque et un carré ? La situation est encore plus complexe pour le volume puisque dans ce cas, le "découpage et recollement" n'est même pas toujours possible dans le cas des polyèdres : Dehn a montré que deux polyèdres de même volume peuvent ne pas être transformables l'un en l'autre par équivalence finie (Lebesgue, *La mesure des grandeurs* p.64). On pourrait aussi considérer l'aire comme une grandeur produit et la définir à partir de la longueur (cf "Grandeur Mesure" - Mots VI - brochure APMEP), mais ce point de vue ne nous permet de comparer directement que des rectangles et nous renvoie à la mesure.

Du point de vue mathématique, ce qui est intéressant, c'est l'application entre surfaces et nombres (μ_A) : les comparaisons de surfaces se ramènent à des comparaisons de nombres, les juxtapositions de surfaces à des additions de nombres et, comme le dit Lebesgue (1975 p. 56) *"l'emploi du mot mesure dans la dénomination* *"mesure des aires" a la même signification que pour la "mesure des longueurs" : il rappelle qu'on doit avoir choisi une unité pour parler de l'aire ou de la longueur, lesquelles sont des nombres. Ce sont ces nombres qui, seuls, servent en mathématiques ; libre à chacun de surajouter à ces notions mathématiques des notions métaphysiques mais celles-ci ne doivent pas intervenir dans l'enseignement."* (Rappelons qu'il s'agit là d'enseignement dans les classes terminales du secondaire).

Il est vrai que la considération des classes d'équivalence n'a qu'un intérêt théorique limité et assez peu d'intérêt pratique : il est assez rare que l'équivalence des surfaces soit une donnée, on l'obtient généralement en passant par les nombres. Dans ces conditions, la considération de $\mathcal{A}$ et des autres flèches peut apparaître comme un détour inutile. Nous verrons que ce point de vue a été celui de l'enseignement dans les années 65 - 80 : au moment où on a essayé d'adopter une démarche cohérente dans l'enseignement de la mesure, on s'est centré exclusivement sur l'application entre surfaces et nombres, en privilégiant l'utilisation du quadrillage et de ses subdivisions qui permet d'aborder la mesure des surfaces au niveau élémentaire de la façon la plus générale possible.

Cependant, *dans la vie courante, le mot longueur a plutôt le sens de grandeur* : la longueur ne dépend pas de l'unité choisie pour la mesurer. Même quand on parle de mesure, c'est le plus souvent de la grandeur qu'il s'agit puisque la mesure est alors un nombre suivi d'une unité. Ce n'est que quand le contexte est tout à fait clair que l'on laisse tomber le nom de l'unité, dans un contexte professionnel par exemple l'unité de référence est sous-entendue parce que bien connue ou inutile, les nombres donnant le classement nécessaire et le contexte l'ordre de grandeur : quand on parle d'un clou de 110 ou d'un planche de 23, on sait bien qu'il s'agit de mm.

Pour l'aire c'est moins clair, le terme surface, le plus couramment employé, *désigne soit la surface avec sa forme, soit la grandeur et il est rare que ce soit uniquement de l'aire qu'on ait besoin,* que la forme n'intervienne pas du tout, qu'il s'agisse de poser de la moquette ou de négocier des terres agricoles où on évalue le prix à l'hectare mais où on tient aussi compte de bien d'autres facteurs, y compris la forme : un champ très allongé ou de forme très irrégulière n'aura pas la même valeur qu'un carré de même aire !

La question se pose de savoir ce qu'on entend par grandeur. Ce mot est utilisé dans les programmes à certaines époques, soigneusement évité à d'autres. Il met mal à l'aise le mathématicien parce qu'on ne peut le définir convenablement. Dans la brochure "Grandeur, mesure" de l'APMEP les auteurs font un effort de définition. Ils traitent entièrement le cas de la longueur, définissent les opérations et comparaisons sur les longueurs à partir de celles sur les segments sans recourir à la mesure, et appellent grandeurs mesurables celles pour lesquelles on peut procéder de la même façon :

- définir une relation d'équivalence sur les objets
- définir sur le quotient une relation d'ordre total
- définir sur le quotient une opération interne : l'addition
- définir sur le quotient une opération externe : la multiplication par un réel positif.

Ils remarquent eux-mêmes que définir la somme ou même l'égalité de grandeurs ne va pas de soi et pose des problèmes d'ordre technique ou théorique. Nous avons signalé plus haut que dans le cas des surfaces planes, on ne peut en fait définir la grandeur aire que par l'intermédiaire de la mesure sous peine d'en avoir une définition très restrictive.

Pour notre propos, nous utilisons ce terme de "grandeur" dans un sens très naïf que nous ne chercherons pas à définir. L'important est d'avoir une notion indépendante à la fois de la forme et de quelque unité de mesure que ce soit. Il nous suffit de savoir que l'aire peut être définie comme une classe d'équivalence à partir d'une fonction mesure. *Nous ne définissons pas l'aire mais seulement l'expression "avoir même aire" à partir du découpage et recollement ou de la mesure. C'est cet aspect que nous appelons l'aire en tant que grandeur. Un nombre suivi d'une unité est un moyen de désigner une aire.*

2. Les objets d'enseignement, les termes employés

A cause de son importance sociale, la mesure des surfaces a toujours fait partie des programmes depuis la naissance de l'école élémentaire obligatoire. Mais les objets d'enseignement à propos de la mesure ont évolué au cours du temps. Actuellement, on peut en distinguer principalement trois :

- *les unités usuelles* de mesure, le système métrique, les unités agraires...
- *les instruments de mesure.* Cet objet est inexistant à propos des surfaces : on mesure des longueurs mais on calcule les mesures de surface ; on peut le remplacer par les procédés de calcul, à partir des pavages jusqu'aux formules.
- *la mesure au sens mathématique moderne d'application,* dont l'apparition est récente dans les programmes : à partir de 1969 en 6ème et de 1970 à l'école élémentaire.

Jusqu'à une époque très récente, ce qui est à mesurer est supposé transparent dans l'enseignement : on mesure des surfaces, sans préciser si la surface est une partie du plan ou une figure géométrique à déplacement près. Ce n'est qu'*à partir de 1980* que l'on voit apparaître dans les programmes de l'école élémentaire un objet d'enseignement nouveau : la grandeur à mesurer désignée par le terme "aire", considérée comme invariant d'une classe de surfaces. *On distingue l'aire à la fois de la surface et du nombre qui la mesure*. Nous avons vu que cet objet d'enseignement n'existe en fait pas dans le savoir mathématique où, par le choix d'une surface unité, on établit une correspondance entre surfaces et nombres : l'invariant des surfaces d'une même classe est le nombre. Cet objet d'enseignement est plutôt emprunté aux traditions de l'enseignement de la physique.

Remarquons que dans les programmes précédents, le même mot "aire" avait une signification différente. Le vocabulaire utilisé dans l'enseignement pose donc problème.

Dans le langage courant, on dispose de trois termes plus ou moins équivalents : surface, aire, superficie. Ainsi le Petit Robert (édition de 1977) définit-il

surface 1. (courant) partie extérieure d'un corps qui le limite en tous sens ; face apparente visible – aire, superficie... 2. (géométrie) figure géométrique à deux dimensions de l'espace qui peut être considérée...3. (physique) limite entre deux milieux différents.

superficie (didactique) surface d'un corps considérée surtout dans son étendue et dans son caractère extérieur – nombre caractérisant l'étendue d'une surface

aire 1. toute surface plane...espace plat où nichent les oiseaux de proie... 2. (géométrie) portion limitée de surface, nombre qui la mesure... 3. région plus ou moins étendue occupée par certains êtres, lieu de certaines activités...

Ces trois termes ont été utilisés dans l'enseignement des mathématiques avec des sens voisins et pas toujours précisés ; le mot "aire" est d'introduction récente dans l'enseignement à un niveau élémentaire, mais nous verrons que son usage n'est pas encore vraiment fixé : on le trouve avec des sens différents dans les programmes et les manuels des dix dernières années.

3. Etude des programmes de l'école élémentaire et du collège

a) *avant 1945*

La caractéristique de l'enseignement de la mesure dans **les programmes de l'école élémentaire de 1887 et de 1923** est son ***caractère pratique.*** En particulier, on fait une place à l'estimation de mesures sans avoir recours à la mesure. On insiste sur l'usage social de la mesure, sur l'utilisation du système métrique et sur la pratique de mesures par les élèves. En 1887, on commençait l'apprentissage du système métrique en classe enfantine ; à partir de 1923, on attend le cours élémentaire.

Le calcul de surfaces n'apparait explicitement qu'en 1923, mais là encore on insiste sur le caractère pratique et social de cet enseignement. Dans les commentaires de 1923, on précise que par géométrie *"il faut entendre la forme des champs, les mesures sur le terrain. Il s'agit d'opérations réellement exécutées avec un ruban gradué, avec une règle graduée, accessibles en pratique à de jeunes enfants.... On opérera dans la cour, dans la salle de classe, parfois sur le pupitre."*

L'enseignement des mesures est fortement rattaché à celui de la numération décimale. En 1923, on renforce cette liaison entre numération et système métrique : on distingue les systèmes de mesures légales à base dix, cent, mille. On commence par les grandeurs que l'on mesure avec des unités effectives dans un système à base 10 : longueurs ou masses ; *"les surfaces, on ne les mesure pas effectivement, on les calcule, en appliquant des formules. On les exprime en se plaçant dans un système de numération à base cent. Les volumes ensuite, on ne les mesure pas non plus ; on les calcule, on les exprime en se plaçant dans un système de numération à base mille."* Ainsi les mesures sont vraiment liées à la pratique puisqu'on refuse le terme de "mesure" dans le cas des aires ou des volumes en lui préférant celui de "calcul".

Dans le même ordre d'idées, on étudiera les nombres décimaux puis les fractions décimales avant d'étudier les fractions ordinaires, alors qu'on adoptait l'ordre inverse dans les programmes de 1887. On pense ainsi aplanir les difficultés ; les commentaires de 1923 précisent même *"rien, logiquement, ne distingue les nombres décimaux des nombres entiers"*. Les opérations sur les fractions décimales peuvent être faites facilement en se ramenant aux entiers, on les étend aux fractions ordinaires et on prévoit que *"les élèves seront moins surpris, mieux préparés"*. Les auteurs de ces programmes semblent supposer que les élèves comprendront les fractions décimales en restant dans la logique des entiers, et que cette compréhension s'étendra naturellement aux fractions ordinaires.

En ce qui concerne l'enseignement secondaire, les mesures et en particulier les aires figurent suivant les époques au programme de différentes classes de la 6ème à la 3ème. Dans les **programmes de 1925 et 1926** (l'horaire de mathématiques est alors de 2 h), la mesure apparaît ***en 5ème*** sous la forme de ***l'étude du système métrique*** (longueurs, aires, volumes, poids, densités, monnaies, temps, vitesses) en précisant qu'on se bornera à des applications aux aires et aux volumes les plus simples. Les commentaires précisent : "*Les mesures directes qui font appel au maniement des unités de grandeur correspondantes, ne présentent pas de difficulté de principe. Il n'en est pas de même des mesures indirectes, celles qui concernent les surfaces et les volumes, par exemple. On peut cependant, en admettant le minimum de propriétés géométriques, montrer comment le déplacement d'un rectangle donné permet de recouvrir de proche en proche, tout rectangle dont les dimensions sont des multiples des dimensions du premier. La mesure de l'aire de tout rectangle dont les dimensions sont commensurables avec le carré unité en résulte de suite. Une observation analogue peut être faite à propos du volume du parallélépipède rectangle. Des tentatives de démonstration paraissent inutiles pour des surfaces et des volumes plus compliqués ; elles font appel le plus souvent à des propriétés géométriques ou à des considérations de limites hors de portée pour les élèves. Il y a là un exemple d'anticipations qu'il vaut mieux restreindre : il semble préférable de se borner à l'indication des formules les plus simples, en vue des applications numériques. On ne saurait trop entraîner les élèves aux changements d'unité qui offrent un intérêt pratique.*

Pour les justifications, il faudra attendre les classes de 3ème et de 2nde où les aires réapparaissent :

3ème : Mesure des aires du rectangle, du parallélogramme, du triangle, du trapèze, des polygones, du cercle. Rapport des aires de deux triangles semblables.

2nde : Mesure des aires du rectangle, du parallélogramme, du triangle, du trapèze, d'un polygone quelconque. Rapport des aires de deux polygones semblables. Aire d'un polygone régulier convexe. Aire d'un cercle, d'un secteur, d'un segment de cercle. Rapport des aires de deux cercles.

On continue en 1ère avec les aires latérales de solides.

Dans **les programmes de 1937 - 1938** (arrêté du 30-8-1937 pour les programmes et du 30-9-1938 pour les commentaires), l'horaire de mathématiques est de 2 heures en 6ème et 5ème et de 3 heures en 4ème et 3ème. L'étude des mesures commence maintenant en 6ème et se poursuit en 5ème.

6ème : *Mesure des aires* : aire du rectangle, du carré, du triangle rectangle, du trapèze rectangle ; recherche de l'aire d'un polygone quelconque par décomposition en trapèzes rectangles et en triangles rectangles, formule de l'aire du cercle.

5ème : *système métrique* : longueurs, aires volumes, poids, densités, monnaies, temps, vitesses. Exercices simples de changements d'unités.

Les aires planes sont reprises en 2nde, les aires latérales de solides en 1ère.

Le paragraphe concernant les aires en 6ème sera repris tel quel dans tous les programmes de 6ème jusqu'en 1970 (sauf pendant la guerre). Le paragraphe qui concerne la classe de 5ème est la reprise du paragraphe des programmes de 1923.

Les commentaires montrent que ***l'enseignement des mesures reste très pratique***. Nous reproduisons ci-dessous le paragraphe "Aires et surfaces"

- *Multiples et sous-multiples décimaux usuels du* mètre carré *et de* l'are. *Changement d'unités.*
- *Pavage d'un* rectangle *avec des carrés de 1mm, ou de 1 cm ou de 1 m de côté. Calcul de l'aire à l'aide des mesures décimales des côtés.*
- Aire d'un carré et carré d'un nombre *Usage d'une table des carrés des nombres entiers de 10 à 100 pour la recherche d'une* racine carrée *(avec deux chiffres exacts).*
- *Calcul de l'aire d'un* triangle rectangle *et d'un* trapèze rectangle. *Calcul de l'aire d'un* polygone *(sur le dessin ou sur le terrain) décomposé en trapèzes rectangles. Application à un* triangle *et à un* trapèze non rectangle. *Aire d'un* cercle.

Par ailleurs l'étude des nombres se fonde sur celle des mesures : *"l'étude du calcul doit se faire* en liaison *avec celle de la mesure des grandeurs – longueurs, aires, volumes, poids (ou masses), monnaies – toutes évaluées dans le système décimal"*.

L'application de ces programmes sera suspendue pendant la guerre. Les **programmes de 1942** ne prévoient dans les sections classiques qu'une heure de mathématiques en 6ème, 1 heure et demie en 5ème, 2 heures en 4ème et 3ème (deux heures dans toutes les classes pour les sections modernes). Les aires ne sont étudiées qu'en 3ème où l'on reprend pratiquement l'ancien programme de 5ème :

Aire du rectangle, du triangle rectangle, du parallélogramme, du triangle, du trapèze, d'un polygone régulier , aire du secteur circulaire.

b) *de 1945 à 1969*

Dans **les programmes de l'école élémentaire du 17-10-1945 et les instructions du 7-12-1945**, on voit d'une part se renforcer le souci utilitaire, ce qui mène à privilégier plus encore les décimaux et à réduire considérablement la place des fractions ordinaires : *"Calculer vite et bien reste son objectif principal. Ce but utilitaire explique la place de choix donnée à l'étude des nombres entiers et des nombres décimaux – qui suffisent aux problèmes de la pratique courante – et la place réduite laissée aux fractions ordinaires. L'apprentissage du calcul numérique prend appui sur les faits de la vie réelle"*. Au cours élémentaire on se limite aux unités du système métrique qui sont pratiquement utilisées. Dans les instructions pour le cours moyen on lit : *"Les mots de "vie courante" employés dans le programme marquent la volonté d'une relation étroite entre les mathématiques de l'école et les nécessités de la vie. Des problèmes de la vie courante sont des problèmes vraisemblables, dont l'élève a vu ou verra des exemples autour de lui. Avant de faire traiter un exercice dans la classe ou de le donner en devoir écrit, le maître se demandera si cet exercice peut se présenter raisonnablement dans la pratique."* Par exemple pour poser un problème de mesure, on se préoccupe de l'instrument qui serait utilisé pour la mesure dans la pratique. ***Au cours élémentaire on doit toujours utiliser des "nombres concrets" ; les "nombres abstraits" seront réservés au cours moyen, uniquement dans le cas des pourcentages et des fractions.***

D'autre part, on voit apparaître le début d'un souci de distinction entre des concepts confondus auparavant : ***cette distinction entre nombres concrets et abstraits peut apparaître comme un souci théorique de distinction entre nombres et grandeurs.*** Les nombres concrets sont des nombres suivis d'un nom d'objet ou d'une unité et correspondent à des mesures et les nombres abstraits, indépendants de toute unité, sont des rapports de mesures (pourcentages ou fractions). On pourrait dire actuellement que les nombres concrets sont des grandeurs et les nombres abstraits des nombres. Cependant le concept de grandeur n'est pas vraiment dégagé des objets eux-mêmes. Ainsi, à propos de l'addition au cours élémentaire, on peut lire dans les instructions officielles le paragraphe suivant :

"Il paraît évident qu'on doit additionner des grandeurs de même espèce. Le nombre qui mesure la somme est la somme des nombres qui mesurent les grandeurs additionnées.

Cependant cette opération soulève des objections assez graves. Que veut dire "de même espèce" ? Des pommes et des poires ne sont pas de même espèce et pourtant 8 pommes et 7 poires font 15 fruits. Huit litres et six litres sont de même espèce et cependant on n'additionne pas 6 litres de vin et un vase de 8 litres.

En réalité on n'additionne pas des grandeurs, fussent-elles de même espèce : on mélange les pommes et les poires, 8 litres de vin et 6 litres de vin, on récapitule ou on ajoute des dépenses ou des recettes, on place bout à bout des longueurs, on parcourt successivement des chemins, on compte des temps qui se suivent, on allonge, on accroit, on réunit , on assemble...

A toutes ces combinaisons de grandeurs correspond l'addition de leurs mesures".

On voit qu'ici on confond les opérations sur les objets et celles sur les grandeurs : on mélange bien les vins mais on ajoute les capacités, dans le cas des pommes et des poires, c'est un peu moins clair mais on pourrait définir une grandeur discrète "objets" comme on peut définir une grandeur "population" (voir A.P.M.E.P. 1982 p. 78-83). Cette ambiguïté apparaît également dans la manière d'écrire les opérations : on veut rappeler la signification concrète de chaque nombre en mettant l'unité correcte et en respectant l'équation aux dimensions ce qui fait qu'on travaille bien au niveau des grandeurs, mais on ne reconnaît les opérations que sur les nombres. On écrit par exemple

(F par kg)		(kg)			(F par heure)		(heure)	
75	x	5	= 375 francs	ou	25	x	42	= 1050 francs

mais en précisant : "le signe x n'indique que l'opération à faire sur les nombres et non sur les grandeurs"

La notion de grandeur n'apparaissait pas dans les programmes précédents, on se contentait d'enseigner le système légal d'unités et de pratiquer des mesures ; la notion de grandeur était supposée transparente : on faisait comme s'il n'y avait pas de problème sur ce qu'on avait à mesurer.

Les programmes de 1970 vont complètement évacuer le problème des grandeurs : on fixera l'unité et on n'aura plus affaire qu'à des nombres.

Dans les **programmes des lycées et collèges parus entre 1945 et 1947**, les horaires de mathématiques reprennent un volume un peu plus raisonnable (2 heures en 6ème, 2 heures et demie de la 5ème à la 3ème) et on reprend en 6ème le programme de 1937 : le paragraphe concernant les aires est inchangé.

Les **programmes de 1956** n'apportent aucun changement au programme de 6ème. En 1959, les horaires de mathématiques passent officiellement à 3 heures dans toutes les classes de la 6ème à la 3ème.

De 1945 à 1969, l'enseignement sur les mesures constituait l'essentiel du programme de 6ème. Il n'y avait pas à l'époque de physique dans les programmes de cette classe et l'enseignement sur les mesures relevait en fait des deux disciplines. Il s'intéressait aussi bien à la pratique de la mesure qu'aux calculs. Il incluait l'étude des mouvements uniformes et des éléments d'astronomie aussi bien que le repérage sur la terre et les fuseaux horaires qui sont plutôt rattachés maintenant à la géographie.

c) *de 1969 à 1978*

Les programmes du 2 janvier 1970 sont en rupture sur de nombreux points avec les programmes précédents. Si l'on continue à affirmer que l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire doit rester concret, qu'on doit faire manipuler les élèves, il n'est plus question de se limiter à ce qui est utile dans la vie pratique. La circulaire du 2/01/1970 annonce le changement dès la première phrase : *"L'enseignement mathématique à l'école élémentaire veut répondre désormais aux impératifs qui découlent d'une scolarité obligatoire prolongée et de l'évolution contemporaine de la pensée mathématique"*, et précise *"L'ambition d'un tel enseignement n'est donc plus essentiellement de préparer les élèves à la vie active et professionnelle en leur faisant acquérir les techniques de résolution de problèmes catalogués et suggérés par "la vie courante", mais bien de leur assurer une approche correcte et une compréhension réelle des notions mathématiques liées à ces techniques"*.

A propos de la mesure cela se traduit par la distinction de l'usage du mot "mesure" dans le langage courant et de sa signification mathématique qui devra être introduite. *"En mathématique, une mesure d'un objet est un nombre"*. On insiste, comme en 1945, sur le fait que les opérations portent sur les nombres et non sur les objets, on rejette des expressions comme "8 pommes + 7 pommes = 15 pommes" qui mélangent langage courant et langage mathématique. De même, puisque la mesure est un nombre, on s'interdit d'écrire le nom de l'unité à côté du nombre, on le mentionne avant : *"Dans l'expression "la table mesure trois mètres", le mètre est pris pour unité ;*

dans ces conditions, la longueur de la table est le nombre 3". On recommande une présentation du type suivant :

l'unité étant le centimètre	*a pour longueur*
ma règle...........	*32*
mon cartable.....	*40*
ma gomme........	*3*

ou encore

distance sur la carte, unité : cm...........	*5*	*18*	
distance sur le terrain, unité km........	*10*		*32*

On remarque au passage que la longueur est identifiée avec sa mesure, c'est un nombre ; l'aspect grandeur n'apparaît pas du tout. On peut d'ailleurs remarquer qu'il y a une certaine contradiction à ce propos dans les recommandations données. On peut y lire *"On écrira : le centimètre étant l'unité, la longueur de la barre est 17 ou la longueur de la barre en centimètres est 17, ou encore en langage courant, la longueur de la barre est 17 centimètres"* ; on utilise là le mot longueur dans des sens différents : dans les deux premiers cas la longueur est un nombre qui change avec l'unité (on écrira le décimètre étant l'unité, la longueur de la barre est 1,7 et 1,7 ≠ 17) alors que dans l'usage courant la longueur de la barre n'a pas l'habitude de dépendre de l'unité choisie pour la mesurer. La deuxième formulation peut être considérée comme intermédiaire car on peut considérer que 17 est non pas la longueur mais la "longueur en centimètres" et admettre que la "longueur de la barre en décimètres" est différente de la "longueur de la barre en centimètres". Dans cette interprétation, "longueur en centimètres" est un nombre mais "longueur" pourrait être une grandeur.

. ***Par ailleurs, on voit pour la première fois apparaître des mesures avec des unités non légales*** : *"l'unité étant le crayon, la longueur de la règle est 2"*. C'est la notion de mesure (au sens mathématique du terme) qu'il s'agit de construire avant l'utilisation des instruments de mesure usuels.

En ce qui concerne la mesure des surfaces, ***on voit pour la première fois apparaître le mot "aire"*** dans les programmes. L'aire est la mesure de la surface, c'est un nombre : on dit *"l'unité d'aire étant le carreau, l'aire de S est 31"*. Ce nombre dépend de l'unité choisie : après changement d'unité, à propos d'une surface qui avait une aire 28, on lit dans les commentaires du programme : *"la nouvelle aire de A est le nombre (28x4)"*.

On ne trouve comme moyen de mesurer les aires que le comptage de carreaux, et tous les exemples proposés ne font intervenir que des carreaux entiers. Aucun statut n'est donné à "carreau" tout porte à croire qu'il s'agit d'une surface, mais rien ne permet de penser qu'une surface de forme différente pourrait avoir une aire 1.

L'étude du système métrique est mentionnée dans un très petit paragraphe, tout à la fin du chapitre sur les mesures.

Dans **les programmes de 6ème et 5ème du 29 juillet 1968 et les instructions du 28 février 1969**, les mesures figurent encore uniquement au programme de 6ème, mais elles n'y apparaissent plus que comme une partie que l'on peut considérer comme réduite, cette impression est renforcée par le fait que les commentaires font évidemment beaucoup plus de place aux parties nouvelles du programme.

Les aires figurent dans le paragraphe "l'étude d'objets géométriques et physiques donnant lieu à des mesures". La mesure est vue comme une application additive qui associe un nombre à chacun des objets à mesurer. On fait le lien entre la théorie et l'expérience en insistant sur le fait que l'expérience ne fournit jamais qu'un encadrement. Contrairement à l'option prise en primaire à la même époque (programmes de 1970),*"les mots de longueur, d'aire, de volume désignent des grandeurs, et les mesures sont les nombres attachés à ces grandeurs une fois l'unité choisie"*. On peut faire un abus de langage et convenir que ces mots désignent aussi les mesures, ce qui revient à confondre la grandeur et sa mesure tant qu'on ne change pas l'unité. On distingue ainsi trois choses : l'objet, la grandeur et le nombre ; cette distinction amène à introduire le secteur angulaire pour désigner la portion de plan et la distinguer de la grandeur angle. Rien n'est dit concernant l'introduction des aires si ce n'est que les élèves doivent être exercés à l'emploi des formules.

d) *depuis 1978*

Dans **les programmes et commentaires de 1978** (cycle élémentaire) **et surtout de 1980** (cycle moyen), la séparation entre mesure mathématique et pratique se précise : dans les commentaires, on introduit le mot *"mesurage"* pour cette dernière. Au cours élémentaire, on s'intéresse surtout au mesurage, mais le but n'est pas seulement pratique : on pose le problème de la construction de l'instrument de mesure au moins dans le cas de la longueur. Au cours moyen, il apparaît trois objectifs à l'enseignement de la mesure, un objectif théorique de construction de la notion de mesure, un objectif pratique de mesurage, un objectif social de connaissance des unités légales ; on voit apparaître explicitement les 3 objets d'enseignement : le programme précise

- *construire et utiliser des systèmes de mesure pour les grandeurs étudiées*
- *exprimer par un nombre ou par un encadrement le résultat d'un mesurage*
- *utiliser les unités usuelles du système légal.*

Pour la première fois, on utilise le terme de grandeur avec le sens qu'il a en physique et ***on introduit une distinction entre grandeurs mesurables et grandeurs repérables.*** A l'objectif d'utilisation des instruments de mesure, on avait ajouté en 1970 celui de construction de la notion de mesure, on ajoute maintenant celui de construction de la notion de grandeur pour chacune des grandeurs envisagées au programme. Auparavant la grandeur à mesurer était supposée préexister, en tous cas on n'envisageait pas explicitement de la construire. Pour cette construction, on suggère trois types d'activités :

- *des comparaisons et des classements avant tout recours à un instrument de mesure,* ces comparaisons peuvent être directes ou indirectes. Cette activité n'était qu'à peine évoquée en 1970

- *la désignation des différentes mesures et la définition d'un étalon,* arbitraire d'abord, conventionnel ensuite (déjà présente en 1970)
- *l'addition des grandeurs* (n'était auparavant envisagée que sur les mesures).

La distinction est très nette entre objet et mesure, et on voit apparaître un troisième terme différent des deux, correspondant à la grandeur, qui n'est pas défini et qui se réfère à l'idée d'un invariant ou d'une propriété commune qu'il s'agit de mettre en évidence. On définit la notion de grandeur mesurable comme grandeur pour laquelle *"on sait définir sur les objets une opération induisant une addition sur les nombres qui expriment leur mesure".*

En ce qui concerne plus précisément les aires, on voit apparaître pour la première fois le souci de construire le concept d'aire en référence au fait que *"le découpage et le recollage d'une surface en une surface d'une autre forme laissent une grandeur invariante".* Avant 1970 on faisait aussi appel au découpage et recollement mais c'était pour établir des formules. On utilise différents moyens de comparaisons : comparaisons directes (rarement possibles), découpage et recollage, pavage ; on précise qu'on ne se limitera pas à l'utilisation du quadrillage à maille carrée.

Les capacités qui avaient disparu des programmes de 1970 réapparaissent parce qu'elles permettent de faire des mesures directes avec des unités arbitraires (cuillère, verre,...).

Ainsi, si le côté pratique de la mesure, au confluent des activités d'éveil et des mathématiques, est affirmé dès les premières lignes du chapitre des commentaires qui concerne la mesure, les objectifs théoriques sont-ils importants.

L'objectif est plus de construire un concept que de pratiquer des mesures, ce qui apparaît encore dans cette phrase : *"Plus que la connaissance d'un certain nombre de formules permettant de déterminer l'aire ou le volume d'objets particuliers, le maître cherchera à développer chez les élèves la capacité de relier entre elles ces formules ou d'en extraire des informations qui ne soient pas directement perceptibles sur les objets eux-mêmes".*

Les derniers **programmes de l'école élémentaire de 1985**, qui sont dépourvus de commentaires, vont dans le même sens : au cours moyen, on trouve

"Formation des concepts de longueur, d'aire, de volume, de masse, d'angle et de durée ; utilisation des systèmes de mesure : expression, par un nombre ou par un encadrement, du résultat d'un mesurage." à côté de :

"Utilisation des unités du système légal et usuel.

Calcul sur des nombres exprimant des mesures de longueur et de poids.

Utilisation des instruments de mesure : double-décimètre, balance, montre etc...

Détermination du périmètre d'un cercle, de l'aire d'un disque, de l'aire d'un rectangle, de l'aire d'un triangle, du volume d'un pavé

Utilisation d'un formulaire pour calculer l'aire ou le volume d'un objet donné."

Dans les **programmes et instructions des collèges des 17 mars et 29 avril 1977,** les mesures sont réparties sur 6ème et 5ème : longueurs, aires, angles en 6ème, volumes, masses, masses volumiques et durées en 5ème. En 6ème les programmes mentionnent "unités usuelles de longueur, d'aire, d'angle" et "aires du rectangle, du triangle, du trapèze, du disque, du secteur circulaire. Dans les commentaires, on ne précise plus s'il s'agit d'une grandeur ou d'un nombre, on dit seulement qu'à la fin de la première année des collèges, l'élève moyen devra posséder la *"pratique des formules donnant les aires usuelles"* et à la fin de la seconde année la *"pratique des formules donnant les aires et les volumes usuels"*.

Les **programmes du 14 novembre 1985**, applicables en 6ème depuis septembre 1986 étalent l'apprentissage des mesures sur tout le premier cycle : les grandeurs considérées se réduisent à longueurs, aires, volumes et angles, les grandeurs qui ont traditionnellement un statut mathématique. Les masses figurent au programme de physique de 6ème, les masses volumiques ne sont explicitement nulle part, pas plus que les durées sauf implicitement quand on parle de vitesse (5ème, 4ème). ***L'étude des mesures n'est jamais l'objet d'un paragraphe du programme mais on les rencontre à propos de l'étude des transformations ponctuelles ou de l'organisation et de la gestion de données, comme l'occasion d'étudier des fonctions.*** On trouve

- en 6ème comparaison d'aires planes, conservation des distances, des angles et des aires dans la symétrie orthogonale, calcul du périmètre et de l'aire d'un rectangle, du volume d'un parallélépipède rectangle, de la longueur d'un cercle.
- en 5ème, conservation des distances, des angles et des aires dans la symétrie centrale, somme des angles du triangle, aire du triangle, calcul de vitesses moyennes, calcul de l'aire d'un parallélogramme, d'un triangle, du volume d'un prisme droit, de l'aire d'un disque, de l'aire et du volume d'un cylindre de révolution.
- en 4ème, aire et volume de la sphère, mise en œuvre de la proportionnalité sur des grandeurs (vitesse en km/h, débit).
- en 3ème, volume de la pyramide et du cône de révolution, effet d'un agrandissement ou d'une réduction sur longueurs, aires et volumes, masses, mise en œuvre de la proportionnalité sur des grandeurs-quotients ou des grandeurs-produit.

Sous la dernière rubrique on peut en particulier entendre l'effet des agrandissements sur les aires et les volumes.

En 6ème, les commentaires précisent : *Il s'agit de déterminer des aires à l'aide soit de reports, de décompositions, de découpages et de recollements, soit de quadrillages et d'encadrements. Des activités permettront de retenir sous forme d'images mentales le passage du rectangle au triangle rectangle ou au parallélogramme, et de mettre en place des calculs sur les aires à partir de l'aire du rectangle.*

Dans les commentaires de cinquième, les aires apparaissent comme exemples et contrexemples pour l'étude de la proportionnalité. On demande les formules concernant l'aire du triangle et du parallélogramme et l'aire latérale du cylindre de révolution.

4. Etude des manuels

Nous avons vu que ***c'est à partir de 1969 que s'opère un changement de point de vue radical et qu'à côté d'un objectif purement pratique, on va donner à l'enseignement des mesures un objectif théorique.*** Nous avons regardé des manuels de l'école élémentaire et de la classe de 6ème (puisque c'est la seule classe de l'enseignement secondaire où sont enseignées les aires de 1945 à 1985), en commençant un peu avant ce changement de point de vue pour voir l'évolution : nous avons choisi des manuels parus après 1950. L'analyse portera davantage sur la classe de 6ème où on peut penser que les définitions et les choix des auteurs seront plus nettement exprimés qu'à l'école élémentaire.

On constate une évolution des points de vue et un glissement du vocabulaire entre 1960 et 1980. Nous avons vu cette évolution à travers les programmes, mais on la voit plus précisément à travers les manuels qui précèdent parfois les changements de programme.

Avant 1960, le terme de surface est considéré comme assez clair et désigne plutôt une propriété, une qualité de la surface, on peut l'interpréter comme une grandeur physique. Il désigne parfois aussi l'objet géométrique dans des expressions comme "on décompose la surface en figures géométriques simples". Le même terme sert aussi souvent, par abus de langage à désigner la mesure elle-même. La figure (parfois la portion de plan) est un ensemble de points, mais un ensemble de points à isométrie près : deux figures sont égales si elles sont superposables. L'aire est un nombre, mais un nombre spécial, un nombre de m^2 ou de cm^2 ou d'ha... il s'écrit d'une manière particulière (nombre suivi d'une unité) qu'il est nécessaire d'étudier en détail : on étudie "les nombres qui servent à désigner des aires" comme dans un autre chapitre on étudiera les nombres qui servent à désigner des volumes ou encore ceux qui servent à désigner des heures, les fameux "nombres complexes".

Dans les années 60, avant même la parution des nouveaux programmes de 1968-1969, un souci de clarification du vocabulaire et de l'utilisation de l'égalité se fait jour. ***Il faut distinguer l'objet à mesurer de sa mesure.*** Les deux mots existants vont servir à cette distinction : la surface désignera l'objet, ensemble de points du plan, et l'aire désignera la mesure, c'est-à-dire un nombre.

Mais, ***à partir de 1969, un nombre est vraiment un nombre*** : les nombres servant à désigner les aires ne sont pas différents de ceux qui servent à désigner autre chose et 12 n'est pas égal à 1200. ***On choisit d'abord l'unité et on n'a plus affaire qu'à des nombres.*** Dans cette distinction, il n'y a plus de place pour un troisième terme qui serait l'invariant attaché à la surface. On le mentionne éventuellement pour les maîtres en leur précisant qu'on fait un abus de langage en l'identifiant à la mesure, ce qui n'est pas gênant dès lors qu'on a décidé de ne travailler qu'avec des aires exprimées dans la même unité. Pour les élèves, on a un souci de simplicité, on fait le choix de distinguer l'objet mesuré de sa mesure mais on ne veut pas faire intervenir un troisième terme : "*...si nous distinguons nettement l'objet mesuré (segment, secteur angulaire...) de sa mesure, il nous a paru inopportun de distinguer entre longueur, aire, volume d'une part et mesure d'une longueur, d'une aire, d'un volume d'autre part. Par* longueur, aire, volume, *nous entendons un nombre, résultat d'une opération de mesure et qui présuppose le choix d'une unité ; ainsi l'emploi du signe = entre deux longueurs par exemple sera justifié, puisqu'il s'agit de l'égalité de deux nombres.*" (Queysanne Revuz, livre du maître). Il y a en général concordance des points de vue entre longueur et aire : les deux sont des nombres. Les volumes ne sont plus au programme de 6ème.

Ceci pose un problème au moment de la définition de unités. Une bonne partie des manuels consultés parlent quand même d'unité d'aire et beaucoup définissent le m^2 comme une aire ; si on peut considérer "unité d'aire" comme un bloc indécomposable, on est gêné pour le m^2 : si c'est un carré, on risque d'avoir des problèmes pour mesurer des triangles par exemple ; dire que c'est une aire, donc un nombre paraît assez absurde. Certains s'en tirent en ne donnant pas de définition ou en déclarant, comme le Bréard, *"En mathématiques, il n'y a pas d'unité d'aire ; mais les physiciens utilisent des unités d'aire. Pour le physicien ayant choisi une unité de longueur, l'unité d'aire est l'aire de la surface limitée par un carré dont le côté a pour longueur l'unité de longueur"*. Comme on ne dit pas ce qu'est une aire pour le physicien, le problème est le même.

On explicite maintenant le plus souvent le fait que l'aire n'est pas liée à la forme : des surfaces de formes différentes peuvent avoir la même aire, mais cette précision se fait le plus souvent à travers la mesure sur quadrillage ; il est très rare qu'on fasse allusion au découpage recollement pour conserver l'aire mais on l'utilise pour établir les formules usuelles.

A l'école élémentaire, les programmes de 1970 définissent l'aire comme un nombre. C'est le point de vue qu'adoptent presque tous les manuels de cette époque consultés (seul le Eiller considère l'aire comme une grandeur et parle de mesure de l'aire). Cela pose un problème quand on a affaire à plusieurs unités, en particulier quand on considère des affinements successifs d'un quadrillage pour approcher l'aire d'une surface à bords arrondis. On nomme une aire S et on écrit successivement

$16 < S < 32 \qquad 88 < S < 120 \ldots$

Il y a deux manières de s'en tirer en étant cohérent :

- soit admettre que l'aire d'une même surface change quand on change d'unité (ex : Bordas, Delagrave)
- soit se ramener toujours à la même unité (ex : Magnard)

Remarquons que dans les mêmes manuels, on répugne à considérer la longueur comme un nombre. Ceux qui le font sont très minoritaires, on a du mal à admettre que la longueur d'un segment puisse dépendre de l'unité utilisée pour la mesurer. D'ailleurs le Magnard (1972) explicite les correspondances suivantes : surface ...... segment, étendue ...... longueur, aire ...... mesure de longueur.

Dans le même temps, le point de vue pour aborder l'aire change. ***Avant 1965, il s'agit avant tout de mesurer des figures, de préférence des polygones, et de savoir utiliser les unités légales.*** Ce sont d'ailleurs le plus souvent les seules considérées. Il faut noter qu'à la même époque, on mesure un segment avec une unité quelconque alors que pour les aires on se limite aux unités légales. Quand les surfaces à bord courbe (autres que le disque) sont abordées, c'est dans un but pratique. On envisage compensations, pesées (dans le chapitre sur les masses) comptage de carreaux sur une carte à l'échelle. On pense à l'arpentage et à la mesure des champs, les unités agraires sont en bonne place.

Après 1965, et surtout après 1969, on cherche à associer un nombre à n'importe quelle surface. Le point de vue généralement adopté (et indiqué dans les programmes) est celui du quadrillage et de ses raffinements successifs pour montrer qu'on peut encadrer l'aire par des nombres décimaux de plus en plus proches. D'ailleurs les surfaces à bords arrondis (autres que le disque) et les encadrements font leur apparition dans la plupart des manuels alors qu'ils étaient rares auparavant. En ce qui concerne les formules, le calcul de l'aire du rectangle n'est plus toujours justifié, on ne mentionne plus les différentes possibilités du choix de la base pour le calcul de l'aire du triangle et du parallélogramme, pour le disque, on donne la formule sans se référer aux polygones réguliers : quand il y a une motivation en exercice, c'est par encadrements sur quadrillage. ***On admet sans le dire l'existence de l'aire et donc l'unicité du nombre associé à chaque surface, une fois l'unité choisie.*** L'invariance par déplacement est également admise implicitement, elle peut permettre d'améliorer un encadrement (cf R. Polle). Il arrive même que la finesse d'un encadrement soit non seulement outil, mais lui-même objet d'enseignement (cf Galion, ces définitions sont encadrées, comme ce qui est à retenir de la leçon). Le point de vue du comptage de carreaux sur quadrillage est cohérent avec la volonté de voir la mesure comme une application à valeurs dans $\mathbf{R}^+$. Nous avons d'ailleurs vu dans l'approche mathématique que c'est le point de vue le plus économique pour définir l'application mesure.

En 1977, la définition de "surface" comme ensemble de points du plan s'est généralisée ; même si quelques manuels continuent à ne pas définir ce terme, ils l'emploient dans ce sens. Pour l'aire, les avis sont partagés : 9 manuels sur 15 lui conservent le sens de nombre, dont un fait aussi apparaître la grandeur sous le nom de superficie ou étendue, 6 manuels utilisent le terme aire avec le sens de grandeur, en le définissant comme une propriété de la surface, ou en ne le définissant pas mais en disant que deux surfaces équivalentes ont même aire. Le point de vue souvent adopté est de considérer l'aire comme une classe d'équivalence de surfaces ; c'est la définition donnée aux professeurs (par exemple livre du maître pour la collection R. Polle) mais non aux élèves. D'ailleurs pour la longueur, la définition comme classe d'équivalence de segments est parfois donnée aux élèves (Mauguin, Louquet, Magnard). D'autres comme R. Polle la sous-entendent fortement : *"des segments correspondant au même réglage de compas sont des représentants d'une même longueur"*, on construit *"un segment représentant une longueur"*. La relation d'équivalence peut, dans le cas de la longueur, s'exprimer de façon purement géométrique mais ce n'est pas le cas pour l'aire.

Ainsi 7 manuels sur 15 prennent en compte le point de vue grandeur. Ils distinguent ainsi 3 pôles : objet géométrique, grandeur (physique) et nombre. Le nombre est alors la mesure de la surface ou la mesure de l'aire.

Le point de vue grandeur est encore plus net à propos de la longueur : 6 manuels seulement définissent la longueur comme un nombre. Outre le Magnard qui fait correspondre superficie à longueur, deux manuels ne sont pas cohérents entre longueur et aire, le Louquet qui définit la longueur de [AB] comme l'ensemble des segments superposables à [AB] et le Bordas qui définit la longueur comme une propriété commune à un ensemble de segments alors qu'ils définissent tous deux l'aire comme un nombre.

L'aire est souvent abordée à partir du quadrillage qui est presque toujours présent. On retrouve le problème signalé précédemment à propos des unités dans les manuels qui définissent l'aire comme un nombre et parlent d'unité d'aire (Queysanne Revuz, Monge, Bordas, Hachette, Boutin-Novelli, Louquet), les deux derniers définissent l'unité comme un carré, les autres comme une aire. On donne souvent des exemples de surfaces ayant la même aire sans être superposables, mais c'est souvent à partir du quadrillage et rarement en se servant de découpage et recollement. L'addition des aires est abordée dans la majorité des manuels, ainsi que l'encadrement de surfaces à bords arrondis. La formule dans le cas du rectangle n'est pas toujours justifiée, mais la question est parfois posée et certains manuels annoncent qu'elle est valable dans tous les cas. Un manuel (celui de l'IREM de Strasbourg) regarde ce que devient l'aire d'un rectangle quand on multiplie une dimension par un nombre, les deux dimensions par deux nombres différents, les deux dimensions par le même nombre. Le fait qu'il y ait plusieurs bases possibles pour le calcul de l'aire d'un triangle ou d'un parallélogramme est rarement mentionné, quelquefois c'est utilisé en exercices.

A partir de 1981 et surtout de 1986, la distinction entre objet et mesure est unanime : la surface est un ensemble de points du plan, la mesure de la surface (ou de l'aire) est un nombre, mais on voit réapparaître le troisième terme : l'aire prend plutôt le statut de grandeur, mais les positions sont loin d'être claires à ce sujet. Pour certains, la référence implicite est nettement celle de la grandeur physique : on utilise l'expression "avoir même aire" en référence à la mesure ou au découpage et recollement. On n'a plus le même souci de définir que dans les années 70, il s'agit de donner du sens à la notion même si on ne peut pas en donner de définition. Pour d'autres, l'aire reste un nombre, mais on retrouve le nombre avec l'unité, c'est à dire en fait la grandeur physique. Il semble que cette définition de l'aire comme nombre soit plutôt un moyen de traduire l'indépendance par rapport à la forme, et par là la différence entre aire et surface. Les définitions ne viennent d'ailleurs souvent que pour préciser des distinctions : "ne confonds pas la surface qui est une partie du plan et l'aire qui est un nombre", " la mesure de la surface avec l'unité u est 10, on dit que l'aire de la surface est 10u".

On voit dans ces manuels une évolution par rapport aux précédents : on prend un point de vue "naïf" et on ne cherche pas à définir les termes "longueur", "surface", "aire". On semble arrivé à un consensus : la surface est un ensemble de points comme le segment, longueur et aire sont des grandeurs, deux segments (resp. surfaces) superposables ont même longueur (resp. même aire), la mesure de la longueur, de l'aire sont des nombres.

Par ailleurs, l'approche sur quadrillage n'est plus la seule envisagée. Dans 3 des manuels sur les 4 qui ont changé ce chapitre entre 1977 et 1981, on fabrique des surfaces non superposables et d'aires égales, à la fois sur quadrillage et par découpage-recollement. On aborde à la fois les aires sur papier quadrillé et sur papier uni. Les surfaces à bord arrondis et les encadrements sont envisagés. Dans certains manuels, on utilise des pavages avec des unités non carrées (triangles, losanges) ; dans le Bareil-Zehren, on propose même de nombreuses surfaces susceptibles de paver le plan ; dans le Deledicq-Lassave, on utilise des unités non carrées pour faire le lien entre aires et fractions. Il semble qu'on commence à assister à une synthèse entre l'approche sur quadrillage et celle sur papier uni, et ceci dans un souci de construire la notion d'aire avant de poser la question de la mesure. Dans le primaire, cet aspect construction de la notion d'aire aussi bien que de la notion de mesure apparaissait déjà dans les programmes de 1980, et il est développé dans des manuels pour les maîtres comme le ERMEL.

L'évolution que nous décrivons ici est celle d'une tendance générale des manuels. En réalité, les manuels d'une même époque ne sont pas uniformes : certains conservent la conception dominante à l'époque précédente, et d'autres annoncent déjà celle de l'époque suivante.

5. le travail de la noosphère[1] de 1958 à 1974

Cette période correspond à la modernisation de l'enseignement des mathématiques dans le secondaire, en commençant timidement dans les classes terminales en 1962 pour aboutir aux nouveaux programmes qui entreront en vigueur en 1969 en 6ème. L'Association des Professeurs de Mathématiques (A.P.M. puis A.P.M.E.P. association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public) prend une part active dans cette évolution et on voit les témoignages de cette activité dans le Bulletin de cette Association. Dans le même temps, la réforme des programmes et instructions de 1945 en primaire est ardemment souhaitée et des projets de programmes pour l'école élémentaire paraissent dans le bulletin de l'A.P.M.E.P. à la fin des années soixante. En ce qui concerne les aires et plus généralement les mesures, on peut distinguer 3 grands moments : années 1958 - 1959, années 1965 - 1969 (mars), années 1969 (oct) - 1974.

Au cours de **la première période**, ***on constate surtout un souci de formation théorique des professeurs*** : au cours de l'année scolaire 1958 - 1959, le Bulletin de l'A.P.M. fait paraître une série d'articles théoriques sur la mesure :

- dans le numéro 194 d'octobre 1958 un article de J. Dixmier sur la mesure des angles et un de H. Cartan sur le volume des polyèdres. L'exposé sur la mesure des angles sera suivi d'un autre sur la mesure des rotations par A. Doneddu dans le numéro 253 de juillet 1966
- dans les numéros 196, 198, 199 de janvier, mars et juin 1959 trois articles de A. Revuz sur la mesure des aires et la théorie de l'intégration
- dans les numéros 198 et 199, on a aussi deux articles de R. Fortet sur le calcul des probabilités.

Au cours de **la deuxième période**, des projets de programmes commencent à être élaborés pour tous les niveaux d'enseignement, y compris l'école élémentaire (n° 249 - septembre 1965) ; parallèlement, ***on commence à mener des expérimentations***. Dans le numéro 251 de janvier 1966, N. Picard indique bien le changement d'état d'esprit à propos des mesures : il ne s'agit plus seulement d'avoir des compétences pratiques et de savoir se servir des instruments de mesure, on a un objectif plus théorique en faisant apparaître l'arbitraire du choix des unités : *"La*

---

[1] "sphère où l'on pense le fonctionnement didactique" "Dans la noosphère, les représentants du système d'enseignement, mandatés ou non (...) rencontrent directement ou non (...), les représentants de la société " "véritable sas entre ce système (didactique) et l'environnement sociétal" "là se développent les conflits, là se mènent les négociations, là mûrissent les solutions" Y. Chevallard *La transposition didactique* 1985

mesure relève d'une physique expérimentale élémentaire. L'accent porte sur les idées très importantes d'encadrement et de choix arbitraire des unités."

Dans le même temps, des membres de l'A.P.M.E.P. participent à la mise au point d'une série d'émissions télévisées "Les chantiers mathématiques" accompagnées d'un bulletin. Plusieurs doivent être consacrées à la mesure (annonce du bulletin n° 232 d'octobre 1963).

La réflexion théorique continue dans le numéro 254-255 de septembre 1966 avec un article de G. Delpla sur "grandeur, mesure et unité" inspiré d'un ouvrage de Landolt portant le même titre paru en 1947 chez Dunod.

De nouveaux projets de programme pour les écoles maternelle et primaire paraissent dans le numéro 258 de mai 1967. Au sujet de la mesure, l'approche est assez différente de celle des programmes de 1945 encore en vigueur à l'époque :

Au C.P. on utilise la relation "avoir même longueur" pour classer les éléments d'un ensemble puis ranger les classes d'équivalence.

Au C.E. on mesure (longueur, aire, masse, durée) avec des unités quelconques avant de s'intéresser aux unités légales. Les commentaires distinguent nettement la grandeur du nombre qui la mesure : *"les expressions "nombre concret, nombre abstrait" étant dénuées de sens, il paraît nécessaire d'abandonner l'habitude de faire à côté d'un nombre l'indication de la nature des objets ou de l'unité de mesure lorsque ce nombre est un terme d'une opération quelconque (exemple : écrire 3 + 2 = 5 et non pas 3 billes + 2 billes = 5 billes ou 3 cm + 2 cm = 5 cm)"*.

Au C.M. on aborde de plus les notions d'unité de mesure et de changement d'unité, les valeurs approchées d'une mesure et les correspondances entre grandeurs qui vont donner lieu à l'étude de relations fonctionnelles et non fonctionnelles, de correspondances linéaires et non linéaires. A ce propos, les commentaires font apparaître les fractions comme opérateurs sur des grandeurs et le produit des fractions comme composition de ces opérateurs : *"s'il est rare d'exprimer une mesure par une fraction, il n'est pas rare de "prendre une fraction d'une grandeur", c'est-à-dire multiplier une grandeur par une fraction."* Par ailleurs les commentaires invitent à utiliser plusieurs cadres pour l'étude de la proportionnalité entre grandeurs : *"L'étude de correspondances linéaires entre deux grandeurs ... sera nourrie de nombreux exemples... La découverte et l'exploitation judicieuse des tableaux de valeurs correspondantes et même de la représentation graphique, permettront de briser l'automatisme stérile de la "règle de 3""*. Cet esprit sera tout à fait celui des nouveaux programmes de 1970 à l'école élémentaire.

Sur la notion de grandeur, dans ce même numéro 258, l'A.P.M.E.P. "opte pour une notion naïve ... qui serait une propriété commune à des objets ... d'un point de vue plus savant, ce serait une classe d'équivalence pour les relations étudiées". Nous avons vu que ce point ne sera pas retenu par les nouveaux programmes et que la notion de grandeur y sera complètement évacuée.

En mars 1969, il n'y a pas encore de nouveaux programmes pour l'enseignement élémentaire mais le Ministère a mis en place depuis l'été précédent une Commission Ministérielle de Rénovation Pédagogique qui doit, entre autres se pencher sur cette question. L'A.P.M.E.P. soutient avec l'I.P.N. (Institut Pédagogique National) deux projets : l'un (projet A) serait applicable immédiatement et permettrait aux maîtres de se former en attendant la mise en place progressive du projet B qui devrait être généralisé en 1971 au niveau du C.P. (bulletin n° 267 de mars 1969).

Sur la mesure, ces projets sont plutôt modestes :

projet A : on parle de "travaux pratiques de mesure" :
- cours élémentaire : exprimer une mesure, une unité étant choisie. (on ne précise pas s'il s'agit des unités légales ou d'unités arbitraires)
- cours moyen : "recherche de mesure. Utilisation des unités légales usuelles (longueur, aire, volume, masse, durée). Encadrements d'une mesure".

projet B : la mesure a presque disparu !
- cours élémentaire (fin) : travaux pratiques entrant dans le cadre des activités d'éveil (conduite d'une expérience, compte rendu d'une expérience, étude du milieu)
- cours moyen : mesure sur fond de quadrillage.

Avant la parution des nouveaux programmes, un seul article concerne un travail en classe sur des mesures : il s'agit d'un article de C. Hug paru dans le numéro 263-264 de juillet - octobre 1968 : "A propos de la mesure des aires au cours moyen" qui rend compte d'un travail utilisant le quadrillage et le découpage - recollement avec pour objectif de déstabiliser un modèle faux des élèves qui consiste à penser qu'en déformant une surface, on conserve son aire : la première idée des élèves dans un travail sur quadrillage est de mesurer le périmètre et de "mettre la surface en carré". Notons que c'est un modèle que nous avons pu retrouver au cours de nos observations.

Dans le même temps, la commission du dictionnaire de l'A.P.M.E.P. se donne pour but de fixer le vocabulaire et les notations : ainsi, en accord avec la plupart des manuels de 6ème (bulletin n° 268 de mars 1969), J.M. Chevallier propose de distinguer la droite (AB) de la demi-droite [AB), du segment [AB] et de sa longueur AB, mais rien ne nous permet de savoir si la longueur est un nombre ou une grandeur. Un an plus tard (n° 274 de juin 1970), le même auteur se réjouit que les auteurs de manuels n'aient pas appliqué à la lettre les instructions des programmes au sujet des notations de mesures, ce qui nous épargne des énoncés du genre : "*le kilogramme et le franc étant les unités respectives de masse et de prix, un épicier achète 100 de sucre et 18 de café pour 303. Le mois suivant, les F-prix massiques n'ayant pas changé, il paie 527,25 pour 125 de sucre et 36 de café. Combien paie-t-il 1 de sucre? 1 de café ?*"

La troisième période correspond au début de l'application des nouveaux programmes. Le numéro 269-270 daté de juillet-octobre 1969 paraît au moment où entrent en application les nouveaux programmes de 6ème. C'est un numéro spécial consacré à la classe de 6ème.

Concernant la mesure, on y trouve un article de P. Buisson qui donne d'abord un exposé théorique de la "mesure des segments géométriques sur une droite affine" (mesure au sens d'application de l'ensemble des segments de D dans $\mathbf{R}^+$), puis aborde ce qu'on peut faire en classe de 6ème : il parle alors de mesure d'un segment physique et utilise les reports à l'aide d'un compas à pointes sèches. Dans les deux cas, il distingue les 3 termes : segment pour désigner l'objet physique ou géométrique, longueur pour désigner une classe d'équivalence de segments, mesure pour désigner le nombre. Pour les élèves de 6ème, il reconnaît que s'il *"n'est pas possible de définir la longueur comme classe d'équivalence", "par contre, on doit pouvoir dire que u-mes[AB] = β est synonyme de longueur du segment [AB] = βu et que cela s'écrit AB = βu."* Pour la classe de 5ème, il propose de préciser la notion de longueur comme exemple de relation d'équivalence : *"deux segments [AB] et [CD] sont équivalents si pour toute u-mesure on associe aux segments le même encadrement ; on appelle longueur du segment [AB] la classe d'équivalence du segment [AB] et on la note AB"*. Les autres mesures sont à peine abordées mais l'auteur propose une terminologie cohérente :

segment	surface	solide	secteur angulaire
longueur	aire	volume	amplitude

la première ligne désignant des ensembles de points de l'espace et la deuxième les classes d'équivalence correspondantes par la relation r(A,B) si et seulement si pour toute mesure μ on a $\mu(A) = \mu(B)$. Le choix de la définition dans le cas des segments de la relation d'équivalence en référence à la mesure et non à l'isométrie est fait justement parce qu'il est généralisable aux autres mesures.

Dans ce même numéro du bulletin, G. Walusinski donne son point de vue sur l'enseignement de la mesure en 6ème : il pense qu'elle doit permettre une approche de la théorie de la mesure mais que c'est un sujet difficile et qu'il faut pour les professeurs bien connaître les exigences des physiciens et des mathématiciens, même s'ils ne peuvent toutes les satisfaire. Il propose quelques situations permettant d'approcher la théorie de la mesure et la notion de clan, en particulier des situations où l'invariance par translation n'est pas réalisée.

La volonté de ne pas se contenter d'une pratique de la mesure, comme dans les anciens programmes mais de l'aborder d'un point de vue plus théorique est manifeste aussi dans le compte-rendu de l'équipe d'expérimentation de Poitiers : *"Nous avons considéré cet alinéa (des programmes) comme une borne supérieure de ce qu'on peut traiter en sixième : c'est une liste d'exemples parmi lesquels il faut choisir ceux qui se prêtent le mieux à l'introduction de la notion* d'encadrement *et aussi, dans la mesure où cela est possible en sixième, à la* notion mathématique de mesure." Ils insistent sur la notion d'encadrement en précisant qu'il s'agit *"de la notion physique d'encadrement (imprécision des instruments de mesure) et non de la notion mathématique (encadrements de plus en plus fins conduisant à une mesure définie comme une limite)."*

Toujours dans ce numéro, dans un article intitulé "La physique mathématique en sixième", J. M. Chevallier pose bien la question de la relation entre la théorie et la pratique, entre les mathématiques "pures" et la physique, le professeur de mathématique du collège ayant à se préoccuper des deux. Une de ses préoccupations concerne le vocabulaire et les notations qui traduisent des problèmes de fond : comment, si la longueur est une application à valeur numérique admettre à la fois AB = 3 et AB = 30 et AB = 0,03...? Certes, c'est cm-mes AB = 3 et mm-mes AB = 30 qu'il faut écrire mais outre que cela montre que AB n'est pas un nombre, cela conduit aux abus de langage précédents. Nous ne pouvons que l'approuver quand il dit *"Franchement, AB = 3 cm = 30 mm était plus clair"* ! Il aborde aussi les écritures du type "2 cm x 3 cm = 6 cm^2" ou "15 km : 3 h = 5 km/h" en disant que la discussion à leur sujet doit porter sur le plan pédagogique et non sur le plan théorique où on ne saurait condamner cet abus de langage sous peine d'être "ensevelis sous l'avalanche des notations".

Le numéro 282 de février 1972, entièrement consacré à l'école élémentaire, aborde très peu la question de la mesure : on n'y trouve que quelques réflexions d'un groupe constitué de professeurs d'école normale et d'un instituteur qui précise surtout qu'il est souhaitable d'aborder la mesure d'un point de vue qualitatif avant de s'intéresser au quantitatif et que l'objectif est d'avoir compris la méthode plus que de retenir des formules (pour les aires par exemple).

Dans le numéro 283 d'avril 1972, on trouve encore un article (de H. Bareil cette fois) attirant l'attention sur les mesures et égalités abusives dans les manuels de 6ème. Comme P. Buisson et J. M. Chevallier, H. Bareil distingue 3 catégories d'êtres et demande que le vocabulaire et les notations soient cohérents dans ce domaine et respectent le sens de l'égalité.

Les journées A.P.M.E.P. qui ont lieu en 1973 à Nancy et dont le numéro 291 du bulletin rend compte abritent un groupe de réflexion sur la mesure à l'école élémentaire animé par F. Colmez. La progression proposée commence par des comparaisons directes (on s'intéresse aux longueurs, aux masses et aux capacités) puis propose des comparaisons entre objets pour lesquels la comparaison directe est impossible, de façon à rendre nécessaire l'utilisation d'un instrument : étalons divers ou report d'une unité ; le report d'une unité amène à la construction d'une échelle qu'il faudra affiner pour avoir plus de précision sur les mesures. Cet affinement est fait dans le cas des longueurs et dans différents systèmes : on introduit à cette occasion une notation à virgule (dans des bases variables et non seulement dans la base 10).

Le débat sur l'école élémentaire qui a eu lieu dans ces mêmes journées et que R. Crépin rapporte, met l'accent sur la liaison entre les contenus et les méthodes : l'instituteur a l'habitude d'enseigner des certitudes et quand le mathématicien parle "mesure", l'instituteur pense "système métrique" ; le premier "tient à ménager toutes les étapes pour une véritable construction de la connaissance mathématique" pendant que le deuxième "affirme son enseignement par ce qui est retenu plus facilement par l'enfant parmi les résultats qui, aux yeux du maître paraissent indispensables à retenir". Le rapporteur se demande si les points de vue sont inconciliables et pose des questions qu'il demande à l'A.P.M.E.P. d'étudier d'urgence :

Quelles sont à l'école élémentaire les notions mathématiques à faire connaître ? Quelle est la méthode d'approche pour une bonne compréhension des enfants ?

Comment peut-on ne pas confondre une notion et la communication de cette notion? Une notion et un modèle concret préfabriqué pour schématiser cette notion ?

Comment ménager la continuité de l'enseignement mathématique de la maternelle à l'élémentaire, de l'élémentaire au premier cycle,... de l'école à la vie ?

Le numéro 293 d'avril 1974 contient un article de P. Rougée "Axiomatique pour les dimensions physiques, les scalaires et les vecteurs du physicien", article théorique qui décrit un groupe permettant de modéliser les dimensions en physique et un corps des grandeurs scalaires physiques dans lequel on associe une dimension à chaque grandeur physique, on définit une addition entre grandeurs de même dimension et un produit entre grandeurs physiques quelconques ; cela permet de justifier des écritures comme "300 m + 4 km = 43 hm" ou "3 grammes x 4 ms^{-1} = 1200 dynes".

Nous voyons que la réflexion à l'intérieur de l'APMEP reflète et précède le changement de point de vue sur la mesure qui a lieu dans les programmes de 1969 - 1970. Les auteurs sont d'accord pour mettre l'accent sur l'application mesure et pour distinguer clairement l'objet à mesurer de sa mesure. Les avis sont plus partagés sur la considération d'un troisième terme correspondant à l'aspect grandeur. C'est la définition de l'aire comme un nombre en ne considérant que les deux pôles surfaces - nombres qui a été retenue dans les nouveaux programmes. Mais le point de vue qui consiste à distinguer les trois termes dans l'enseignement continue à exister au sein de la communauté des professeurs de mathématiques et réapparaît dans les programmes de l'école élémentaire de 1978 - 1980. Il est adopté dans la brochure "Grandeur - mesure" qui tente de faire le point sur la question et dont nous avons déjà parlé.

Après 1974, si l'on excepte un article de G. Vergnaud et autres "Quelles connaissances les enfants de 6ème ont-ils des "structures multiplicatives" élémentaires ?" paru dans le numéro 313 d'avril 1978 qui est plutôt centré sur la proportionnalité et aborde des problèmes de volume parmi d'autres problèmes relevant de la linéarité, aucun article ne traite de mesures pendant 5 ans. Dans le numéro 320 de septembre 1979, on trouve dans la nouvelle rubrique des "Etudes didactiques" un article de J. Rogalski intitulé "Quantités physiques et structures numériques. Mesures et quantifications : les cardinaux finis, les longueurs, surfaces et volumes" qui s'intéresse plutôt à l'aspect cognitif de la question. Ici l'accent est mis sur l'élève et son développement. Jusque là, on s'est interrogé sur le contenu, le vocabulaire adéquat, l'élève était singulièrement absent du débat. Dans les travaux de didactique, les trois termes de la relation didactique - contenu, maître, élève - sont pris en compte : l'élève et le contenu sont au centre de l'étude de l'enseignement d'une notion.

II. Notre ingéniérie didactique

1. Les erreurs fréquentes des élèves

Certaines difficultés et erreurs observées chez les élèves sont bien connues des enseignants:

* La surface unité étant une surface avec une certaine forme, la mesure d'une surface S est tributaire de la possibilité de paver effectivement S avec cette forme. Ainsi des élèves rencontrent des difficultés pour exprimer l'aire d'un triangle en cm^2 puisqu'on ne peut pas le paver avec des carrés.

* L'aire est attachée à la surface et ne se dissocie pas d'autres caractéristiques de cette surface : si le périmètre d'une surface augmente, son aire aussi (et réciproquement), si deux surfaces ont le même périmètre, elles ont la même aire (et réciproquement).

* On étend des formules à des situations où elles ne sont pas valables : par exemple produit des "dimensions" pour un parallélogramme ou des "trois dimensions" d'un triangle.

2. Nos hypothèses didactiques

Il nous semble qu'un certain nombre de difficultés sont liées au traitement par les élèves des problèmes d'aire, soit du point de vue des surfaces, soit du point de vue des nombres.

Par exemple, une diminution de l'aire est comprise comme une diminution de la surface avec sa forme et va de pair avec une diminution du périmètre : l'aire et le périmètre sont alors amalgamés à la surface et liés à sa forme, on agrandit ou diminue la surface en conservant sa forme; le périmètre c'est le contour, l'aire c'est l'intérieur.

A l'autre extrême, l'aire est un nombre: on est sur le plan du calcul et on ne relève que des éléments pertinents pour le calcul, par exemple des mesures de longueur qui paraissent caractéristiques de la surface considérée et qu'on combine dans des formules plus ou moins fondées telles que "ajouter les mesures de deux côtés d'un triangle et multiplier par la troisième", pour calculer l'aire du triangle en faisant le produit de deux longueurs.

Ainsi, au sujet de l'aire, les élèves développeraient une "conception forme" liée au cadre géométrique ou une "conception nombre" liée au cadre numérique, ou les deux, mais de façon indépendante, et ils traiteraient les problèmes sans établir de relation entre les deux points de vue. Or les problèmes d'aire mettent de façon essentielle en relation les cadres numérique et géométrique.

L'analyse que nous faisons nous amène à distinguer trois pôles : le pôle géométrique avec les surfaces considérées comme parties du plan, le pôle "grandeur" avec les aires et le pôle numérique avec les mesures. Le concept d'aire en tant que grandeur constitue à notre avis un relais entre les surfaces et les nombres. Ceci nous amène à faire notre *première hypothèse* :

(H1) Le développement dans l'enseignement du concept d'aire en tant que grandeur permet aux élèves d'établir les relations nécessaires entre les deux cadres (géométrique et numérique)

Par ailleurs, en prenant l'aire d'un carré pour unité, on évite de dénombrer les unités en calculant sur les mesures. On a alors besoin, pour construire F, d'établir des relations entre les mesures de longueur et les mesures d'aire.

Or la mesure permet d'identifier toutes les grandeurs (y compris longueurs et aires) à $\mathbf{R}^+$. Ceci est précieux du point de vue de la modélisation mathématique. Toutefois une identification trop précoce nous semble favoriser l'amalgame des différentes grandeurs alors que l'objectif à cet âge est plutôt de les différencier, d'où notre *deuxième hypothèse*.

(H2) Une identification trop précoce entre grandeurs et nombres favorise l'amalgame des différentes grandeurs (ici longueurs et aires)

3. Nos choix didactiques

Cela conduit à choisir des problèmes dans lesquels les grandeurs (longueurs, aires) sont dissociées d'une part des objets (segments, surfaces), d'autre part des nombres, des problèmes dans lesquels jouent de façon significative les différences entre périmètre et aire, avant d'aborder la mesure en fonction d'une unité choisie et les relations entre mesures de ces grandeurs. Nos hypothèses nous amènent à distinguer trois éléments importants dans l'apprentissage :

a) ***construire la notion d'aire comme grandeur autonome*** en comparant directement des surfaces par inclusion (éventuellement après déplacement), ou indirectement par *découpage-recollement*, puis en attribuant à une surface des mesures par pavage à l'aide de pavés de formes variées.

Cela nous amène à dégager l'aire de la forme en différenciant aire et surface (deux surfaces de formes différentes peuvent avoir des aires égales) et à distinguer l'aire du nombre (à une même surface peuvent correspondre des nombres différents suivant l'unité choisie, mais l'aire, elle, ne change pas).

b) ***étendre l'application mesure à des surfaces S non pavables avec l'unité A*** à la fois en utilisant le découpage-recollement (pour fabriquer une surface S' de même aire que S et pavable avec A) et des encadrements de S par des surfaces pavables avec A ou des subdivisions de A qui approchent S de mieux en mieux par l'intérieur et par l'extérieur (par exemple en se servant d'un quadrillage). La première méthode ne permet de traiter que certaines surfaces et la deuxième suffit à traiter toutes les surfaces qui nous intéressent.

Cependant, nous pensons que la seule considération du deuxième point de vue ne permet pas à l'élève d'échapper à la prégnance de la forme des pièces et peut expliquer certaines des difficultés rencontrées. La recherche d'économie dans la méthode de comptage des carreaux peut amener un dérapage vers d'autres moyens d'associer un nombre à la surface (tels que le recours à une procédure périmétrique) si on ne dispose pas pour le concept d'aire d'une référence autre que numérique. Nous faisons l'hypothèse que l'utilisation du découpage-recollement est un point clé dans l'élaboration du concept d'aire, étape-relais entre les surfaces et les nombres dans la construction de F .

c) ***pointer les différences et établir des relations entre aires et longueurs*** en s'intéressant à leurs variations respectives au cours de diverses transformations.

De plus, nous choisissons de faire une large place aux jeux de cadres surfaces - aires - nombres pour faire avancer la connaissance des élèves sur la notion d'aire, sur la mesure, sur les nombres.

* Le pavage avec des pièces qui pavent l'unité (ou plusieurs exemplaires de l'unité juxtaposés) permet d'étendre l'application mesure entre surfaces et nombres, et d'étendre la multiplication aux nombres fractionnaires et en particulier aux nombres décimaux. Dans le jeu de cadres surfaces-aires-nombres, on recueille ainsi de l'information nouvelle dans le cadre numérique : on peut donner du sens au produit des fractions et des décimaux en s'appuyant sur les aires de rectangles.

* L'extension du champ des surfaces dont on sait comparer les aires par découpage-recollement et l'extension des opérations sur les nombres permettent d'étendre l'application-mesure entre surfaces et nombres.

Dans tout le travail sur les aires, le jeu de cadres surfaces-aires-nombres se poursuit et permet de développer les connaissances sur la mesure tout en gardant un contrôle géométrique, en particulier dans les situations suivantes :

- élaboration des formules de calcul d'aire des surfaces usuelles
- proportionnalité de la mesure de l'aire du rectangle à la mesure de chacune des dimensions
- bidimensionnalité de l'aire : si on agrandit une surface dans un rapport k pour les longueurs, son aire est multipliée par k^2 .

Pour traiter chacun de ces problèmes on s'appuie, par l'intermédiaire de divers découpages de surfaces, de pavage en même temps que d'addition et multiplication de nombres, sur l'interaction entre le cadre géométrique et le cadre numérique, l'aire étant l'invariant qui permet de relier les deux cadres.

4. Résultats

Nous observons d'abord un certain nombre d'acquis après cet apprentissage. ***Le pavage*** (en particulier le comptage de carreaux) ***est un outil disponible chez tous les élèves pour comparer des aires de surfaces planes de formes différentes***. Ils réussissent beaucoup mieux que des élèves du même niveau à des tests auxquels cet outil permet de répondre.

Cependant certaines difficultés résistent. Les élèves ont fait certains progrès du point de vue de l'indépendance de l'aire par rapport à la forme, du point de vue de la différenciation aire-périmètre. Mais les conceptions erronées peuvent réapparaître jusqu'à la fin de nos séquences dans des situations plus complexes ou quand il s'agit de figures géométriques usuelles. Il semble que dans ce dernier cas on ait davantage de points de vue qui entrent en compétition, ce qui amène les élèves à produire des réponses erronées. ***L'utilisation de procédures périmétriques semble résistante.***

Des difficultés non prévues sont apparues : ***il semble qu'un point de vue "déformation continue" intervient fortement dans les représentations et dans les décisions des élèves, surtout à propos de surfaces usuelles.*** Ainsi, un parallélogramme est vu comme un rectangle déformé, les longueurs des côtés ne varient pas dans la transformation, l'aire ne varie pas non plus - qu'il s'agisse d'une articulation autour des sommets (longueurs des côtés conservées) ou d'un glissement d'un côté sur son support (aire conservée). D'ailleurs, n'est-ce pas ce point de vue qui faisait réclamer de la ficelle à un élève de CM2 pour "transformer en rectangle" une surface aux bords arrondis ?

5. Nouvelles hypothèses didactiques

Les observations faites nous amènent à ajouter des hypothèses pour la construction de nouvelles séquences didactiques. Nous avions prévu du travail dans le cadre géométrique sans prendre en compte le point de vue dynamique de la déformation.

(H3) Nous faisons maintenant l'hypothèse qu'une interaction entre les points de vue statique et dynamique est nécessaire dans la

conceptualisation de la grandeur aire et dans sa dissociation de la longueur.

Le découpage-recollement et la déformation amènent à des conclusions contradictoires. Le comptage de carreaux sur papier quadrillé emporte la conviction et permet de trancher.

Nous prévoyons maintenant de renforcer le jeu de cadres papier blanc - papier quadrillé au début du processus d'apprentissage pour établir que, pour deux surfaces dessinées sur papier quadrillé, avoir des aires égales a le même sens, qu'on se réfère au comptage de carreaux, au déplacement ou au découpage - recollement et récolter dans les deux cadres des propriétés établies dans l'un des deux.

Un des objectifs est, en fin de processus, d'utiliser efficacement le quadrillage et ses raffinements successifs afin d'encadrer de plus en plus précisément une surface par des surfaces dont on sait mesurer les aires. Nous faisons l'hypothèse que trois points importants interviennent pour cela en plus du jeu de cadres surfaces-aires-nombres :

- la maîtrise du passage du point de vue "papier blanc" au point de vue "papier quadrillé" et réciproquement
- la dialectique statique - dynamique
- la dissociation aire - longueur.

Une nouvelle expérimentation devrait prendre en compte ces différents points de vue.

Bibliographie

A.P.M.E.P. Bulletins de 1958 à 1988

A.P.M.E.P. (1982) Grandeur mesure (Mots VI) *brochure n° 46*

BANACH (1923) Sur le problème de la mesure *Fundamenta mathematicae 4*

BANACH et TARSKI (1924) Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes *Fundamenta mathematicae 6*

CHEVALLARD (1985) *La transposition didactique* La Pensée sauvage Grenoble

DOUADY (1987) Jeux de cadres et dialectique outil-objet *Recherches en didactique des mathématiques n° 7.2* La Pensée sauvage Grenoble

DOUADY et PERRIN-GLORIAN (1983) Mesure des longueurs et des aires *Brochure n°48* IREM Université Paris 7.

DOUADY et PERRIN-GLORIAN (1984-1985) Aires de surfaces planes 1ère partie et 2ème partie *Petit x n° 6 et n°8* IREM de Grenoble

DOUADY et PERRIN-GLORIAN (1987) Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane *Cahier de didactique n°37* IREM Université Paris 7

DOUADY et PERRIN-GLORIAN (1988) Conceptions des élèves à propos d'aires de surfaces planes *Actes du colloque franco-allemand de nov 86* La Pensée sauvage

DOUADY et PERRIN-GLORIAN (1989) Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane *Educationals Studies in Mahematics* Vol.20 n°4.

J. HADAMARD (1928) Leçons de géométrie élémentaire I Géométrie plane note D A. Colin Paris

F. HAUSDORFF (1914) Bemerkung über den Inhalt von Punktmengen, *Math. Ann. 75*

H. LEBESGUE (1931) La mesure des grandeurs *L'enseignement mathématique* Rééd. Blanchard (1975)

A. REVUZ (1959) Théorie de l'intégration Bulletin de l'A.P.M.E.P. n°196, 198, 199

A. REVUZ (1970) Intégration et mesure *Encyclopedia Universalis*

A. REVUZ (1974) Les points essentiels d'une théorie élémentaire de la mesure *Recherches Pédagogiques n°64* I.N.R.P. Paris

J. ROGALSKI (1983) L'acquisition des notions relatives à la dimensionnalité des mesures spatiales (longueur, surface) *Recherches en didactique des mathématiques n° 3.3* La Pensée sauvage Grenoble