LA PROPORTIONNALITE EN GEOMETRIE : LE THEOREME DE THALES

Jacqueline MICHONNEAU
Lycée A. Camus, Nantes
Nathalie PFAFF
L.P. J.Rostand, Nogent sur Marne

Introduction

Cet article présente un travail sur l'apprentissage du théorème de Thalès, essentiellement pour des calculs de longueurs. Ce travail a été effectué dans le cadre de la maîtrise de Sciences de l'Education pour l'U.V. de didactique des mathématiques à Paris V. Il est une occasion de repérer certaines difficultés à propos de l'acquisition du théorème de Thalès, d'indiquer quelques réflexions à partir de l'observation des élèves et de susciter d'autres idées de recherche.

Notre travail s'inscrit dans le prolongement des travaux de G. Vergnaud sur la proportionnalité (1981) et les structures multiplicatives. Les exemples qu'il présente comportent des mises en correspondance entre deux sortes de quantités : les mètres de tissu et le prix payé, ou les pelotes et le «poids» du pull, etc. La transposition d'un concept d'un domaine à un autre n'étant ni automatique ni totale, nous avons étudié la proportionnalité dans le contexte géométrique avec le théorème de Thalès. A la différence des exemples ci-dessus, les catégories de grandeurs mises en correspondance sont alors toutes deux des longueurs. Quelles spécificités sont liées au contexte géométrique ? Les procédures utilisées sont-elles identiques ? Avec la même hiérarchie de complexité ?

Notre préoccupation initiale d'enseignantes portait sur les conséquences de la mise en place d'un automatisme au cours d'un apprentissage cognitif. Efficace et permettant une économie de pensée quand le concept est bien maîtrisé, ne risque-t-il pas, s'il est utilisé trop tôt, de bloquer la conceptualisation ? Or, les élèves, notamment en lycée professionnel, cherchent souvent la sécurité d'un algorithme «pour aller plus vite».

Le théorème de Thalès a été démontré pour la première fois dans le livre VI d'Euclide (plus de deux siècles après Thalès), qui, comme le remarquent A. Dahan Dalmedico et J. Peiffer (1986), n'est qu'une application du livre V sur la théorie des proportions, à la géométrie plane et aux figures semblables. Le théorème est d'abord démontré dans un triangle traversé par une parallèle à l'un de ses côtés, puis il est étendu à deux droites sécantes coupées par plusieurs parallèles. Ses applications sont nombreuses, notamment : partage d'un segment en segments de longueurs égales, triangles semblables,

«petit x» n° 23 pp. 41 à 59, 1989-1990

homothétie, trigonométrie dans le triangle rectangle, équation de droite. Nous l'utiliserons essentiellement pour faire des calculs de longueurs.

Un travail en classe sur le théorème de Thalès pourrait être l'occasion de réduire l'opposition du spatial et du numérique, qui, comme d'autres oppositions : intuition/déduction, construction/démonstration, a des sources historiques très anciennes. C. Laborde (1984) retrouve cette opposition dans l'enseignement de la géométrie au collège : «géométrie de l'observation des objets» (6ème-5ème), «géométrie de la démonstration» (4ème-3ème) et elle souligne les problèmes nés de cette opposition.

La séquence didactique sur le théorème de Thalès s'est déroulée en trois séances de deux heures avec 19 élèves de BEP télécommunication 1ère année. Quelques groupes de deux élèves ont passé un pré-test et un post-test avec la même grille d'exercices. Ces entretiens ont été effectués par leur professeur. Celui-ci joue donc le double rôle d'enseignant et d'expérimentateur. Pendant la séquence didactique, l'autre expérimentateur était présent dans la classe. Un magnétophone a enregistré le dialogue entre deux élèves ainsi que les interventions individuelles et collectives de l'enseignante. A défaut de pouvoir observer chaque élève, nous nous sommes contentées de leurs productions écrites, relevées à la fin de chaque séance.

Par le choix des valeurs numériques et des configurations, nous avons établi une progression permettant aux élèves de mieux analyser la figure et de diversifier les procédures utilisées, plutôt que de se contenter toujours du même algorithme.

Nous analyserons d'abord l'utilisation de l'opérateur scalaire puis nous présenterons quelques observations particulières au contexte géométrique. Nous donnerons ensuite des indications de difficultés à prendre en compte dans la construction d'une telle séquence didactique. Enfin, nous ferons une analyse de la séquence, terminée par une évaluation des progrès des élèves.

I - Utilisation d'un opérateur scalaire

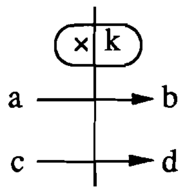
1. Dans ses travaux de 1981, Gérard Vergnaud distingue deux types d'analyse d'un problème de proportionnalité : analyse «verticale» (scalaire) et analyse «horizontale» (fonction).

L'analyse «verticale» est centrée sur la notion d'opérateur scalaire (sans dimension) qui fait passer d'une ligne à l'autre dans une même catégorie de mesures.

Exemple :

mètres de tissu	prix payé
a	b
$\times \alpha$	
c	d

L'analyse «horizontale» est centrée sur la notion d'opérateur-fonction qui fait passer d'une catégorie à l'autre :

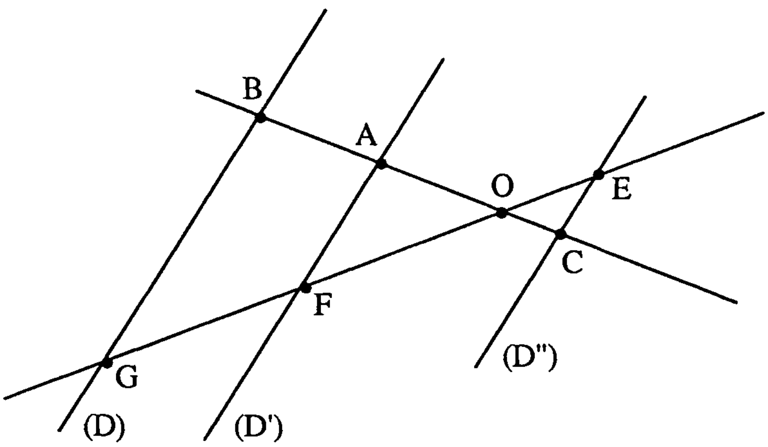


Cette dernière est d'un niveau de complexité plus élevé que la précédente, car l'opérateur-fonction s'exprime comme un rapport de mesures de catégories différentes (prix/mètres) et s'appuie sur une analyse dimensionnelle. Qu'en est-il dans le contexte géométrique du théorème de Thalès ?

2. Le mot projection évoque, pour les élèves, des parallèles. Nous avons d'ailleurs observé que les parallèles dominent sur les sécantes dans la lecture de la figure que font les élèves.

D'autre part, la projection est habituellement introduite comme transformation ponctuelle, avec la construction d'un point et de sa projection (son projeté) sur une droite (D) parallèlement à une droite (Δ). Cette forme d'introduction pourrait privilégier le rapport de projection k (qui joue le rôle d'opérateur-fonction) au détriment de l'opérateur scalaire α sur une des sécantes, chaque sécante jouant ici le rôle d'une catégorie dans les travaux de G. Vergnaud.

3. Nous avons utilisé le mot de projection pour la mise en correspondance des points, des segments, des longueurs, des mesures de longueur. Mais le passage des points aux segments n'est pas de même nature que celui des segments aux longueurs puis à leurs mesures. Ces deux dernières applications sont des homomorphismes ; elles restent le plus souvent implicites et, en outre, les longueurs sont souvent confondues avec leurs mesures en centimètres. L'observation montre que les élèves en restent parfois au niveau de la manipulation des nombres (mesures) et ne voient pas les propriétés géométriques de la figure. Ainsi, dans l'item 10 et l'item 11 ci-dessous (figure 1), le point A est rarement identifié comme milieu du segment [OB].



(D) ∥ (D') ∥ (D")
OA = 3,5 cm
AB = 3,5 cm
OG = 11,2 cm
OE = 2,4 cm

item 10 : calculer OF
item 11 : calculer OC

figure 1

4. Dans la pratique, les correspondances entre segments n'ont pas été écrites au tableau et nous avons peut-être laissé passer une occasion d'attirer l'attention des élèves

sur la différence des notations, qui reflète la différence entre les concepts de longueur et de segment. En effet, on trouve souvent dans les copies des écritures du type [AB] = 2, mélangées à des écritures du type AB = 2.

Mais surtout, il apparaît maintenant que faire «l'impasse» sur les segments, pour ne pas alourdir les écritures, présente l'inconvénient d'occulter une difficulté. La projection, d'abord présentée comme application de l'ensemble des points d'une droite (Δ_1) dans l'ensemble des points d'une droite (Δ_2), parallèlement à (δ), doit ensuite être pensée comme application de $P(\Delta_1)$ dans $P(\Delta_2)$ quand on passe aux segments, puisque ce sont des parties de (Δ_1) ou de (Δ_2). Cette 2ème étape est d'un niveau plus élevé que la précédente. Elle est nécessaire pour que les élèves repèrent les structures de $P(\Delta_1)$ et $P(\Delta_2)$ - notamment les inclusions de segments - et mettent ces structures en correspondance. Elle est à la base de la recherche d'opérateurs scalaires entre mesures de longueurs de segments sur une même sécante. Ainsi l'utilisation des opérateurs scalaires pourrait être moins facile dans ce contexte géométrique que dans les problèmes numériques mettant en correspondance deux sortes de quantités. Nous avons construit la séquence didactique de façon à favoriser l'utilisation des opérateurs scalaires sur une sécante.

II - Quelques observations

II.1 Description de la séquence.

Les exercices proposés figurent dans la suite de l'article mais ceux-ci n'étant pas présentés dans l'ordre chronologique, nous indiquons le déroulement de la séquence.

Le travail commence par la projection d'une graduation régulière d'unité 1 cm, avec un rapport de projection de 0,8. On demande d'écrire les correspondances numériques et de reconnaître la fonction linéaire : $x \longmapsto 0{,}8 \,.\, x$ (cet exercice n'est pas présenté dans ce compte rendu).

L'exercice suivant (items 1, 2, 3, figure 5, page 48) reprend l'idée d'une graduation régulière puisqu'à partir de deux points A et B distants de 2 cm et de leurs projections A et X distantes de 5 cm, on demande de construire trois points C, D et E sur la droite (AB) tels que BC = 2 cm, AD = 6 cm et AE = 7 cm ainsi que leurs projections sur (AX) parallèlement à (BX). Les longueurs des projections peuvent être calculées soit avec l'opérateur fonction qui est un décimal «simple» (2,5), soit avec les opérateurs scalaires (1 ; 3 ou 3,5 suivant les cas), soit avec une addition (chaque segment est composé de plusieurs segments de longueurs connues). La construction géométrique demandée aux élèves, incitent ceux-ci à utiliser une de ces deux dernières procédures.

L'exercice suivant (items 4, 5, figure 2, page 46) reprend la même situation en ajoutant une sécante. Ici aussi, l'opérateur scalaire est privilégié, non par la construction géométrique qui n'est pas demandée, mais par les valeurs données sur la troisième sécante qui ne permettent pas un opérateur fonction «simple» (1,8 ou 0,72 selon le couple de sécantes choisies).

Les items 6, 7, 8 (figure 3, page 47) portent sur une figure composé de segments de part et d'autre du point d'intersection des deux sécantes. Nous l'appellerons «figure croisée». L'item 6 fait intervenir la symétrie de centre O, donc l'opérateur scalaire 1 ; l'opérateur fonction est alors égal à 2 ou à 0,5 selon l'ordre choisi entre les deux sécantes. L'item 8 porte sur un calcul de longueur d'un segment de (Δ) alors que l'item 7 porte sur un calcul de longueur d'un segment de (Δ'), ce qui nécessite l'inversion de la projection précédemment utilisée.

L'exercice suivant (item 9, figure 4, page 48) appelle un raisonnement par l'absurde pour prouver que les droites du dessin ne sont pas parallèles, les mesures et l'échelle ayant été choisies de sorte que le dessin ne puisse pas permettre d'en décider. Les mesures sur une sécante, ainsi que celles des projetés sur l'autre sécante, ont pour différence 1. Ceci constitue une tentation pour les élèves de faire une somme plutôt qu'un produit.

Dans le dernier exercice (items 10 et 11, figure 1, page 43) où la figure est «croisée», les mesures ont été écrites à côté du dessin et non sur les segments comme sur toutes les figures précédentes. Sur une des sécantes, du même côté par rapport à 0, deux longueurs sont égales. L'une doit être considérée comme la moitié de leur somme si on veut utiliser l'opérateur scalaire pour calculer une longueur dans l'item 10. L'opérateur fonction est égal à 1,6. L'item 11 demande un calcul de longueur avec des points situés de part et d'autre de O. L'opérateur scalaire le plus simple est égal à $\frac{3}{7}$, donc sans expression décimale finie ; l'opérateur-fonction est l'inverse de celui de l'item 1 et peut prendre la forme décimale : 0,625.

II.2 L'analyse des productions des élèves nous a permis de relever quelques aspects particuliers, liés au contexte géométrique.

1. Nous observons à plusieurs reprises, chez le même élève, l'écriture d'une proportion triviale :

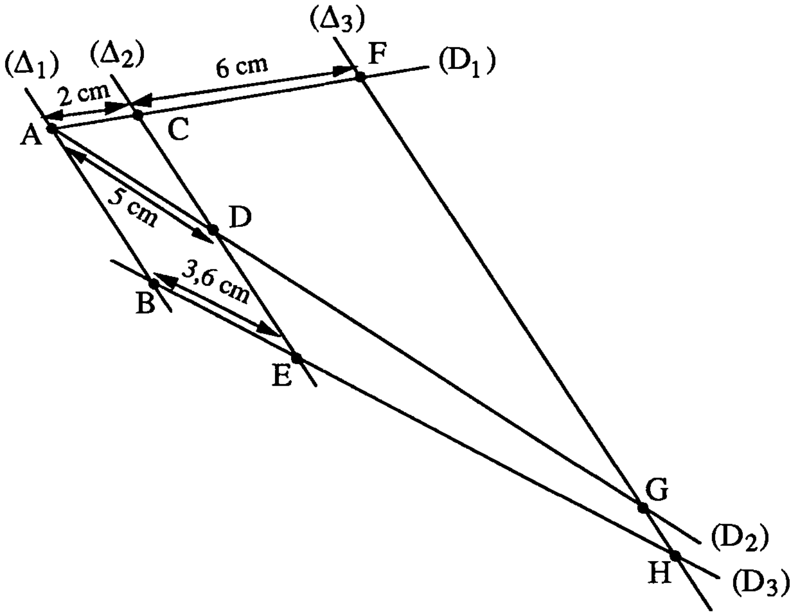
$$«\frac{6}{\cancel{3}} = \frac{OX}{\cancel{3}} \qquad OX = 6 \text{ cm}».$$

Cela signifie que la conservation de l'égalité des longueurs dans la projection n'est pas perçue. L'écriture triviale ci-dessus serait très improbable dans un contexte purement numérique, où sont en correspondance deux sortes de quantités. (Par exemple : mètres de tissu/prix payé).

2. Quand le point d'intersection des deux sécantes est visible sur la feuille, nous observons fréquemment un «effet d'origine» : ce point semble exercer une polarisation visuelle. Ainsi, à l'item 4, quatre élèves calculent AF, repèrent l'opérateur scalaire 4 sur (D_1), sa conservation dans la projection sur (D_2), d'où le calcul de AG et finalement DG par soustraction - alors qu'un calcul direct de DG est possible.

On pourrait faire l'hypothèse d'une difficulté à raisonner sur des intervalles.

$(\Delta_1) \parallel (\Delta_2) \parallel (\Delta_3)$



item 4 : calculer DG
item 5 : calculer EH

figure 2

3. Parmi les erreurs, nous observons fréquemment des rapports faux, par inversion, au niveau des longueurs et cependant une réponse finale exacte. Par exemple :

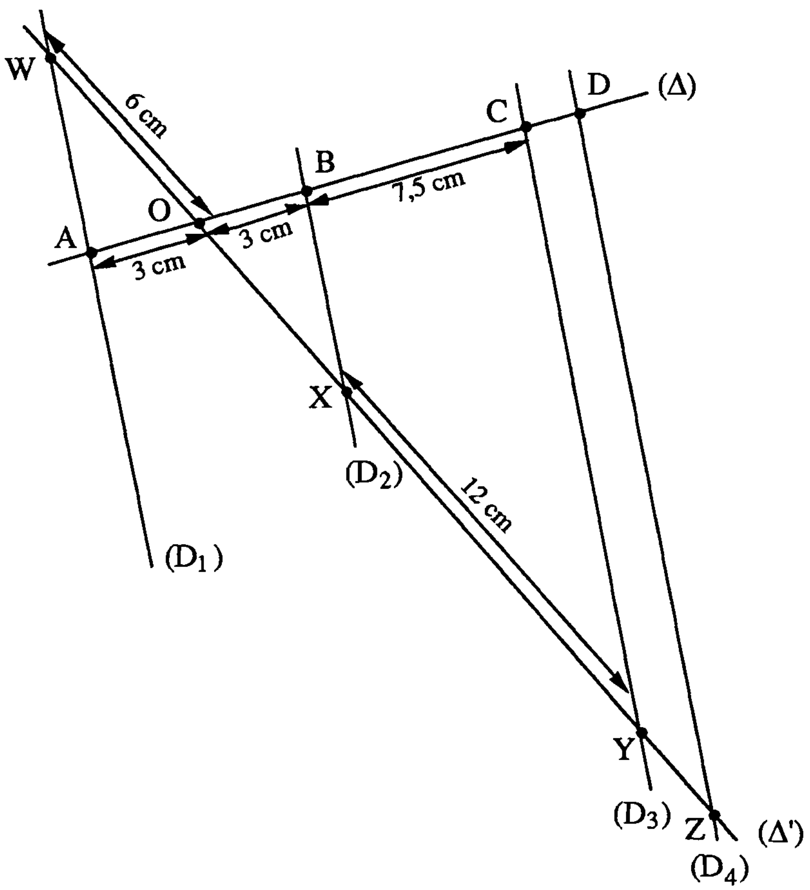
« $\frac{AC}{AD} = \frac{2}{5} = 2,5$
« CF × 2,5 = 6 × 2,5 = 15 = DG ».
En réalité, on a AC = 5 et AD = 2.

La figure permet sans doute une évaluation du rapport de projection supérieure à 1, d'où l'inversion de $\frac{2}{5}$. Il semble que les nombres soient seulement perçus comme termes d'un rapport, souvenir des années précédentes. L'élève sait qu'il faut utiliser un rapport, une multiplication, mais l'organisation du calcul est incertaine.

4. L'inversion de la projection ne donne lieu à aucune erreur concernant le rapport de projection. Le dessin peut être ici un moyen de contrôle direct de la recevabilité de la réponse ; la coordination du rapport de projection, de l'antécédent et de l'image, peut se faire «à vue». Ainsi un élève répond au professeur : «Pourquoi j'ai divisé, et là, multiplié ? Ben, parce que ça aurait fait trop grand. J'ai essayé !».

L'apparente facilité de la situation d'inversion de l'application dans le contexte géométrique peut s'expliquer d'une autre façon, la lecture directe du rapport de projection inverse est possible, évitant l'inversion de l'application. Elle est faite par 3 élèves à l'item 8.

$(D_1) \parallel (D_2) \parallel (D_3) \parallel (D_4)$



item 6 : calculer OX
item 7 : calculer OZ
item 8 : calculer BC

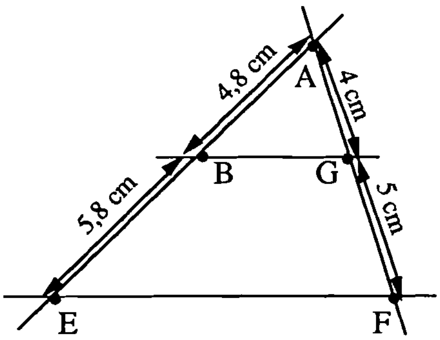
figure 3

Exemple : «OY = 6 + 12 = 18

«$OC = \frac{3}{6} \times 18$ BC = 9 - 3 = 6»

Ainsi, alors que les situations de proportionnalité avec deux sortes de quantités privilégient en général un sens unique de l'application, la figure permet une double lecture de (Δ) vers (Δ') ou de (Δ') vers (Δ). Nous avons d'ailleurs demandé ces deux lectures dans un exercice au début de la séquence. Mais l'une d'elles est dominante à cause des habitudes de balayage visuel d'une feuille : de gauche à droite et de haut en bas.

5. Enfin, nous observons une erreur due à une conception non linéaire de la projection ; nous l'appellerons erreur additive. Elle apparaît dans un problème plus difficile qu'un calcul de longueur, puisqu'il s'agit, par un raisonnement par l'absurde, de montrer que les droites ne sont pas parallèles, les grandeurs n'étant pas proportionnelles.



item 9 : Les droites (BG) et (EF) sont-elles parallèles ?

figure 4

Deux élèves écrivent que les droites (EF) et (BG) sont parallèles. Ils le justifient en affirmant

que la projection de AB est BE
que BE = AB + 1
que la projection de AG est GF
et que GF = AG + 1

Ajouter 1 a, par sa simplicité, un tel effet attractif, que ces élèves se trompent à la fois sur les correspondances et sur la proportionnalité. L'un d'eux complète même en écrivant «ce sont des grandeurs proportionnelles». Cette écriture de la proportionnalité n'est attachée qu'au contexte géométrique, car l'élève résout correctement un problème construit avec les mêmes données, mais avec deux sortes de quantités.

L'erreur additive évoque une autre erreur relevée dans le pré-test : un élève y a déclaré que la projection d'un segment avait même longueur que le segment initial. Pour lui, le parallélisme est associé à la conservation des longueurs, indépendamment de la position relative de la sécante et des parallèles, et l est égal à d.

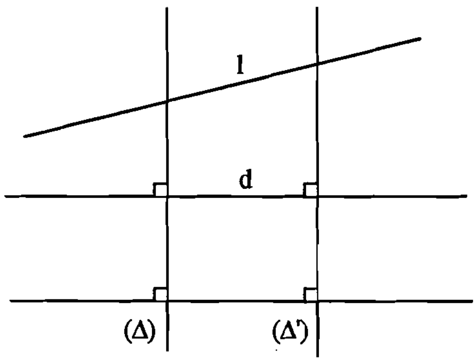


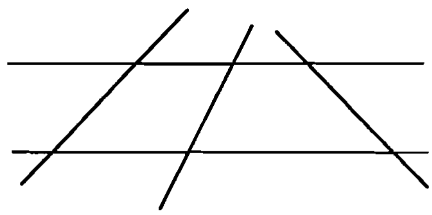
figure 5

Or, l'invariance des longueurs sur les sécantes entre deux parallèles n'est vraie que pour des sécantes perpendiculaires aux droites (Δ) et (Δ'). «L'oubli» de cette position de la sécante, dans le souvenir de l'invariance des longueurs, favorise l'erreur additive.

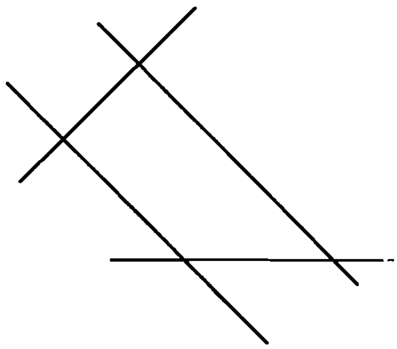
III - Quelques difficultés

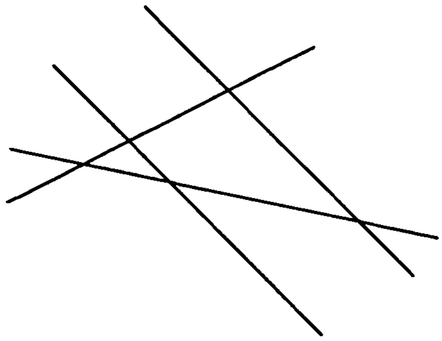
1. Nous avons varié les situations d'apprentissage sur l'aspect géométrique de la façon suivante :

- plusieurs sécantes peuvent être dessinées ;

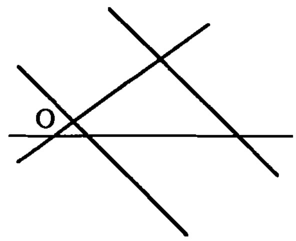


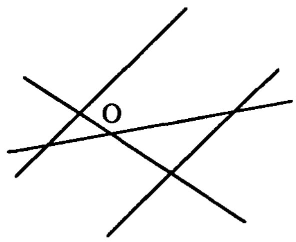
- le point d'intersection des deux sécantes est, ou n'est pas, dessiné sur la feuille ;





- le point O d'intersection des sécantes est visible sur la feuille et on considère des points qui sont soit du même côté par rapport à O, soit de part et d'autre (figure croisée).





Le «croisement» de la figure fait échouer certains élèves. Cette situation apparaît plus difficile qu'une situation «non croisée». Ainsi, à l'item 6 (figure 3 plus haut), nous observons une sorte de refus du «croisement», une centration sur la partie de droite, «non croisée» de la figure, avec des mises en correspondance inexactes, notamment de XY avec BD au lieu de BC pour la seule raison que les longueurs XY et BD sont données. Or les données pertinentes se trouvent dans la partie gauche de la figure. Celles qui sont situées dans la partie droite sont utilisées à tout prix. Le tout (le segment [BD]) est confondu avec une de ses parties (le segment [BC]). Le «croisement» crée une inversion spatiale qui perturbe les automatismes.

2. La distribution des données numériques sur la figure permet également de varier la difficulté des situations :

a) Les longueurs en correspondance sont directement lisibles sur la figure (par exemple, figure 2). C'est le plus simple.

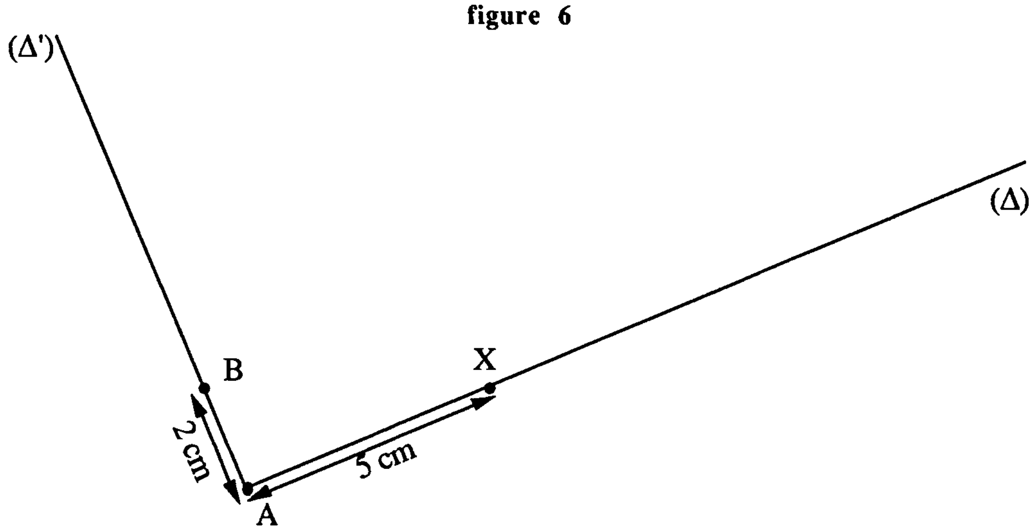
b) La mise en correspondance nécessite un travail préalable de décomposition ou de composition (par exemple, figure 3). Le segment [BD] n'a pas pour projection [XY], mais [XZ]. Donc, pour calculer la longueur OZ, tout élève utilisant le rapport de projection doit

- soit calculer d'abord XZ comme image de BD (donc appliquer la projection sur les données immédiates), puis la somme OZ = OX + XZ ;
- soit calculer d'abord la somme OD = OB + BD, puis son image OZ (donc effectuer une composition préalablement à la projection).

Nous avons observé la première procédure pour 6 élèves et la deuxième pour 2 élèves. Mais certains élèves échouent dans l'utilisation de ces compositions et ils essaient de les éviter, comme si le segment [XY] était la projection de [BD].

c) Des situations numériquement identiques peuvent être associées à des figures différentes et constituer des niveaux de difficulté différents, comme nous allons le voir avec les figures 6 et 2.

figure 6



item 1 : construire C sur (Δ') tel que BC = 2 cm. Construire Y sur (Δ) tel que (CY) ‖ (BX). Calculer XY.

item 2 : construire D sur (Δ') tel que AD = 6 cm. Construire Z proj. de D sur (Δ) suivant (BX). Calculer AZ.

item 3 : construire E sur (Δ') tel que AE = 7 cm. Construire W proj. de E sur (Δ) suivant (BX). Calculer AW.

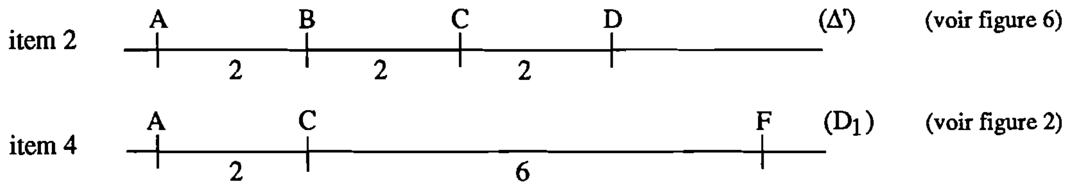
Dans l'item 2, pour calculer la longueur AZ, image de AD, les élèves ont effectué :

- soit une analyse additive de la longueur AD en pensant le segment AD comme réunion bout à bout de trois segments de même longueur. Alors AD = 2 + 2 + 2 ;
- soit une analyse multiplicative : AD = 2 × 3.

Sur le plan du numérique, cette analyse multiplicative constitue déjà une étape supplémentaire, mais un pas est aussi franchi sur le plan du géométrique, car elle indique une conception de la droite plus «ponctualisée» que dans la procédure précédente, puisqu'elle s'appuie sur une graduation de la droite d'unité 2 cm. Elle devrait être plus performante. Nous constatons en effet que 6 des 10 élèves utilisant cette procédure sont capables de l'appliquer à la longueur AE, AE = 2 × 3,5, qui présente comme difficulté supplémentaire l'utilisation d'un opérateur décimal (simple).

Précédemment, les élèves avaient construit la projection d'une graduation régulière d'unité 1 cm, avec un rapport de projection égal à 0,8.

Les items 1, 2, 3 demandaient aussi une construction de points. Nous espérions la réutilisation de l'opérateur scalaire 3 sur une sécante, dans l'exercice suivant qui comprend lui aussi les longueurs 2 et 6 sur une même sécante. Or, 4 élèves sur 10 changent de procédure. Certes, la donnée de la figure, toute construite, fait disparaître le guidage, mais, surtout, une analyse approfondie nous permet de remarquer deux distributions différentes des longueurs 2 et 6.



Dans l'item 2 de la figure 6, nous avons une configuration d'inclusion (de 2 par rapport à 6) ; dans l'item 4, une configuration de juxtaposition bout à bout. Cette dernière configuration ne permet pas aussi aisément que la précédente de repérer la structure multiplicative sur la sécante. Sur les dix élèves qui utilisent un opérateur scalaire sur une sécante pour calculer la projection de CF, quatre font une lecture de type inclusion sur la configuration de juxtaposition : ils se rapportent à «l'origine A», utilisent l'opérateur scalaire 4 et font ainsi un détour pour calculer DG en s'inspirant de l'item 2.

«AF = 4 × AC = 8 | voir figure 2
«AG = 4 × AD = 20 cm   AG - AD = DG = 15 cm» | page 46

Cette observation indique que l'utilisation du théorème de Thalès, même réduite à des calculs de longueurs, n'est pas seulement un problème numérique, mais aussi un problème géométrique pour la solution duquel les configurations spatiales ont de l'importance.

IV - Analyse de la séquence

1. Les élèves recevaient les feuilles d'exercices au fur et à mesure de l'avancement de leur travail. La correction était écrite au tableau quand l'ensemble des élèves avait terminé un exercice. Elle a comporté la présentation des correspondances projectives entre les points, les segments, leurs longueurs et les mesures.

Le raisonnement s'est donc toujours situé à trois niveaux en même temps : niveau géométrique (les points et les segments), niveau des grandeurs (les longueurs), niveau numérique (les mesures). L'observation nous montre que les élèves ne maintiennent pas toujours ces trois niveaux simultanément dans leur esprit, et certaines de leurs difficultés sont dues à une imbrication insuffisante entre le géométrique et le numérique.

Certains élèves se souvenaient du théorème de Thalès sous la forme :

$$\frac{\text{proj (AB)}}{\text{AB}} = \frac{\text{proj (CD)}}{\text{CD}}.$$

Le théorème a été rappelé dans une forme «ouverte» :
«les longueurs des projections des segments d'une droite sur une autre droite, suivant une direction, sont proportionnelles aux longueurs des segments initiaux», la forme sous laquelle se traduirait la proportionnalité étant laissée à l'initiative des élèves.

Dans la correction au tableau, la proportionnalité a été traduite, à la fois par l'opérateur scalaire sur une sécante et par l'opérateur rapport de projection d'une sécante sur l'autre. Par exemple :

$$\begin{tikzcd} 2 \arrow[r] \arrow[d, bend right, "\times 3"'] & 5 \\ 6 \arrow[r] & {} \end{tikzcd}$$

ou bien

$$\begin{array}{l} 2 \xrightarrow{\times 2,5} 5 \\ 6 \longrightarrow \end{array}$$

La fonction linéaire est explicitement désignée, dans le deuxième cas. Quand «le produit en croix» était proposé par un élève, il était accepté, mais non écrit au tableau, donc moins légitimé. En effet, notre objectif était que les élèves l'utilisent le moins possible de façon automatique pour qu'ils diversifient leurs procédures.

2. Par ailleurs, les travaux de G. Vergnaud (1981) et des travaux anglo-saxons (K. Hart, G. Noelting) établissent que le choix des valeurs numériques permet de graduer la difficulté : des petites valeurs entières, aux valeurs décimales issues de fractions de dénominateur 2, aux valeurs décimales inférieures à 1, aux valeurs fractionnaires sans écriture décimale finie, l'éventail des possibilités s'ouvre. Nous avons tenu compte de ces résultats, dans le choix des valeurs numériques de nos exemples, pour établir une progression.

3. Nous avons retenu trois grands types de procédures, utilisées par les élèves au cours de la séquence didactique :

a) **Procédure de type «homomorphisme»** (notée H).

Elle correspond à l'analyse «verticale» selon G. Vergnaud.

La projection de (Δ) sur (Δ') parallèlement à (δ) est un homomorphisme de (Δ) sur (Δ') car, si A, B, C, D sont des points de (Δ), on peut écrire :

$$\text{proj}(\alpha\, AB + \beta\, CD) = \alpha \cdot \text{proj}(AB) + \beta \cdot \text{proj}(CD)$$

où α et β sont des nombres réels. Nous en rencontrerons des formes particulières :

- si AB = CD alors proj(AB) = proj(CD) : la projection conserve l'égalité ;
- proj(AB + BC) = proj(AB) + proj(BC) : la projection conserve l'addition ;
- $\text{proj}(\alpha\, AB) = \alpha \cdot \text{proj}(AB)$: la projection conserve l'opérateur scalaire sur une sécante.

b) **Procédure de type «opérateur-fonction» ou «fonction linéaire»** (notée F).

Elle correspond à l'analyse «horizontale» selon G. Vergnaud.

L'application f qui associe aux longueurs sur (Δ) les longueurs des segments projetés sur (Δ') s'écrit :

$$AB \xmapsto{f} k \cdot AB \qquad \text{proj}(AB) = k \cdot AB$$

où, k constante, est le rapport de projection de (Δ) sur (Δ').

c) **Procédure de type «relation quaternaire»** (notée Q).

La proportion, comme égalité de deux rapports $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ semble envisagée en bloc, en tant que quadruplet ; que cette proportion soit écrite ou non, nous observons l'utilisation des «produits en croix» ad = bc, voire directement d'une quatrième proportionnelle (exemple : $a = \frac{bc}{d}$).

4. Comparons maintenant les diverses utilisations des procédures selon les données numériques et les configurations géométriques. Cette comparaison laissera de côté l'analyse détaillée des erreurs dont le relevé ne peut être exhaustif compte tenu du mode de fonctionnement : les élèves pouvaient travailler avec leur voisin ou demander une explication au professeur. D'autre part, ils n'ont pas toujours accepté de laisser leur erreur sur la feuille que nous relevions, à partir du moment où elle était reconnue comme telle.

a) Procédure H (homomorphisme).

Nous avons largement favorisé l'usage de cette procédure. Elle se retrouve dans une réponse exacte sur deux. Elle est utilisable assez facilement dans dix items sur onze. Pour sept d'entre eux, l'opérateur est entier (1, 2, 3, éventuellement 4), repérable à partir de nombres entiers (2, 3, 4, 6, 12, ...). Pour trois autres items, l'opérateur est décimal, issu d'une division par 2 ou par 3. Mais la simplicité de l'opérateur n'entraîne pas nécessairement son utilisation. L'action de construction de la figure dans les trois premiers items attire l'attention sur chaque sécante ; c'est là que nous trouvons les plus fortes utilisations de la procédure H : 84 % des réponses exactes pour les deux premiers items, 68 % pour le troisième où l'opérateur scalaire sur une sécante est $\alpha = 3{,}5$ donc non entier, ce qui peut expliquer la baisse de fréquence à l'intérieur du même exercice (figure 6).

Quand le guidage diminue, d'autres procédures tendent à prendre la place. Cependant, la conservation de l'égalité est bien repérée à l'item 6, bien que la figure soit croisée (81 % des réponses exactes à cet item). Elle l'est moins à l'item 10 (36 % des réponses exactes), où se glisse en outre le problème du repérage d'une moitié par rapport à un tout, dans un exercice où les mesures n'ont pas été écrites sur la figure mais à côté (figure 1).

b) Procédure F (coefficient de la fonction linéaire).

Elle est utilisée dans 50 réponses exactes sur 178 (28 %), donc bien moins souvent que la procédure H, mais ceci est en relation avec le choix des valeurs des opérateurs que nous avons fait. Une seule valeur du rapport de projection, d'une droite sur une autre droite, est entière : dans l'item 7, avec k = 2. Nous y observons cette procédure dans 9 des 14 réponses exactes (64 %). L'opérateur-rapport de projection est alors préféré à l'opérateur scalaire $\alpha = 3{,}5$ sur chaque sécante (figure 3). L'utilisation de cette procédure augmente encore à l'item 8 du même exercice. Le repérage de k = 2 a déjà été fait à l'item 7 ; donc il est facilement réutilisé à l'item 8 par 7 des 9 élèves, bien que l'opérateur scalaire sur (Δ') soit lui aussi entier ($\alpha = 2$) et bien qu'il faille inverser le rapport de projection pour calculer un antécédent (11 des 16 réponses exacte - soit 69 %). Mais nous avons déjà noté que l'inversion ne semble pas un obstacle majeur pour les élèves. Le rapport de projection k = 2 de (Δ) sur (Δ'), même inversé est privilégié par rapport à l'opérateur scalaire $\alpha = 2$ sur (Δ').

Plus encore, dans l'item 11 (figure 1), le rapport de projection de (Δ) sur (Δ') est un décimal : 1,6 issu de 11,2 divisé par 7. On ne peut guère le qualifier d'évident. Cependant il est utilisé correctement, aussi souvent que l'opérateur scalaire $\alpha = \frac{1}{2}$ sur (Δ') (5 élèves). Ce dernier nécessite, il est vrai, une coordination supplémentaire : repérer le milieu de [OB] et la conservation du milieu dans la projection sur (Δ').

D'autre part, si nous comparons les items 4 et 5 (figure 2), nous constatons que les rapports de projection de (D_1) sur (D_2) et de (D_1) sur (D_3), respectivement 2,5 et 1,8, apparaissent de même difficulté puisqu'ils sont obtenus à partir d'une division par 2. Ce sont les mêmes élèves qui les utilisent pour les deux items (5 élèves).

c) Procédure Q (relation quaternaire).

Nous la trouvons dans 37 réponses sur 178 (21 %) dont un quart ne fait référence ni à une mise en correspondance, ni à une proportion, et donne directement l'expression de la 4ème proportionnelle. L'automatisme, opérant uniquement au niveau des nombres, apparaît ici comme un obstacle à une évolution de la conceptualisation commencée au collège.

Citons quelques réflexions relevées dans la bande magnétique de la séquence :

«Le produit en croix, ça va vite».
«Il faut faire le produit en croix parce qu'on a une inconnue» (la 4ème proportionnelle).
«Ça revient au même que l'année dernière, on faisait deux divisions égales. On avait les trois autres et on en cherchait une. On faisait les produits en croix».
Mais aussi : «Alors maintenant, on va pouvoir utiliser le produit en croix».

Ceci laisserait entendre que la procédure Q a été effectivement perçue comme illégitime, puisque non écrite au tableau. Elle n'a donc pas été utilisée aussi souvent que les élèves en avaient eu envie. Ils ont ainsi pu et dû mettre en œuvre d'autres procédures.

Que signifie l'absence d'utilisation de la procédure Q ?

Cinq élèves ne s'en servent jamais, dont trois échouent à l'item 11 c'est-à-dire à l'item où les opérateurs ont les valeurs numériques les moins simples de toute la séquence didactique. Ils ne réussissent pas à traiter une égalité de rapports en tant que relation quaternaire, et se réfugient alors dans les procédures H et F (qui ne mettent en relation que deux éléments à la fois), éventuellement avec des abus. Ainsi, trois élèves utilisent une valeur approchée d'un opérateur fractionnaire sur une sécante (item 9 et 11), évitant par là l'écriture de la proportion. Par ailleurs, un élève n'utilise la procédure Q qu'une seule fois, et se trompe.

Près de la moitié des réponses correctes avec la procédure Q se trouve dans les items 9 et 11, c'est-à-dire les situations numériques les plus complexes. Ceci correspond à notre attente, ainsi que la diversité des procédures utilisées par les élèves.

Enfin, bien que notre relevé d'erreurs ne soit pas exhaustif, nous devons remarquer que les pourcentages d'erreurs pour la procédure Q et la procédure F sont très voisins, mais que celui de la procédure H est nettement inférieur.

Procédures	H	F	Q
Réussite	90	50	37
Echec	6	10	7
Total	96	60	44
Echec/total	6 %	17 %	16 %

Tableau 1. **Utilisation des procédures**

Certes, les choix numériques facilitaient la mise en œuvre de la procédure H (sans empêcher l'utilisation de la procédure F). Mais ces choix ont permis la réussite dans un travail géométrique, même pour les élèves qui échouent avec la procédure Q. Certains utilisent la 4ème proportionnelle comme une carte de la dernière chance qui pourrait leur fournir la réponse exacte même quand ils ne réussissent pas à établir correctement les correspondances. Ainsi, la conceptualisation incomplète de la proportionnalité est encore affaiblie par une lecture insuffisante de la figure.

5. Si nous tentons d'évaluer les progrès des élèves, nous constatons, en comparant le pré-test, qu'il y a disparition complète des non réponses et que le nombre de réussites augmente pour tous les exercices. Au pré-test, les exercices 5 et 6 n'avaient pas été proposés aux élèves ayant échoué à l'exercice 2, plus facile. Le nombre de «productions» augmente notablement d'un test à l'autre : 53 pour le pré-test (plus 12 non-réponses) et 85 pour le post-test (voir annexe 2) : tous les élèves ont répondu à tous les exercices, parfois en proposant plusieurs procédures.

Par ailleurs, l'écriture explicite des correspondances entre les longueurs est très fréquente, quelle que soit la procédure utilisée par la suite, au post-test.

Procédures	Pré-test		Post-test	
H	4	6 %	44	52 %
F	13	20 %	7	8 %
Q	24	37 %	24	28 %
Erreur additive	11	17 %	9	11 %
Autre erreur	1	2 %	1	1 %
Non réponse	12	18 %	0	
Total	65	100 %	85	100 %

Tableau 2. **Procédures utilisées au pré-test et au post-test**

Notons la très forte augmentation de l'apparition de la procédure H, assortie de la baisse d'utilisation pour Q (en pourcentage) et encore plus pour F. Le pourcentage d'erreurs additives (l'élève ajoute une constante au lieu de multiplier par une constante) est en baisse. Il persiste cependant une conception non linéaire des longueurs, parfois juxtaposée à une conception linéaire. Deux modèles coexistent, comme l'indique G.Brousseau (1979) : le modèle faux et le modèle vrai. La séquence didactique ne leur a pas permis d'éprouver suffisamment leur modèle faux et ils ont adopté le modèle vrai comme une règle, plutôt que comme une conception.

Conclusion

Les élèves recherchent plus la pseudo-sécurité d'un algorithme que l'algorithme lui-même. En effet, tant que la situation ne présente pas pour eux trop de difficultés, ils utilisent les procédures H et F (avec les opérateurs). Devant un obstacle, ils cherchent une «recette» auprès du voisin ou dans leurs souvenirs et se jettent sur la 4ème proportionnelle. Pour lutter contre l'erreur additive, nous avions construit les items 1-2-3, qui permettent d'utiliser la conservation de l'addition dans la projection, par opposition à l'addition d'une constante. Cela n'a pas été suffisant. Une confrontation directe entre l'enseignant et l'élève, à propos de l'erreur additive, pourrait-elle permettre son abandon ? Une séquence didactique peut-elle modifier de façon très importante les conceptions des élèves ?

Enfin, l'analyse des procédures utilisées par les élèves, et celle de leurs erreurs, nous a permis d'étudier plus en profondeur le contexte géométrique que nous considérions au départ essentiellement comme «une toile de fond» du numérique. Or c'est bien dans la conjonction du spatial et du numérique que se situe l'intérêt de nos situations et finalement la richesse conceptuelle du théorème de Thalès.

Bibliographie

BROUSSEAU G., 1979. L'étude des processus d'apprentissage en situation scolaire. *Center for studies in sciences education.* Leeds, England.

BROUSSEAU G., 1983. Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* Vol. 4.2, Ed. La pensée sauvage Grenoble.

DAHAN DALMECO A., PEIFFER J., 1986. *Une histoire des mathématiques, routes et dédales.* Points sciences, Seuil.

HART K., 1981. *Children's understanding of mathematics* : Oxford. John Murray.

LABORDE C., 1984. Exposé sur la géométrie. *IIIème école d'été de didactique des mathématiques.* Edition des actes. Université I de Grenoble et CNRS.

NOELTING G., 1980. The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part I. Part II. *Educational Studies in Mathematics* 11, pp. 217-253 ; pp. 331-363.

VERGNAUD G., 1987. Les fonctions de l'action et de la symbolisation dans la formation des connaissances chez l'enfant. *Psychologie.* La Pleïade. Ed. Gallimard.

VERGNAUD G., 1981. *L'enfant, la mathématique et la réalité.* Peter Lang.

Annexe 1 : Relevé des procédures par item et par élève

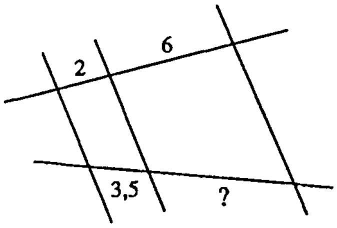
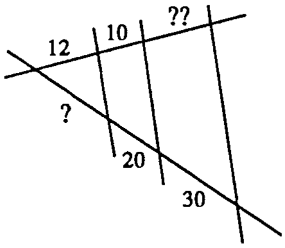
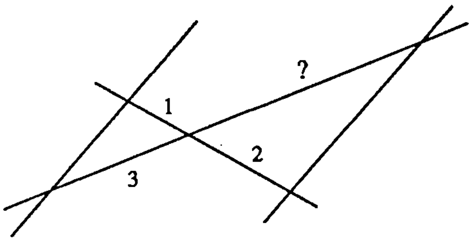
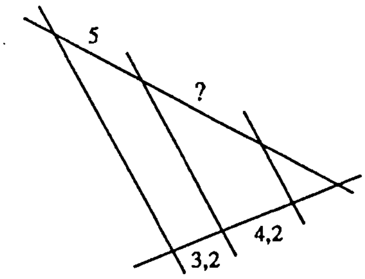
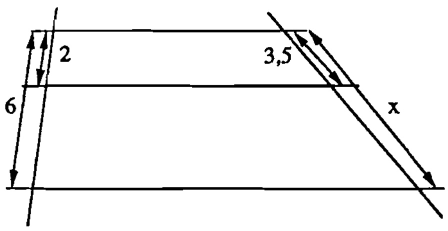
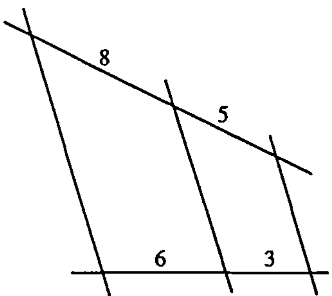
	n° item			1	2	3	4	6	7	8	9	11	12	13	14	15	16	17	18	20	21	22	réussites	erreurs
figure 6	1	XY	H	X	X	X	X	X	X		X	X	X	X	X	X			X	X	X	X	16	0
			F							X							X						2	0
			Q															X					1	0
	2	AZ	H	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X			X		X	X	16	0
			F														X						1	0
			Q															X					1	0
			I																	X			1	0
	3	AW	H	X	X	X	X		X		X	X	X	X	X					X	X	X	13	0
			F					X		X							X		X				4	0
			Q													X		X					2	0
figure 2	4	DG	H		X	X	X	X	X		X			X	X	X			E		X		10	1
			F	X						E		X					X			X			4	1
			Q										X					X				X	3	0
	5	EH	H		X	X	X	X	X		X				X	X			E		X		9	1
			F	X						X		X		E			X			X			5	1
			Q										X					X				X	3	0
figure 3	6	OX	H	X	X	X	X	E	X	X		X			X	X			X	X	X	X	13	1
			F								X			E			X						2	1
			Q										E					X					1	1
	7	OZ	H		X			X															2	0
			F	X			X			X	X	E	X	X	X				X	E	X		9	2
			Q						X							E	E	X				E	2	3
			I			X																	1	0
	8	BC	H		X		X																2	0
			F	X		X		X		X	X	X		X	X			X	X		X		11	0
			Q						E				X			X	E					X	3	2
			I																	E			0	1
figure 4	9		H											X			E	X			X		3	1
			F	X	X					X													3	0
			Q			X	X				E	X	X		X	X			X		X		8	1
			HF																	X			1	0
			Ad					E	E														0	2
figure 2	10	OF	H		X		X					X			X						X		5	0
			F	X				E	E				X	X			E			X		X	5	3
			Q			X										X		X	X				4	0
			NR																				0	2
	11	OC	H		E		E																0	2
			F	X				E	E			X								X			3	2
			Q										X	X	X	X	X	X	X		X	X	9	0
			NR																				0	3

X : réponse exacte - E : erreur

Procédures :

H : (homomorphisme)
F : (fonction linéaire)
Q : (relation quaternaire)
I : (injustifié)
Ad : (procédure additive)
NR : (non réponse)

Annexe 2 : comparaison des procédures utilisées entre le pré-test et le post-test (11 élèves)

		Pré-test	Post-test
	Ex. 2	6 Q (5 ER, 1 P) 3 Add 1 EP 1 NR	7 H 4 Q (4 P) 2 Add
	Ex. 3 1)	6 Q (5 R, 1 P) 5 F 2 NR	8 H 3 Q (3 P) 1 F
	2)	8 F 2 Q (2 ER)	9 H 1 F 1 Q (1 P)
	Ex. 4	7 H 2 Q (2 ER) 3 NR	6 H 4 Q (4 P) 1 F 1 AD
	Ex. 5	3 Q (3 ER) 2 Add 2 NR	3 H 3 F 5 Q (5 P) 1 Add 1 × et +
	Ex. 6	20H 3 Q (3 ER) 2 Add	7 H 1 F 3 Q (3 P) 1 Add
 parallèles ?	Ex. 7	2 H 2 Q (2 ER) 4 Add 3 NR	4 H 4 Q (2 ER, 2 P)

H : homomorphisme
F : opérateur-fonction
Q : relation quaternaire
P : calcul de la 4ème proportionnelle
ER : égalité de rapport
EP : égalité du segment et de sa projection
NR : non réponse (ne sait pas)
Add : addition

Le total des procédures est supérieur à 11 pour certains exercices car quelques élèves en ont proposé plusieurs.