NUMERATION DANS IN A L' ECOLE ELEMENTAIRE

Réflexions à partir des nouveaux programmes

par Robert NEYRET

PLAN

I – LES OBJECTIFS DES NOUVEAUX PROGRAMMES DU C.P. AU C.M.

Il s'agit à partir des textes officiels parus ces dernières années de cerner les attentes des rédacteurs de ces textes et de voir l'évolution d'un cycle à l'autre des objectifs fixés.

II – LE POINT SUR LES CONNAISSANCES DES ENFANTS.

Quelques enquêtes récentes faites par l' I.N.R.P. et les I.R.E.M. permettent d'avoir une idée sur les connaissances des enfants à un niveau donné. C'est l'occasion d'essayer de dégager les points qu'il faut travailler particulièrement avec les enfants.

III – ETUDE DE QUELQUES OUTILS PEDAGOGIQUES.

A partir de quelques livres récents, ón peut discerner quelques grandes tendances (au niveau du contenu et de la méthodologie) à propos du thème étudié. Cela permet de choisir les activités pour essayer d'atteindre les objectifs proposés plus haut, en tenant compte des difficultés rencontrées par les enfants.

I – LES OBJECTIFS DES NOUVEAUX PROGRAMMES DU C.P. AU C.M.

Dans les pages qui suivent, nous avons séparé les objectifs concernant la numération en trois rubriques :

– Règles de fonctionnement - lecture et écriture.

– Numération et opérations.

– Numération et ordre.

Cette distinction peut paraître arbitraire car la lecture et l'écriture des nombres ne sont efficaces que lorsque celles-ci sont investies dans des activités de type opératoire ou dans des activités de comparaison.

Cependant, elle nous permet de mieux cerner ce que l'on attend des élèves au cours de chacun des cycles de l'école élémentaire.

Nous avons mis en regard les objectifs et instructions se correspondant d'un cycle à l'autre de la manière suivante :

C.P.	C.E.	C.M.
objectifs C.P. instruction C.P.	objectifs C.E. instruction C.E.	objectifs C.M. instruction C.M.

En italique sont indiqués les objectifs qui sont formulés explicitement ou que l'on retrouve implicitement dans les instructions complémentaires : dans ce dernier cas, ils sont indiqués entre crochets [ ].

En petits caractères droits figurent des extraits des instructions complémentaires correspondants aux objectifs indiqués.

	Cycle préparatoire	Cycle élémentaire
REGLES DE FONCTIONNEMENT	*— [Découvrir les règles] de la numération décimale, écrite et parlée.*	*— Maîtriser l'usage et les modes de fonctionnement de la numération écrite et orale des nombres naturels.*
	Le fonctionnement d'un système de numération de position dont la base est petite se découvre et se pratique plus aisément car avec un nombre d'éléments réduits on peut atteindre des nombres de 3 ou 4 chiffres. Il n'est cependant pas nécessaire d'envisager de nombreuses bases, deux peuvent suffire (quatre et cinq par exemple). De plus, il ne s'agit là, à ce niveau, que d'un moyen pédagogique. Les exercices de groupement, d'échange, de codage et décodage doivent familiariser l'enfant avec le fonctionnement du système, avec les règles d'écriture des nombres, avant d'aborder, puis de privilégier et en définitive d'utiliser exclusivement la base dix.	L'étude de la numération entreprise au C.P. sera reprise et prolongée. Au cours de ce travail, il est nécessaire de dépasser les manipulations du type groupement ou échange qui peuvent devenir un obstacle à des procédures plus rapides et il faut permettre aux enfants de travailler directement sur les écritures (par exemple : comparaison directe de nombres entre eux sans recourir aux collections). L'étude de la numération au cycle élémentaire, a pour objectif d'accroître la maîtrise du système de numération habituel et de ses règles de fonctionnement.
	— Savoir lire et écrire les nombres à deux chiffres en numération décimale.	*— [Savoir lire et écrire les nombres assez grands]*
	On abordera aussitôt que possible l'étude des nombres et l'acquisition sera relativement lente jusqu'à 20. Dans une deuxième étape, on poussera l'étude jusqu'à 70. Au cours de la dernière étape qui mènera à 99, on sera attentif aux difficultés d'ordre lexical qui se présentent.	Pour la numération écrite, on ne fixera pas à priori une limite quant à la taille des nombres pour que la réitération de ces règles puisse s'exercer suffisamment. En conséquence, on sera amené à faire écrire des nombres dont la lecture n'est pas assurée (et que l'on peut toujours nommer, en les épelant, par exemple). En ce qui concerne la numération orale, son étude sera conçue non comme une simple lecture des nombres écrits, mais aussi comme une occasion de réfléchir sur la façon dont sont construits les noms des nombres. Cependant il ne serait pas opportun de procéder à une analyse systématique et approfondie de la façon dont sont construits les noms des nombres au moment où ces noms sont introduits et où les enfants commencent à les mémoriser. Cette analyse sera menée avec profit ultérieurement lorsque les enfants maîtriseront les écritures présentées au paragraphe ci-dessous.

Cycle moyen

REGLES DE FONCTIONNEMENT

– Maîtriser l'usage et le fonctionnement des règles de numération écrite et de celles de la numération orale usuelle.

L'étude de la numération, entreprise au cycle préparatoire et continuée au cycle élémentaire, a pour objectif au cycle moyen de consolider et d'étendre les connaissances acquises en numération écrite et orale. On pourra faire avec profit le parallèle avec la désignation des durées (numération complexe) qui relève de règles de construction analogues.

Désignations orales.

Travailler sur un domaine numérique plus vaste ("grands nombres") permet une réflexion qui n'a guère été possible jusqu'alors, sur les règles de construction des noms des nombres, différentes de celles de la numération écrite.

Il suffit de 10 chiffres pour écrire les nombres si grands soit-ils ; il faut beaucoup plus de mots pour les désigner (oralement ou par écrit). On fera observer les différences et les relations entre les deux modes de désignation. Par exemple :

– il y a des mots-clés qui renseignent sur la longueur de l'écriture chiffrée *(le mot "million" rappelle que le nombre écrit en chiffres comporte au moins 7 chiffres)* ;

– traduire le nom des nombres qu'on entend par leur écriture chiffrée (et vice-versa) permet de mieux comprendre les correspondances entre les deux systèmes [*de désignation*] .

Désignations écrites.

L'objectif du cycle moyen est d'assurer chez les enfants une bonne maîtrise du fonctionnement de notre système de numération (positionnel, à base dix). Pour cela le maître proposera :

– des activités conduisant à confronter notre système de numération à d'autres systèmes (numération romaine, numérations complexes, etc).

LECTURE ET ECRITURE (connaissances)

– [Maîtriser les numérations complexes (notamment la numération sexagésimale)]

Cette étude sera conduite avec profit en parallèle avec l'étude de notre numération décimale aussi bien orale qu'écrite.

En numération sexagésimale, la lecture est cohérente avec l'écriture.
(ex : *3 heures, 24 minutes, 45 secondes est codé 03 24 45 sur les horloges digitales*), ce qui n'est pas toujours le cas dans notre numération. (exemple : *3 cent 4 vingt 7" pour 387*).

Par analogie, on pourra associer à la lecture d'un nombre une écriture telle que :

million	mille	
$\boxed{013}$	$\boxed{507}$	$\boxed{092}$

	Cycle préparatoire	**Cycle élémentaire**
NUMERATION ET ORDRE	– Utiliser les signes $=$ $\neq$ $<$ $>$ – [*Elaborer des méthodes pour comparer deux nombres.* *par exemple :* *- à l'aide de correspondance terme à terme,* *- par référence à la comptine* *etc.*] – *Savoir écrire une suite de nombres dans l'ordre croissant ou décroissant.*	– *Savoir comparer les nombres écrits dans le système de numération habituel.* *Découvrir et manipuler les règles correspondantes.* – *Savoir ranger des nombres dans l'ordre croissant ou décroissant.* *Savoir construire des suites de nombres croissants ou décroissants.* – *Savoir comparer des nombres écrits sous différentes formes* [*voir numération et opérations.*] [*Ce travail est indispensable pour travailler sur la soustraction à partir de la distance de deux nombres*] **Les règles de comparaison des nombres en numération écrite devront être utilisées dans les cas les plus divers. On pourra, en particulier, demander aux enfants de placer et intercaler des écritures de nombres sur une droite ou une ligne (la graduation obtenue étant régulière ou non).**

Cycle moyen

– Savoir comparer rapidement des nombres naturels désignés sous les diverses formes utilisées au cycle élémentaire.

– Savoir les situer les uns par rapport aux autres (en particulier sur une ligne en respectant l'ordre).

En prolongement d'activités abordées au cycle élémentaire, le maître proposera des exercices de comparaison mettant en jeu des écritures additives, soustractives, multiplicatives, portant aussi bien sur les désignations écrites qu'orales et confrontées à la comparaison des désignations. Par exemple :

– situer des instants, ou des nombres, sur une ligne graduée ou non ;

– intercaler un instant, un nombre ;

– encadrer un instant, un nombre (en particulier encadrer un nombre naturel par des multiples consécutifs ou des puissances consécutives de dix) ; rechercher la borne la plus proche.

La comparaison des grands nombres peut s'appuyer sur un rapprochement entre la numération orale et la numération complexe. Exemple :

– pour comparer 5 h 22 mn 45 s et 3 h 59 s, il suffit de comparer 5 et 3.

– pour comparer 18 422 et 5 769 (lorsque ces nombres sont donnés oralement, il suffit de comparer 18(mille) et 5(mille)).

[Savoir élaborer des suites de nombres (sous forme écrite ou orale).]

– donner la suite des nombres à partir d'un nombre donné, ou la suite des instants de seconde en seconde (minute en minute) à partir d'un instant donné.

– compter de 2 en 2, de 5 en 5, ou de 5 secondes en 5 secondes, de 5 minutes en 5 minutes, de 15 secondes en 15 secondes, de 30 minutes en 30 minutes, etc.

– compter ou décompter de 10 en 10, de 100 en 100, ou de 60 secondes en 60 secondes, 60 minutes en 60 minutes.

<table>
<tr><th></th><th>Cycle préparatoire</th><th>Cycle élémentaire</th></tr>
<tr><td>NUMERATIONS ET OPERATIONS</td>
<td>

– Ecrire et utiliser des égalités du type :

27 = 20 + 7.

[Les manipulations d'écritures additives de ce type doivent permettre d'aider la lecture des nombres. Mais les nombreuses anomalies (vingt et un - soixante-dix, etc.) rendent difficile à ce stade la mise en place définitive de règles générales et réduisent souvent la correspondance – nom du nombre et écriture de ce nombre – à une simple mémorisation]

</td>
<td>

Savoir désigner un nombre par des écritures additives, multiplicatives, soustractives. Savoir reconnaître et traduire des situations faisant intervenir les écritures ci-dessous.

Le nombre d'éléments d'une collection peut être donné sous la forme usuelle habituelle (exemple : 125). Mais dans certains cas, il peut être plus intéressant d'utiliser pour le désigner d'autres types d'écritures, par exemple :

Ecritures additives (exemples : $100 + 20 + 5$ ou $110 + 5$ ou $50 + 30 + 25 + 10 + 10$) dans le cas d'un fractionnement d'une collection.

Ecritures multiplicatives (exemples : 25×5 ; $7 \times 6 \times 15$) dans le cas de collections d'objets rangés en lignes et colonnes, dans des situations de dénombrement.

Ecritures soustractives (exemples : $150 - 28$).

Dans le cas d'une collection fractionnée en deux parties pour exprimer le nombre d'éléments de l'une d'entre elles ;

Dans le cas où l'on veut exprimer l'écart entre deux nombres.

Dans ces deux cas on fera la liaison avec la résolution de $a + . = b$.

Eventuellement (si le maître le juge possible ou utile) écritures exponentielles (exemples : 3^2, 5^3, 10^5) dans le cas de collections obtenues par réitération d'une règle du type doubler ou tripler, ou quadrupler ou décupler .... (c'est le cas par exemple des différents groupements obtenus en numération de position), et dans le souci de simplifier certaines écritures multiplicatives (exemple : $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4$; $10 \times 10 \times 10 = 10^3$).

On privilégiera tout particulièrement en vue de l'élaboration de techniques opératoires, et en liaison avec la numération, les expressions du type : $30\,000 + 2\,000 + 300 + 40 + 7$

$(32 \times 1\,000) + (3 \times 100) + 40 + 7$ (lien avec la numération orale) et éventuellement :

$(3 \times 10^4) + (2 \times 10^3) + (3 \times 10^2) + (4 \times 10) + 7$.

[Ce type d'écritures suppose implicitement que les objectifs suivants soient visés :

– Savoir lier l'écriture usuelle d'un nombre à la décomposition additive correspondante du type

537 = 500 + 30 + 7

– Savoir donner des écritures de nombres faisant intervenir explicitement le nombre d'unités de chaque groupement

ex : 4027 = (4 × 1000) + (2 × 10) + 7

ou le nombre de groupements d'un ordre donné

4027 = (402 × 10) + 7

– Distinguer chiffre et nombre, en particulier savoir trouver le chiffre des dizaines et le nombre des dizaines, le chiffre des centaines et le nombre des centaines, etc.

– Savoir lier le nom d'un nombre à certaines écritures en base dix :

ex : pour cinq cents soixante dix sept

500 + 77 ou
500 + 60 + 17 ou
500 + 60 + 10 + 7]

</td></tr>
</table>

Cycle moyen

— [*Etre capable de changer d'écritures dans la numération décimale et dans les numérations complexes*]

[*On proposera*]

– Des exercices fréquents de changements et d'utilisation de différentes écritures liées :

* au codage décimal des nombres. Exemple :

$$257\,024 = 200\,000 + 50\,000 + 7\,000 + 20 + 4$$
$$= (2 \times 100\,000) + (5 \times 10\,000) + (7 \times 1\,000) + (2 \times 10) + 4$$
$$= (2 \times 10^5) + (5 \times 10^4) + (7 \times 10^3) + (2 \times 10) + 4$$

* à des questions du type : *"combien de dizaines, de centaines, dans un nombre donné ?"*

Exemple : *dans 7 024, il y a 70 centaines car* $7\,024 = (70 \times 100) + 24$.

Les exercices de conversion consolident le rôle joué par la base dans notre système de numération :

Exemple : *2 jours 3 h 8 mn* $\rightarrow (2 \times 24 \times 60) + (3 \times 60) + 8$

2 m 3 dm 8 cm $\rightarrow (2 \times 10 \times 10) + (3 \times 10) + 8$

– [*Savoir lier lecture d'un nombre et écritures associées à certaines décompositions*]

Treize millions cinq cent sept mille quatre-vingt douze correspond à :

$$(13 \times 1\,000\,000) + ([(5 \times 100) + 7] \times 1\,000) + (4 \times 20) + 12$$

ou :

$$(13 \times 1\,000\,000) + (507 \times 1\,000) + 92$$

ou :

$$(13 \times 10^6) + (507 \times 10^3) + 92$$

c'est-à-dire :

$$(13 \times 1\,000^2) + (507 \times 1\,000) + 92$$

Ce qui met en évidence le rôle joué par mille et ses puissances pour l'écriture et la lecture des "grands nombres".

— [*Savoir opérer sur des nombres et des durées.*]

La reprise de techniques opératoires (addition, soustraction, multiplication : (cf. par. 4-1-1) et les calculs sur les durées, effectués de manière empirique (cf. par. 6-3), seront une nouvelle occasion d'expliciter la structure de notre système de numération.

II – LE POINT SUR LES CONNAISSANCES DES ENFANTS.

Un certain nombre d'enquêtes récentes :

– une enquête de l'IREM de Bordeaux (1) portant sur un échantillon de 100 enfants du C.P., 200 enfants du C.E.2, et 200 enfants du C.M.2,

– une enquête de l' INRP (2) portant sur 3669 élèves du C.E.2 et 3654 élèves du C.M.2

– une enquête effectuée dans le département de l'Ain (3) auprès de 626 élèves de C.M.2

permettent de se faire une idée des connaissances et des difficultés des enfants travaillant à partir des programmes transitoires de 1970.

Nous avons mis de côté certains items dont la formulation nous paraît influer trop fortement sur les résultats. Lorsque les résultats sont concordants dans les différentes enquêtes, nous ne retenons qu'un item. Lorsqu'il y a une certaine discordance nous essayons d'en analyser les raisons. De toutes façons nous n'attribuons pas une absolue certitude aux résultats statistiques car ce genre d'enquête (type papier crayon) ne peut pas prendre en compte tous les facteurs qui interviennent au niveau d'une classe.

Enfin nous précisons pour chaque item, l'origine, Bordeaux (1), INRP (2), Ain (3), la date de passation et l'effectif des élèves concernés.

---

(1) – Compte rendu du colloque IDEN : analyse des travaux sur la numération IREM de Bordeaux 351, cours de la Libération 33 405 Talence.

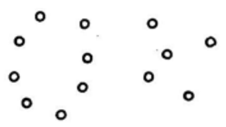
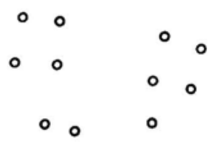
(2) – Enquête sur l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire (Institut national de recherche pédagogique – 29, rue d'Ulm 75 230 Paris)

(3) – Aperçu sur les connaissances des enfants en mathématiques à la fin du C.M.2 Zoom avant le numéro 11 : IREM de Lyon 43, boulevard du 11 Novembre 1918 - 69621 Villeurbanne.

– NIVEAU CYCLE PREPARATOIRE.

Nous ne disposons pour ce niveau que de l'étude faite par l'IREM de Bordeaux sur un échantillon relativement réduit ; il faut donc regarder très prudemment les taux de réussite.

Règles de fonctionnement de la numération.

donne l'écriture en base cinq du nombre de ronds		
		
réussite 75 %	79 %	77 %

Bordeaux – Mars 1977 – 100

Il s'agit de passer d'une collection représentée à l'écriture du nombre de ses éléments en base cinq. Bien que dans le 2e cas, la représentation puisse induire le groupement, on note une grande stabilité dans les résultats. Aucune réitération de la règle n'est demandée ici et on observe 25 % d'échecs.

Code en base trois le nombre
$3 + 3 + 2$
réussite : 50 %

Bordeaux – Mars 1977 – 100

Il s'agit de passer de l'écriture d'un nombre à une autre écriture de ce même nombre. L'écriture proposée peut permettre une réponse immédiate. Le travail direct au niveau des écritures représente une nette difficulté pour les enfants.

Numérations et écritures additives.

Trouve une écriture plus simple de			
$5 + 3$	$7 + 7$	$1 + 1 + 2 + 1 + 1$	$4 + 4 + 2$
réussite : 83 %	66 %	79 %	71 %

Bordeaux – Mars 1977 – 100

Trouve une écriture plus simple de

10 + 10 + 8

réussite : 60 %

Bordeaux – Mars 1977 – 100

Mets un point sous le nombre le plus grand, mets une croix sous le nombre le plus petit

4 + 5	5 + 4	3 + 3 + 1 + 1	1 + 1 + 1 + 1 + 1	12

réussite : 47 % nombre le plus grand · 49 % nombre le plus petit

Bordeaux – Mars 1977 – 100

Les élèves éprouvent des difficultés pour transformer des écritures additives en écritures utilisant la numération de position. Signalons toutefois que la passation de ces tests était peut-être prématurée puisque la liaison écritures additives-numération est souvent travaillée dans les classes vers la fin du 2ème trimestre et au 3ème trimestre. La complexité de la consigne du dernier item explique peut-être la diminution des réussites.

Notons pour terminer qu'en ce qui concerne la lecture et l'écriture des nombres, un travail récent * montre que certains élèves de cours préparatoire sont encore loin de maîtriser la suite des nombres jusqu'à 69. Quelques-uns même dans un domaine numérique ne dépassant pas trente ont de la peine à mettre en œuvre les propriétés ordinales du nombre.

Ces quelques tests et études soulignent le fait que l'on ne peut passer que très lentement des manipulations aux écritures, que l'objectif des programmes actuels (compter jusqu'à 100) peut être ambitieux pour l'ensemble des élèves, mais il est bien dit que l'étude entreprise au cycle préparatoire est reprise et prolongée au cycle élémentaire.

– NIVEAU CYCLE ELEMENTAIRE. – Règles de fonctionnement.

Ecris le nombre d'étoiles en base cinq

Ecris le nombre d'étoiles en base trois

INRP – Mai 1976 – effectif 304 et 313

(*) Appropriation de la notion de nombre naturel (Comiti - Bessot- Pariselle - Berthier - Giard - Michallet) décembre 1980 IREM de Grenoble et IMAG.

L' INRP obtient les résultats suivants :

	Base cinq	Base trois
Ecriture correcte	17	08
Réponse correcte exprimée en termes de groupements	16	02
Réponse exprimant des groupements du 1er ordre seulement (base trois)	-	27
Résultat donné en base dix	17	15
Autres cas ou n'a rien fait	50	48

En base cinq 56 % des enfants font des entourages corrects mais tous n'en donnent pas une expression correcte.

En base trois 16 % des enfants font des entourages corrects jusqu'au deuxième niveau, tandis que 49 % se sont arrêtés au premier niveau.

Les résultats appellent trois remarques :

– il y a une certaine régression par rapport à des exercices du même type posés en C.P. : les élèves ne sont plus en situation d'apprentissage et ne travaillent au niveau des écritures qu'en base dix.

– il y a un télescopage entre les acquis (17 % comptent en base dix) et l'activité qui leur est demandée ici.

– il y a une grosse difficulté à réitérer la règle puisque l'on passe de 56 % de réussite en base cinq (entourages au premier niveau) à 16 % de réussite en base trois (entourages jusqu'au 2e niveau).

Lecture et écriture des nombres.

Complète le tableau :

		réussite.	
neuf cent vingt deux	922		
huit mille soixante sept	8601		
	892	67 %	
cent quatre vingt douze		57 %	88 % répondent juste pour au moins un des trois nombres.
mille soixante sept		57 %	
quatre mille deux cents trois		57 %	
	5077	66 %	

INRP – Mai 1976 – effectif 311

Les erreurs dans le passage écriture en toutes lettres et écriture en chiffres portent principalement sur le zéro qui figure dans l'une des écritures et non dans l'autre.

Dans le passage inverse, l'erreur la plus marquante consiste à ne pas tenir compte des règles de la numération orale : par exemple 892 est décodé "huit cent neuf deux" ou "quatre vingt neuf deux".

40 % des enfants réussissent la totalité de cet exercice ce qui montre que le passage écriture lecture n'est pas encore maîtrisé en fin de C.E.$_2$ pour des nombres inférieurs à 10 000.

Numération et opérations

Donne une écriture plus simple des nombres suivants

	2000 + 19	4000 + 200 + 25	(7 X 100) + 8 + (5 X 10)	90 + 5 + 300 + 600	40 + 5000
réussite	90%	79%	80%	75%	86%

Bordeaux – Mars 1978 – effectif 200

On note une assez bonne réussite à ce type d'exercices qui peut ne nécessiter que l'emploi des règles opératoires.

Numération et ordre

Voici des nombres, range les du plus petit au plus grand

203 – 43 – 230 – 34 – 1 000

réussite 88 %

Bordeaux – Mars 1977 – effectif 200

Cherche pour chaque nombre le suivant immédiat

27	49	909	7 009	99	909
28					
	95 %	94 %	89 %	96 %	89 %

Bordeaux – Mars 1977 – effectif 200

Les tests semblent signifier que les enfants ont une bonne maîtrise pour ordonner les nombres et pour trouver le suivant immédiat. Mais cet optimisme est tempéré par les résultats obtenus par l' INRP au test suivant :

Ecris le nombre qui vient juste avant		Ecris le nombre qui vient juste après
164	165	166
	79	
	199	
	1 000	
	6 399	
	9 000	
	10 000	

INRP – Mai 1976 – effectif 823

Seuls 22 % remplissent correctement **tout** le tableau, 8 % faisant des erreurs pour les nombres se terminant par des zéros. Il faut noter que la présentation en trois colonnes compliquait la tâche des enfants qui ont souvent écrit des listes de nombres successifs dans la colonne de gauche et de droite perdant de vue la question posée. Il n'en reste pas moins que l'écriture simultanée du prédécesseur et du suivant d'un nombre pose problème à de nombreux enfants.

Le travail du C.E.2 étant centré sur les écritures en base dix, le retour sur des activités pratiquées en C.P. (groupements dans une base autre que dix notamment) est délicat pour beaucoup d'enfants. Notons que ceux-ci n'ont pas intégré le processus de réitération d'une règle de groupement et ont de la peine à considérer un ensemble comme nouvel élément.

Des difficultés subsistent au niveau du passage oral-écrit (transcription incomplète ou "littérale", oubli des zéros .... etc.) Enfin en ce qui concerne l'ordre, surtout au niveau de la recherche du prédécesseur et du suivant, il y a un certain nombre d'échecs dès que la présentation n'est pas proche de celle dans laquelle la notion a été apprise.

– NIVEAU CYCLE MOYEN

Règles de fonctionnement.

Des enfants jouent à faire des échanges avec des jetons
□ △ ○

Voici la règle des échanges □ contre △△
△ contre ○○○

(tu écriras les réponses sur les pointillés)

1) Martine possède ○○○○○○ △△
Elle fait des échanges pour n'avoir que des □
Martine aura . . . . . . jetons □ après ses échanges

2) Patrick possède un jeton □ et un jeton △
Il fait des échanges pour n'avoir que des ○
Patrick aura . . . . . . jetons ○ après ses échanges.

INRP – Mai 1976 et Mai 1977
effectif CE2 : 316 – CM2 : 918

Les résultats obtenus par l'INRP à cet exercice proposé aussi à des élèves de C.E.2 sont les suivants

	C.M.2	C.E.2
Correct pour Martine et Patrick	36	07
Correct pour Martine et incorrect pour Patrick	08	10
Incorrect pour Martine et correct pour Patrick	12	03
Incorrect pour Martine et Patrick	40	63
Ininterprétable ou n'a rien fait	04	17

Si le niveau des performances s'améliore au C.M.2, il montre cependant que les difficultés concernant le codage ou le décodage correspondant du nombre d'éléments de collections avec des règles similaires à celles de la numération subsistent. Il faut remarquer que les enfants ne faisant pas de manipulations peuvent éprouver des difficultés à "imaginer" les échanges à effectuer, mais on peut supposer qu'ils ont la même difficulté à imaginer ce que représente 10 dizaines. Ce qui confirme le test suivant où l'on constate un nombre important d'échecs.

Voici un nombre : 7619		réussite
Ecris *le chiffre des centaines* de ce nombre →	□	65 %
Ecris *le nombre de dizaines* de ce nombre →	□	16 %

Ain – Mai 1976 – effectif 626

Lecture et écriture des nombres.

Ecris avec des mots le nombre suivant :		réussite
600 030 →	[ ]	70 %
Ecris avec des chiffres les nombres suivants :		
quatre vingt dix sept →	[ ]	89 %
mille vingt quatre →	[ ]	88 %
trois cent sept mille deux →	[ ]	68 %

Ain – Mai 1976 – effectif 626

Les échecs sont dus à la méconnaissance des classes (unités simples, milles, millions ...):

600 030 devient six mille trente ou six cent trente.

La présence du zéro continue à créer des difficultés :

Trois cent sept mille deux devient 30 702

Quelques erreurs peu nombreuses sont dues à une écriture liée à la lecture :

Quatre vingt dix sept devient 4 20 17
Trois cents sept mille deux devient 300 7000 2

Les tests réalisés par l' INRP confirment que les changements d'écritures sont assez bien maîtrisés en fin de C.M.2 sauf pour des nombres de plus de 6 chiffres écrits en lettres.

Numération et opérations.

Complète en écrivant les nombres qui manquent (à la place des points)

25312 = 20 000 + · + 300 + 10 + 2				réussite 74 %
37 859 = (3 × 10 000) +	(7 × ·) +	(· ×100) +	(· × ·) + 9	
réussite :	61 %	62 %	59 %	

Ain – Mai 1976 – effectif 626

Si des exercices du même type proposés au C.E.2 (par exemple trouver une écriture plus simple de 90 + 5 + (3 × 100) + 600) sont bien réussis, des tests comme celui qui précède comportent de nombreux échecs. Il faut signaler que la deuxième écriture à compléter comportait une consigne implicite (décomposer selon les puissances de dix) qui a pu gêner certains enfants. Cependant le rapprochement avec la première écriture à compléter, où il y a 26 % d'échecs montre que les enfants ont des difficultés à réinvestir des connaissances dès que la situation n'est pas habituelle.

Numération et ordre.

Ecris le nombre qui vient *juste après* 6 099	→ ☐	78 %
Ecris le nombre qui vient *juste après* 1 500	→ ☐	92 %
Ecris le nombre qui vient *juste avant* 5 010	→ ☐	85 %
Ecris le nombre qui vient *juste avant* 1 500	→ ☐	82 %
Voici deux nombres : 9 099 et 9 909 - Ecris *le plus grand*	→ ☐	96 %
Voici deux nombres : 1 089 et 1 101 - Ecris *le plus petit*	→ ☐	87 %

Ain – Mai 1976 – effectif 626

Les passages d'un nombre au suivant ou au prédécesseur, la comparaison des nombres entiers sont bien dominés au C.M.2. Par contre lorsqu'il s'agit de problèmes d'encadrement, la réussite est nettement moins bonne comme le montre le test suivant.

Complète le tableau suivant en continuant comme on a commencé.

25 000	25 340	26 000	
135 000	135 490	136 000	
343 000	343 549	344 000	
	19 225		→ 64 %
	1 342 900		→ 56 %
	340 090		→ 56 %
	499 425		→ 64 %

INRP – Mai 1977 – effectif 913

L'exercice semble plus difficile lorsque le nombre à encadrer se termine par un ou deux zéros. La présentation en tableau provoque aussi quelques erreurs consistant à remplir les tableaux verticalement en suivant une règle que les enfants se donnent eux-mêmes.

On note donc qu'en fin de C.M.2, les élèves n'ont pas encore nettement compris les règles de fonctionnement de la numération de position. Par contre les changements d'écritures sont assez bien dominés sauf si ceux-ci ne se présentent pas de manière habituelle.

Les exercices sur les encadrements par des multiples de dix comportent un nombre important d'échecs. La maîtrise de ces encadrements est nécessaire pour percevoir ce que représente le nombre des dizaines, des centaines, . . . dans un nombre.

La structure de numération n'est donc pas entièrement acquise en fin de C.M.2 pour des élèves ayant travaillé sur le programme de 1970. Les nouveaux programmes ainsi que le matériel pédagogique dont les maîtres disposent (essentiellement livres) vont-ils pouvoir les aider pour faire progresser les élèves ?C'est ce que nous allons essayer de regarder dans la partie suivante.

III – ETUDE DE QUELQUES OUTILS PEDAGOGIQUES.

Lorsqu'on examine les livres dont les maîtres disposent à l'heure actuelle, on peut distinguer ceux qui s'efforcent de tenir compte des nouveaux programmes parus depuis 1978.

Nous nous occuperons principalement de :

– la collection "Math et Calcul" dirigée par Mr Eiller (*Classiques Hachette*) qui nous paraît assez représentative des manuels de cette catégorie.

– la collection "apprentissages mathématiques à l'école élémentaire" réalisée par une équipe de l'INRP (*Ermel : Sermap-Hatier*) qui est un ensemble de livres pour maîtres traitant des aspects théoriques et indiquant des progressions possibles ainsi que des suggestions d'activités.

Nous examinerons niveau par niveau ce qui est proposé dans ces différents livres.

– NIVEAU CYCLE PREPARATOIRE

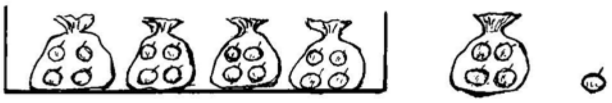
La collection "Math et Calcul" fait une place spécifique aux activités de numération. Après l'apprentissage des nombres de 0 à 9, ces activités comportent quatre parties

A : Activités de groupement suivant un mode donné (trois par trois, puis cinq par cinq) aboutissant très vite à un codage conventionnel.

B : Activités d'échanges faisant intervenir rapidement un codage, suivies de manipulations d'abaques.

C : Activités de synthèse - applications :

Il s'agit essentiellement de retrouver la règle de formation employée qui a abouti par exemple au groupement suivant :



(à partir d'une collection d'oranges)

D : (intégré à la partie : les nombres de dix à vingt) - activités spécifiques sur le codage 10 dans différentes bases.

Dans le livre Ermel consacré au C.P., nous trouvons un chapitre sur les activités de numération et en particulier une progression dite "échanges-groupements" composé de la manière suivante.

1 – Ecriture d'un nombre.

A partir d'activités d'échanges (notamment "Le jeu du banquier") on arrive à une phase de représentations, puis d'écritures. Des activités de renforcement à partir d'exercices de groupements sur des objets réels ou sur des représentations permettent d'utiliser les codages introduits précédemment.

2 – Suite de nombres.

Un travail important est proposé sur l'écriture de suites de nombres et sur les règles qui permettent de passer de l'écriture d'un nombre à celle du suivant. En particulier sont proposées des manipulations à partir de compteur en carton.

Les textes étudiés précédemment indiquent que les principales difficultés rencontrées par les enfants sont

– de comprendre la règle de réitération des groupements,

– de comprendre les règles donnant le successeur ou le prédécesseur d'un nombre,

– de manipuler simultanément des écritures additives du type 1 + 1 + 1 + 1 + 1 et des écritures du type 12.

La progression proposée par "Math et Calcul" conduit à effectuer très rapidement des groupements et des représentations de ces groupements. Par contre les activités d'échanges permettent de remplacer un groupe d'éléments par un nouvel élément, ce qui facilite par la suite la compréhension de la règle de réitération.

On peut donc préférer l'ordre échanges puis groupements qui est adopté par Ermel. Signalons cependant la difficulté de mise en œuvre pédagogique de l'activité du "banquier" qui demande une grande rigueur dans la préparation et la conduite de la classe.

Le travail proposé par Ermel à partir de parties fictives (sans matériel) paraît important justement pour la compréhension des règles de réitération. Les activités d'échanges font perdre de vue l'ordre de grandeur de la collection initiale ; il est donc intéressant de procéder aux activités de groupement en s'appuyant sur ce qui est fait précédemment au niveau des échanges.

En ce qui concerne la deuxième difficulté (compréhension des règles de succession des nombres), il faut signaler qu'Ermel propose des activités intéressantes et spécifiques alors que l'on trouve peu de choses dans"Math et Calcul". Les maîtres qui utilisent des compteurs dans leurs classes signalent l'intérêt de ces activités mettant l'accent sur la suite des nombres. Signalons d'ailleurs que Ermel propose aussi une progression fondée sur l'utilisation de compteurs (mais cette progression nécessite de posséder le matériel adéquat).

Enfin la dernière difficulté signalée montre que les écritures additives et les écritures liées à la numération de position sont à travailler de manière parallèle et complémentaire.

"Math et Calcul" et Ermel proposent tous deux de mener de front des activités sur ces deux types d'écritures. Cependant l'intéraction entre les activités n'apparait pas dans "Math et Calcul"; il faut attendre la fin du chapitre intitulé "formes additives et réduction de somme" pour voir un paragraphe consacré au lien entre ce chapitre et le travail fait en numération. Par contre les écritures additives sont intégrées dès le début dans le chapitre de Ermel consacré à la numération (codage en base quatre du nombre $3 + 5 + 6 + 4 + 3 + 2$ dans le "jeu du banquier", décodage de 123 en base quatre sous la forme $16 + 4 + 4 + 3$, etc.).

– NIVEAU CYCLE ELEMENTAIRE.

Chaque collection propose une progression particulière pour le C.E.$_1$ et le C.E.$_2$. Cependant, on peut noter que les auteurs s'attachent à atteindre l'objectif principal de travailler directement sur les écritures.

Comme Ermel , "Math et Calcul" commence à proposer des activités d'échanges (contrairement au livre du C.P.) avec le "jeu du banquier". Si "Math et Calcul" se limite aux représentations des activités précédentes pour arriver au codage, Ermel propose des activités à partir de parties sans jetons (les points obtenus sont donnés par le lancer du dé) : il semble donc qu'il y ait là des activités qui favorisent le passage toujours difficile entre les manipulations et un travail plus formel sur les écritures.

A partir de là on peut distinguer deux optiques.

"Math et Calcul" fait construire assez systématiquement les nombres puisque on peut relever la progression suivante :

C.E.$_1$ A) Les nombres à deux chiffres

- les nombres de 0 à 20
- les nombres de 0 à 50
- les nombres de 0 à 100

A l'intérieur de chacun des paragraphes, les activités sont organisées de la manière suivante.

– manipulations à partir d'un matériel structuré pour aboutir à trois types d'écritures

quarante-trois	43	10 + 10 + 10 + 10 + 3

– exercices d'application : passage d'une écriture à une autre
passage écriture-lecture.

B) Les nombres à trois chiffres

- les nombres de 0 à 500
- les nombres de 0 à 1000

Le même travail que précédemment est proposé mais ici sont introduites des écritures comportant le signe X on a donc les quatre types d'écritures :

234	100 + 100 + 10 + 10 + 10 + 4	200 + 30 + 4	(2 X 100) + (3 X 10) + 4

C.E.2 Reprise des activités proposées au C.E.1 (même type d'exercices mais traités beaucoup plus rapidement); les activités proposées ne concernent que la base dix.

– les nombres de 0 à 10 000

- introduction du tableau

m	c	d	u

- exercices systématiques de changement d'écritures à partir de jeux intéressants.

Ermel propose des activités centrées sur certains points de la numération :

C.E.1 – A partir des compteurs, une étude sur la suite des écritures des nombres et l'algorithme de succession.

– La construction d'un dictionnaire établi tout au long de l'année qui se complète au fur et à mesure pour indiquer les changements d'écriture d'une part et les passages écriture-lecture d'autre part.

– Un travail spécifique sur les écritures (non lié à la taille des nombres) qui se retrouve au cours d'autres apprentissages : ainsi au cours de l'apprentissage de la multiplication, on réinvestit le signe X pour trouver d'autres écritures de

10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 7 par exemple (8 X 10) + 7

– Des activités basées sur la décomposition d'un nombre suivant les puissances de la base.

C.E.2 – L'explication du système de codage en utilisant les notations additives et multiplicatives, voire la notation exponentielle.

– Le lien entre la numération orale et les décompositions additives des nombres ainsi que l'analogie entre la numération orale et le système d'écritures des nombres qui expriment des durées, des masses, ...

On peut donc dire que la collection "Math et Calcul" propose d'introduire les nombres "les uns après les autres" par des exercices très structurés où à l'étape n on reprend ce qui a été fait à l'étape n-1, mais de manière beaucoup plus rapide.

Les activités proposées par Ermel sont centrées sur les difficultés que l'on a pu relever à travers les tests du chapitre II (suite des nombres, lien entre les différents types d'écritures, compréhension des règles . . .). L'ambition semble donc plus grande chez Ermel et nécessite de la part de l'enseignant :

– une bonne connaissance des liens entre les différentes notions (on retrouve dans les paragraphes "Notations exponentielles, écritures additives, multiplicatives et soustractives" des problèmes de numération),

– une bonne maîtrise d'un enseignement qui est moins linéaire que celui proposé par "Math et Calcul".

L'un et l'autre des livres se dégagent à juste raison des manipulations dans des activités d'échanges et de groupement pour travailler directement sur les écritures en base dix. On a pu en effet voir au paragraphe II qu'un retour en arrière à ce niveau peut être un obstacle plus qu'une aide pour les enfants. A propos de l'écriture,"Math et Calcul" ne propose aucun travail sur la notation exponentielle qu'il estime dépasser les possibilités des enfants (le programme officiel envisage d'ailleurs son utilisation comme une simple possibilité). Le livre Ermel insiste beaucoup sur la numération orale pour laquelle il propose pratiquement un apprentissage systématique. Notons que le lien fait entre numération orale et certaines numérations complexes est intéressant et préfigure le travail explicitement proposé dans les instructions officielles du C.M. Aucune des deux collections ne propose des activités sur chiffre des dizaines et nombre des dizaines : on peut estimer que cette distinction indispensable pour la technique de la division mais source de difficultés pour les enfants du C.E. peut être reportée avantageusement au début du $C.M._1$.

– NIVEAU CYCLE MOYEN ($C.M._1$)

On peut noter à ce niveau que les deux collections suivent les recommandations des programmes officiels d'assez près. Toutes les deux proposent des activités sur la numération sexagésimale avec l'objectif de montrer par la suite le lien entre la numération sexagésimale et notre système oral de désignation des nombres.

Suit une étude d'autres numérations.

pour **"Math et Calcul"** : la numération égyptienne
la numération romaine
la numération de position en base cinq

pour **Ermel** : la numération égyptienne
la numération sino-japonaise.

Dans "Math et Calcul", on ne voit pas très bien ce que cette étude de différentes numérations apporte à la compréhension du fonctionnement de notre système écrit : on a un peu l'impression que ces numérations sont étudiées pour elles-mêmes.

Dans Ermel, numération égyptienne et sino-japonaise sont choisies parce que la numération égyptienne est un codage additif que l'on peut comparer à une décomposition du type

$$100 + 100 + 100 + 10 + 10 + 10 + 10 + 1 + 1 + 1$$

tandis que la numération sino-japonaise est un codage mixte que l'on peut comparer à une décomposition du type

$$(3 \times 100) + (4 \times 10) + 3$$

De même, les différents types de symboles, leur nombre et leur signification, le caractère positionnel ou non, le rôle du zéro, l'utilisation de la base dix . . . sont abordés dans un travail de synthèse indispensable.

Les activités de l'un et l'autre livre sur le mystère décimal lui-même, sont variées et visent à consolider les acquis des enfants, à la fois en numération orale et écrite.

On peut cependant noter dans le livre Ermel un travail important,

– sur les décompositions du type $(38 \times 100) + 7$ qui ont un rôle très grand dans la division
– sur la suite des nombres (jeux de passe, . . .)
– en calcul mental pour assurer le passage entre l'écrit et l'oral, par exemple calculer

$$37.000.000 + 27.000 + 612$$

où l'on peut comparer ce qui se passe en numération écrite ou orale.

Au niveau de la numération orale, les deux collections insistent sur le lien avec la désignation des durées comme il était signalé plus haut. Elles proposent des activités portant sur les encadrements et les approximations dans le souci de préparer les enfants à la technique de la division.

Au niveau du C.M.2, nous ne disposons pas encore de livres de classe correspondant au nouveau programme. Mais on ne peut de toutes façons séparer la numération dans $\mathbb{N}$ et la numération dans $\mathbb{D}$. Nous examinerons donc cette question plutôt dans le cadre des décimaux.

QUELQUES REMARQUES GENERALES.

La numération ne parait pas être à l'heure actuelle un sujet posant de gros problèmes aux instituteurs. On peut remarquer cependant un décalage entre le niveau supposé par les maîtres de leurs élèves en ce qui concerne la numération et le niveau atteint par ces derniers * au cours des tests qui leur sont proposés.

On note quelques évolutions et tendances ces dernières années :

– l'autonomie prise au niveau du cycle préparatoire par les activités de numération proprement dites avec l'introduction de bases diverses et la manipulation de nombres écrits avec plusieurs chiffres sans que la lecture orale habituelle soit assurée.

– une tendance à travailler uniquement en base dix à partir du C.E.2, en accordant une attention particulière à l'apprentissage des règles de la numération orale.

---

* *Enquête sur l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire – L'opinion des maîtres – Institut national de recherche pédagogique.*

– une tendance à effectuer un travail de réflexion au niveau du C.M. sur les règles de fonctionnement des diverses numérations que l'on rencontre.(Des activités portant sur les numérations anciennes semblent remplacer avantageusement à ce niveau des activités de numérations dans des bases autres que dix qui ont eu un certain succès après 1970 ; de même des activités mettant en évidence le lien entre notre numération orale et les numérations dites complexes, sexagésimale en particulier).

– des activités beaucoup plus variées et moins répétitives valorisant le calcul mental ainsi que le lien entre système de numération et technique opératoire.

Enfin, signalons pour terminer qu'un certain nombre d'activités utilisant les calculettes permettent de diversifier le travail sur la numération (Lire IN numéros 20 et 21 ou Ermel C.M. Tome 1 Chapitre 4 B3).