LE PASSAGE DE L'ARITHMETIQUE A L'ALGEBRIQUE DANS L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES AU COLLEGE

Troisième partie

VOIES D'ATTAQUE ET PROBLEMES DIDACTIQUES

Yves Chevallard
IREM d'Aix-Marseille

I - La modélisation comme concept

I.1. *La connaissance antécédente de l'objet d'étude*

On a montré, dans la seconde partie de ce travail (Chevallard, 1989 a), en quoi la notion de *modélisation* permet de rendre compte de l'activité mathématique. Cette notion est fondée sur une distinction classique : celle du *système* (à étudier) et de ses *modèles* (qui en permettent l'étude). Mais le remaniement qu'on a tenté d'y opérer conduit, nous semble-t-il, à une notion étendue, triplement unificatrice.

Tout d'abord, on l'a souligné (*ibid.*, pp.60-61), la perspective proposée permet de prendre une vision d'ensemble sur l'enseignement des mathématiques, depuis la Maternelle jusqu'à l'Université. Mais nous nous arrêterons maintenant sur un autre apport, peut-être plus frappant encore pour qui se réfère à l'usage aujourd'hui courant du terme de modélisation : la modélisation, au sens où nous employons ce mot, peut porter aussi bien sur un système *non mathématique* (ce qui répond à l'emploi usuel du mot) que sur un système *mathématique*.

C'est là sans doute une affirmation qui, parce qu'elle semble ignorer les frontières entre les mathématiques et la physique, la biologie, etc., ne plaira ni au physicien, ni au biologiste, ni encore à tous ceux qui disent pratiquer la «modélisation mathématique» ou avoir recours à elle. Que faites-vous, diront-ils peut-être, de la *connaissance* - physique, ou biologique, etc. - *du système* qu'il s'agira de modéliser «mathématiquement» ? Direz-vous - et, déjà, croyez-vous - que les mathématiques suffisent, à elles seules, à mener à bien la mathématisation visée ?

La réponse à cette irritation est que, précisément, il s'agit *d'importer cette inquiétude jusqu'au coeur même du travail mathématique*, tel du moins que l'Ecole le représente et le réalise traditionnellement. S'il est bien vrai que le maniement de l'outil mathématique suppose une connaissance de l'objet - du système - à mathématiser, cela n'est pas vrai seulement des systèmes qu'étudient la physique, la biologie, etc. *Cela est vrai dès l'étude des systèmes mathématiques les plus simples.*

I.2. *La mise en rapport du mathématique et du mathématisé*

Que la chose ne soit pas ordinairement soulignée est évident. Le nom englobant de *mathématiques*, et plus encore le substantif singulier *mathématique*, en portent témoignage. Cette oblitération semble n'avoir encore que peu d'effet tant qu'il y a, en quelque sorte, homogénéité du système et du modèle. Mais dès que la distance de l'un à l'autre s'accroît, dès que, par exemple, on veut se donner un modèle *algébrique* d'un phénomène *géométrique* (ou l'inverse), alors les choses vont autrement.

Surgit là, en effet, un hiatus épistémologique : celui sur lequel physiciens et biologistes attirent notre attention, et qui ne peut manquer d'avoir sa traduction didactique. La délimitation du système, la construction du modèle, la problématique même du travail du modèle, prennent appui sur notre *connaissance antécédente* du domaine de réalité dont il s'agit d'étudier l'un des fragments - le système considéré. Comment penser que nos seules forces «mathématiques» soient engagées dans l'aventure ?

Par un principe de continuité que l'on ne cherchera pas à justifier ici, le soupçon peut alors raisonnablement se porter vers ces cas où l'homogénéité supposée du système et de son modèle paraît éliminer d'emblée tout problème de cet ordre. Tel est, si l'on veut, notre postulat : c'est bien *toute activité mathématique*, aussi transparente semble-t-elle, qui devra dès lors être réexaminée de ce point de vue.

Notre thèse, pour la rappeler brièvement, est qu'il y a toujours, sinon structurellement, du moins *fonctionnellement*, deux plans, celui *du système* - le «mathématisé» -, et celui *du modèle* - le «mathématique» ; que chacun relève d'un registre de connaissance propre ; et que la *mise en rapport* de ces deux plans dans et par le travail de modélisation suppose un *troisième type de connaissance*, que l'absence ou l'évitement du concept de modélisation permet d'occulter.

D'occulter ; non d'ignorer tout à fait. Ce troisième type de connaissance, en effet, est bien représenté, mais de manière partielle, déformée, dans le langage ordinaire de la classe : il s'y réduit au mot d'*application* (sur lequel nous reviendrons). Il s'y représente et s'y réduit encore, dans la période récente, à travers quelques autres signifiants «magiques», ceux d'*activité* et de *résolution de problèmes* notamment : nous verrons que tout cela, bien sûr, n'est pas sans raison.

I.3. *L'Ecole et la société : un exemple*

De la même façon que le concept de modélisation permet de prendre une vue d'ensemble sur les activités de production de connaissances relevant de disciplines de savoir différentes (physique, biologie, etc.), ou de secteurs différents d'une même discipline (numérique, algébrique, géométrique, etc.), la lecture de l'activité mathématique comme activité de *modélisation* mathématique permet en outre de pointer, *de l'intérieur même de l'Ecole*, un aspect fondamental *de la gestion sociale des connaissances*.

Nombre de connaissances que nous «côtoyons» chaque jour, par le fait des médias ou des modes traditionnels de transmission (famille, groupe d'amis, etc.), sont en effet produites *à l'aide de mathématiques*. Elles sont le fruit *de modélisations mathématiques*. En ce sens, comme la plupart des «objets» - objets matériels ou objets de savoir - produits aujourd'hui, elles «incorporent» des mathématiques ; mais, au niveau de la pratique sociale où nous rencontrons ces objets, ces mathématiques «cristallisées» dans les objets *sont généralement devenues presque entièrement invisibles* (Chevallard, 1988 b).

Le concept de modélisation permet alors d'interroger la *production* même de ces connaissances, et de rétablir par cela *une certaine visibilité culturelle de la prégnance et du fonctionnement social du savoir mathématique*. Nous ne donnerons ici qu'un seul exemple.

Une affirmation fréquemment entendue à propos des sociétés européennes actuelles concerne le *vieillissement* de la population. On ajoute que, afin de combattre cette évolution, il convient de favoriser la naissance d'un *troisième enfant* (d'où, notamment, des politiques d'aide «au troisième enfant»). Plus précisément encore, le nombre de familles accueillant trois enfants (ou plus) doit, dit-on, être suffisamment élevé pour que le nombre *moyen* d'enfants par famille dépasse 2, et même, plus exactement, 2,10. D'où provient ce chiffre ? C'est de ce point que partira l'enquête.

Pour répondre à cette question, il convient d'identifier le savoir à partir duquel une telle connaissance a été mise en circulation. Il s'agit ici, bien sûr, de la *démographie* (Legrand, 1979, pp.25-27). La poursuite de l'enquête met alors en évidence un concept démographique qui est, en l'espèce, la notion-clé : celle de «remplacement des générations». Le premier point que l'on peut noter, à cet égard, est le suivant : cette notion se formule en ne tenant compte que de la population *des femmes*. On suppose en effet qu'il y a toujours suffisamment d'hommes, et cela parce que, s'il y a suffisamment de femmes, il en ira de même des hommes, *puisqu'il naît à peu près autant d'hommes que de femmes*.

On dira donc que, du point de vue auquel on s'intéresse ici, le «remplacement des générations» est assuré lorsque, *en moyenne*, une femme *en âge de procréer* est «remplacée», à la génération suivante, par une femme (au moins) elle-même en âge de procréer. Mais qu'est-ce qu'une femme «en âge de procréer» ? La définition retenue par les démographes, légèrement arbitraire, est fort simple : c'est une femme entre 15 et 49 ans. On néglige donc les naissances, fort peu nombreuses, avant 15 ans ou après 49 ans.

Cela noté, puisque l'on raisonne «en moyenne», on peut, afin de comprendre la question du remplacement des générations, recourir à l'image suivante (qui se réfère à chaque femme prise individuellement et ne constitue donc qu'une manière de parler) : arrivée à l'âge de procréer, toute femme doit chercher à être remplacée par une femme en âge de procréer, c'est-à-dire doit avoir une fille qu'elle conduira jusqu'à l'âge de quinze ans ; elle aura alors accompli son «devoir» de «remplacement des générations»...

Bien entendu, c'est au niveau de *l'ensemble des femmes*, et non à celui de chaque femme prise individuellement, que le phénomène de remplacement est étudié. Supposons donc que, dans une population donnée, le nombre moyen de *naissances* par femme (en âge de procréer) soit x. Peut-on alors déterminer, en fonction de x, le nombre moyen, F(x), de femmes en âge de procréer qui en résultera ? Si cela est possible, on pourra dire alors que le remplacement des générations sera assuré si l'on a : $F(x) \geq 1$.

Comment maintenant déterminer F(x) ? On peut envisager de procéder en deux étapes. On détermine d'abord le nombre moyen, f(x), de filles qui naissent, puis on ne considère, parmi celles-ci, que celles qui atteignent l'âge de procréer, soit 15 ans. La première étape se règle aisément : il naît toujours à peu près 105 garçons pour 100 filles. Pour assurer la naissance de *100 filles*, il faut donc (en moyenne !) assurer *205 naissances*. On en déduit que l'on a : $f(x) = (100/205)x$.

De ces filles, une fraction n'atteindra pas l'âge de procréer. Posons qu'une naissance féminine conduira en moyenne à k femmes en âge de procréer, avec $k < 1$. Il vient alors : $F(x) = (100/205)kx$. Tel est le *modèle* obtenu: il s'agit d'une fonction linéaire, contenant un paramètre k.

Le coefficient k est variable. Il a fortement diminué depuis un siècle et demi, essentiellement parce que la mortalité infantile a baissé. La résolution de l'inéquation

$F(x) \geq 1$ conduit alors à : $x \geq 205/(100k)$. Cette inégalité montre que, dans tous les cas, la valeur *minimale* de x assurant le remplacement des générations *sera supérieure à 2,05*. Si l'on suppose par exemple que, sur 128 naissances féminines, 122 conduiront à des femmes en âge de procréer, on a $k = 122/128$, et donc $x \geq (205.128)/(100.122)$, soit 2,15 environ.

Ce chiffre correspond à la génération de 1929. L'augmentation de k, soit la diminution de la mortalité avant 15 ans, l'a fait baisser aujourd'hui à 2,10 environ. Si l'on remonte le temps, on trouve que le nombre moyen de naissances par femme assurant le remplacement des générations était de 4 vers 1800, de 3,5 en 1840, de 3 vers 1896, etc. Le problème que soulignent alors les démographes, et que les médias nous font connaître, c'est que le nombre moyen de naissances par femme est, depuis plusieurs décennies, tombé *en-dessous de 2*. Il était de 1,83 vers 1976 par exemple. Le remplacement des générations n'est donc plus assuré et, par suite, la population française vieillit.

Laissons là notre exemple. D'une manière générale, l'enseignement prodigué à l'Ecole, et notamment au Collège, peut être regardé *comme un moyen social de connaître la société, d'identifier les connaissances et les savoirs qui la façonnent et l'organisent, et d'enquêter sur leur mode social de production.*

L'Ecole apparaît alors comme le lieu *d'une mise en visibilité de la société*. Il s'agira moins d'y «réinventer le savoir», et par exemple de prétendre y «redécouvrir» le théorème de Pythagore, que *d'enquêter sur les savoirs et leurs modes de production.*

On verra alors qu'un *rapport critique aux savoirs*, qui est la véritable signification de ce qu'il y a de meilleur dans notre tradition d'enseignement, mais qui s'y trouve aussi, fréquemment, laminé, aura quelque chance de pouvoir émerger.

I.4. *Enquêter sur les connaissances et les savoirs*

Nous prendrons ici, volontairement, un exemple ultraclassique, afin de montrer que l'enquête épistémologique dont il pourra faire l'objet n'est, en essence, nullement différente de «l'enquête démographique» esquissée plus haut.

Dans l'étude de cette classe de systèmes géométriques que constituent les *triangles rectangles*, plus précisément dans l'étude des *relations métriques* dans le triangle rectangle, on rencontre, dans les manuels[1] , et donc dans la société et dans sa culture, une formule donnant la mesure, h, de la hauteur relative à l'hypoténuse en fonction de divers paramètres du triangle. La formule classique exprime h^2, et donc h, comme fonction des mesures BH et HC des «segments découpés par la hauteur sur l'hypoténuse» (voir la figure 1).

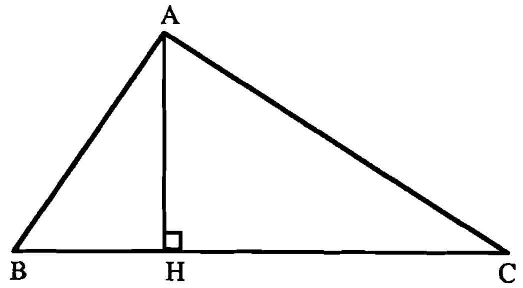

figure 1

1. La place et le statut donnés dans les manuels à la formule à laquelle nous faisons allusion ont varié : nous n'en tenons pas compte ici.

La première question que l'on peut se poser n'est pas : comment *démontrer* cette formule ? Elle consiste plutôt à se demander *pourquoi une telle formule est possible* ; c'est-à-dire pourquoi il est possible d'exprimer AH = h *à l'aide des mesures* BH et HC.

Pour répondre à cette interrogation, il suffit d'observer - moyennant certaines «connaissances antécédentes» sur les systèmes «triangles rectangles» - que la donnée de BH et de HC *détermine complètement* (à une isométrie près) le triangle rectangle ABC. Connaissant BH et HC, en effet, on connaît l'hypoténuse (d'extrémités B et C) et on sait positionner H sur l'hypoténuse. Le point A est alors l'intersection d'un demi-cercle de diamètre l'hypoténuse [BC] avec la perpendiculaire en H à [BC]. Il résulte de cette observation que la valeur de h est *complètement déterminée* par les valeurs de BH et HC, et doit ainsi pouvoir s'exprimer à l'aide de ces paramètres.

Enquêtons maintenant sur la manière d'établir l'expression de h en fonction de BH et HC. On le fera ici sous une contrainte fondamentale, qui marque, à un moment donné, les limites de notre connaissance de la classe de systèmes étudiée : *la seule manière dont on sache exprimer la mesure d'un segment à l'aide des mesures d'autres segments non colinéaires consiste à passer par la relation de Pythagore.*

Cette contrainte implique notamment que l'on doive travailler *avec le carré* des mesures considérées, et que l'on doive travailler *sur des triangles rectangles*. Sur le schéma déjà tracé (figure 1) apparaissent trois triangles rectangles, soit ABC, HAB et HAC. Aucun de ces triangles ne permet de relier *directement* AH avec BH et HC par l'égalité de Pythagore. Les deux derniers triangles permettent cependant d'exprimer h en fonction, respectivement, de AB et BH et de AC et HC :

$$h^2 = AB^2 - BH^2,$$
$$h^2 = AC^2 - HC^2.$$

Aucune de ces deux expressions ne convient ; mais, en ajoutant les égalités membre à membre, on peut faire apparaître la somme AB^2+AC^2 qui, elle, s'exprime à l'aide de BH et HC :

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 = (BH+HC)^2.$$

Il vient donc : $2h^2 = (BH+HC)^2 - BH^2 - HC^2 = 2BH.HC$. D'où enfin : $h^2 = BH.HC$.

Tel est l'aboutissement d'une première partie de notre enquête. Mais le principe posé au départ permet maintenant d'en élargir l'horizon. Puisque le triangle rectangle ABC est entièrement déterminé par la donnée de BH = x et de HC = y, il doit être possible d'exprimer, à l'aide de ces données, *tout «élément», c'est-à-dire tout paramètre, du triangle.* Il en est ainsi, par exemple, pour les côtés de l'angle droit ; on obtient aisément :

$$AB^2 = BH^2 + h^2 = x^2 + xy = x(x+y),$$
$$AC^2 = HC^2 + h^2 = y^2 + xy = y(x+y),$$

De là on tirera l'aire du triangle, $S(x,y) = (x+y)\sqrt{xy}/2$, etc.

On notera au passage que les éléments «linéaires» de la figure s'expriment à l'aide de x et y comme des fonctions *homogènes de degré 1,* tandis que l'aire est une fonction homogène *de degré 2.*

On peut, au-delà, envisager de partir *d'un autre choix de données complètes*, par exemple la mesure r du rayon du cercle circonscrit et la mesure t de l'angle BOA (où O est le milieu de l'hypoténuse). Toute tentative pour exprimer les divers paramètres du triangle va alors buter sur un problème fondamental, le passage de la mesure d'un *angle* à la mesure d'une *longueur*, soit la question des *fonctions trigonométriques* - alors que la détermination de longueurs à partir de longueurs n'avait mis en jeu que des fonctions «algébriques», faisant intervenir addition, multiplication et racine carrée.

Le passage inverse - d'une longueur vers un angle - ferait apparaître la question des fonctions trigonométriques *inverses*, dont on pourra ainsi noter l'étrange absence, fort avant dans le cursus des études[2]. Semblablement, la mise en oeuvre de cette même problématique d'enquête épistémologique dans d'autres contextes permettra de produire une «analyse spectrale» du discours de la culture scolaire, observée dans ses silences, dans l'ordre de ses raisons et de ses partis pris. Un triangle, ainsi, est déterminé par la donnée des mesures a, b, c de ses côtés ; son aire doit donc pouvoir s'exprimer à l'aide de a, b, c, et il en est de même de ses médianes, de ses hauteurs, de ses bissectrices, etc. Mais où trouver les réponses à ces bonnes questions, et comment ont-elles été produites, mises en avant, ou abandonnées ? Notre questionnement conduirait ici à interroger, entre autres, l'histoire et l'épistémologie des mathématiques.

I.5. *La gestion sociale et culturelle des savoirs*

Notre rapport aux connaissances et aux savoirs porte nécessairement la marque de notre rapport à la *production sociale* et à la *gestion culturelle* des savoirs et des connaissances. De ce point de vue, le concept de modélisation permet en particulier de dépasser la vision des connaissances et des savoirs comme *donnés dans la culture*, pour les faire apparaître comme *produits et gérés dans des pratiques sociales spécifiques*, y compris des pratiques «culturelles» (scolaires, éditoriales, etc.). On verra plus loin que les considérations que nous développerons maintenant se situent au coeur de *tout projet d'enseignement*.

Toute connaissance, en effet, est produite par un travail spécifique. Au-delà de cette phase de production, le destin de la connaissance produite peut être très variable. Elle pourra être intégrée à un *savoir*, y être reconnue et y trouver place durablement. Dans ce cas même, son histoire, son statut peuvent fortement varier. Elle pourra y occuper une place inexpugnable, s'y fondre, s'y naturaliser, aller de soi : tel est le cas - exemple résolument élémentaire - de la règle disant que l'aire d'un triangle est «le demi-produit de la base par la hauteur». Elle pourra encore ne survivre que dans les marges de ce savoir, confidentielle, éternellement jeune parce qu'indéfiniment retrouvée : ainsi de la formule, attribuée à Héron mais due semble-t-il à Archimède, donnant l'aire d'un triangle en fonction des mesures a, b, c de ses côtés.

De l'intérieur même des savoirs les plus fermement gérés sont produites des connaissances éphémères, qu'il faudra le cas échéant réinventer, qui seront aussitôt oubliées de l'institution où elles auront été produites, parce qu'elles n'y auront pas été *institutionnalisées en savoir*. Cela arrive chaque jour, dans chaque classe de chaque collège.

Phénomène fondamental, sur lequel nous reviendrons. Mais il est un phénomène plus remarquable encore. Il arrive que, à partir d'un savoir-outil S, soient produites des connaissances qui n'«intéressent» pas ce savoir. Ces connaissances peuvent n'intéresser *aucun savoir* digne de ce nom : ainsi, en mathématiques, certaines ne trouveront-elles à survivre durablement que dans l'univers de ces problèmes que l'on peut dire, avec

2. Il serait évidemment pertinent de se demander pourquoi cette dissymétrie s'est imposée dans notre enseignement ; l'enquête ferait ici remonter très loin dans le passé des mathématiques «savantes».

Bachet[3], «plaisants et délectables». (Comment, par exemple, découper un triangle donné afin de pouvoir, avec les morceaux obtenus, constituer un carré ?)

De ce cas d'espèce, on passe à un autre encore, autrement révélateur : celui de la connaissance produite, à l'aide d'un savoir S (par exemple les mathématiques), à propos d'un système dont l'étude «intéresse» un autre savoir, S' (par exemple la biologie, les sciences sociales, etc.), *mais non, en général, S lui-même*. C'est alors surtout que, selon un usage devenu aujourd'hui courant, *on parlera de modélisation*. S aura permis de modéliser un système dont la connaissance «relève» de S'. Si je produis un modèle (en notre sens) d'un système *mathématique*, j'aurai, tout bonnement, *«fait des mathématiques»* (éventuellement «triviales», au sens de Dieudonné) ; mais si je produis un modèle (en notre sens, et au sens courant du terme) permettant par exemple d'optimiser l'usage d'un parking (Dunn, 1981), je serai réputé avoir fait *de la modélisation mathématique.*

Ainsi le fait que telle ou telle modalité du *travail mathématique* nous apparaît ou non comme relevant de la modélisation mathématique est-il lié, culturellement, à un certain *découpage social des savoirs*. Restrictivement, la production d'un modèle mathématique d'un système donné sera regardée comme le fruit d'une activité de modélisation mathématique à cette condition que le système-cible soit vu, culturellement, comme essentiellement *non mathématique*. La reconnaissance, par l'acteur ordinaire du système des savoirs, qu'il y a là (ou qu'il n'y a pas) activité de *modélisation* exprime d'abord son assujettissement à une organisation sociale déterminée des connaissances et des savoirs, qui se donne à voir dans la culture. Elle est la lecture culturelle normée de certains types de situations sociales de production de connaissances[4].

Les modèles produits dans de telles situations sont alors identifiables et visibles en tant que modèles parce que, prenant leurs matériaux au savoir S, ils n'appartiennent d'abord véritablement ni à S ni à S'. Ils constitueront bientôt, pour S, une excroissance morte, abandonnée ; et, pour S', un corps étranger, accepté sous bénéfice d'inventaire, et qui en définitive sera peut-être rejeté. Mais si, au contraire, ils viennent à s'intégrer à S', à se fondre dans ce «savoir d'accueil», alors ils cesseront bientôt d'y apparaître comme des modèles. Ils s'insèreront dans le texte du savoir, dont ils ne seront bientôt plus qu'une partie comme les autres, constitutive de ce savoir à l'égal des autres. Les désigner encore comme modèles, alors, procèderait d'un geste polémique, d'une critique épistémologique en acte. Et, de fait, ils réapparaîtront peut-être, ultérieurement, comme «simples» modèles, lorsque le progrès du savoir en aura dénoncé la validité. On parlait autrefois de *géométrie*, tout court ; nous pouvons parler aujourd'hui du *modèle euclidien de l'espace.*

I.6. *Naturalisation des connaissances et reconceptualisation des savoirs*

Ce que le concept de modélisation, tel que nous le mettons en oeuvre ici, vient nous rappeler, contre l'illusion du caractère naturel, contre l'évidence trompeuse (et pourtant nécessaire) de la «naturalité» des connaissances au sein des savoirs, c'est que tout «objet de savoir» est d'abord le fruit, épistémologiquement incertain, d'un travail de modélisation producteur de connaissances, que chaque apprenant devra à son tour reconquérir cognitivement. «Soient deux entiers impairs, 2n+1 et 2m+1», ou, encore,

3. Claude Gaspar Bachet, auteur d'un recueil de *Problemes plaisans et delectables, qui se font par les nombres* (Lyon, 1612).

4. Le caractère «apatride» de certains modèles, ou, plus exactement, de tout modèle au sens restrictif de ce mot, nous paraît fondamental dans la péjoration et la suspicion épistémologiques dont la notion de modèle est fréquemment l'objet : c'est ainsi par exemple que nous interpréterions les thèses formulées autrefois par Alain Badiou (Badiau, 1968).

«Soit la droite $2x-4y+7 = 0$», pourra-t-on dire en telle classe : mais cela supposera que la notion d'*impair*, celle de *droite*, aient été, antérieurement, *modélisées* - par la «forme» numéro-littérale $2k+1$ pour la première, par la forme équationnelle $ax+by+c = 0$ pour la seconde. On dira de même, un peu plus tard, «Soit la parabole $y = 2x^2-3x+5$», ou «Soit le cercle $x^2+y^2-6x+y = 0$» : même phénomène de *naturalisation* de connaissances qui, génétiquement, ont d'abord émergé à la frontière du champ du savoir, et auraient tout aussi bien pu en être indéfiniment rejetées.

A la lumière de cette analyse, le savoir mathématique (mais l'analyse vaut, croyons-nous, pour tout savoir) perd ainsi l'apparence d'homogénéité qu'engendre à nos yeux sa fréquentation familière. Il apparaît ici comme une somme intégrée de connaissances produites presque une à une, par des modélisations successives, particulières et partielles, qui finissent par aller de soi et dont nous oublions la genèse.

Les exemples donnés, pensera-t-on peut-être, sont évidents. Mais il est des cas où le phénomène nous demeure opaque, parce que, véritablement, ce qui était à l'origine le produit d'un travail de modélisation, le fruit d'un travail de production de connaissances s'est *naturalisé* au point que nous ne distinguons plus le système modélisé de son modèle.

Il en est ainsi, notamment, lorsque le modèle est devenu *standard*. On a relevé (Chevallard, 1989 a, p.63), en suivant Lebesgue, le cas le plus simple, celui de l'addition des entiers. Dans des travaux devenus classiques, Gérard Vergnaud a bien montré comment l'égalité $a+b = c$ constituait, dans l'arithmétique de l'école primaire, le modèle unique de six catégories fort différentes de situations, que nous avons fini par tenir pour «arithmétiquement équivalentes»[5] .

Le phénomène de naturalisation des modèles, ce qu'on pourrait appeler, usant d'un néologisme, leur *enculturation*, soit leur intégration réussie dans la culture du savoir considéré, ne saurait être annulé : il est constitutif de la manière dont tout savoir s'élabore à partir des connaissances produites, reconnues pertinentes par rapport à ce savoir comme projet. Mais l'oubli de la production des connaissances (et, du même coup, l'oubli des conditions de leur production) est une condition de la constitution du savoir à partir des connaissances produites. Les «connaissances antécédentes», dont nous parlions plus haut, résultent toutes d'un travail de modélisation *et d'un oubli de ce travail*. Un triangle ABC «rectangle en A», ce sera tout à la fois un triangle «dont l'angle en A est droit», «dont le sommet A est situé sur le cercle de diamètre [BC]», «dont les côtés sont liés par la relation de Pythagore», voire (mais l'absence, ici, d'un nom adéquat signifie sans doute qu'il n'en va pas tout à fait ainsi) «dont la hauteur issue de A vérifie la relation $AH^2 = BH.HC$».

Les modélisations ultérieures supposent ainsi des modélisations antérieures *oubliées*. Relativement à un système étudié à partir d'un savoir S, il existe une dialectique de la connaissance et de la production des connaissances, une relation organique entre la possibilité de produire des connaissances nouvelles et l'oubli de la production des connaissances antécédentes. Or il arrive que le savoir entre en crise, que l'ancienne conceptualisation se révèle inadéquate. Un nombre impair est certainement un nombre dont l'écriture décimale se termine par l'un des chiffres 1, 3, 5, 7, 9. Cela, qui n'est jamais que le fruit d'une modélisation particulière, suffit pour prouver que la somme de deux impairs est paire, ou que leur produit est impair ; mais cette modélisation-là de la notion d'impair se révèlera déjà moins adaptée s'il s'agit de montrer par exemple (nous reprendrons cet exemple plus loin) que la somme de deux impairs successifs est un multiple de 4 (nous reprenons cet exemple un peu plus loin). L'ancienne conceptualisation, fruit d'une modélisation oubliée, doit être reprise ; une nouvelle

5. Voir Vergnaud, 1981, notamment chapitre IX ; et aussi Chevallard, 1986, pp. 38-40.

modélisation conduira à une *reconceptualisation*, qui définira une nouvelle orthodoxie épistémologique et se naturalisera à son tour.

Or c'est ce processus même que l'orthodoxie épistémologique du moment, concrétisée dans le *rapport institutionnel* au savoir (Chevallard, 1989 b), va tendre à nier alors même que l'élève devra, bon gré, mal gré, le vivre quoi qu'il advienne. C'est ce processus même, aussi, que le concept de modélisation permet d'apercevoir et de penser, par-delà l'orthodoxie institutionnelle, et en fonction duquel il permettra de situer l'élève et le travail de l'enseignant.

Telle est la perspective où nous ferons fonctionner le concept de modélisation à propos du corpus enseigné au Collège, afin de mettre d'abord en évidence la pertinence et la puissance de l'*outil algébrique*. Avant de considérer, avec le *programme de recherche* que cette approche détermine, les *problèmes didactiques* que sa formulation fait émerger.

II. - Constructions croisées : le numérique et l'algébrique

II.1. *Un outil fondamental : les entiers naturels*

Les entiers naturels constituent, historiquement comme didactiquement, le premier outil de la modélisation mathématique.

Formellement, on sélectionne le système N des entiers naturels parmi la classe de systèmes de nombres définie dans la deuxième partie de cette étude (Chevallard, 1989 a, II) en ajoutant l'exigence suivante : *tout ensemble de nombre qui n'est pas vide a un plus petit élément.*

C'est l'axiome du *bon ordre*. Il entraîne que l'ordre de N est *discret*, propriété qui opposera N et Z aux autres systèmes de nombres utilisés.

Au niveau du Collège, le système des nombres entiers est «supposé connu». Contrairement à ce qui peut être envisagé à un niveau plus élevé, il n'est pas question ici de définir N par le moyen d'une axiomatique, celle donnée jusqu'ici, ou une autre - «à la Peano» notamment. Moins encore peut-on envisager de *construire* les entiers dans le cadre d'une théorie des ensembles - à la manière de von Neumann par exemple (Halmos, 1967, pp.56-57). L'«axiomatique» que nous avons, de fait, présentée ne doit être regardée que comme un résumé commode de propriétés de N, à partir duquel toutes les propriétés «usuelles», c'est-à-dire manipulées «spontanément» par les élèves, *pourraient* être démontrées, sans que cela même soit envisagé.

La propriété de bon ordre formulée plus haut est d'une compréhension aisée : c'est son emploi judicieux qui est chose plus délicate. Elle énonce simplement le fait que, si un ensemble d'entiers A est non vide, et si l'on énumère les entiers à partir de 0, *on pénètre une première fois dans* A[6]. Equivalente en théorie au «raisonnement par récurrence», elle peut, en pratique, lui être opportunément substituée, ainsi que nous le verrons plus loin sur un exemple.

Avec cette propriété, le système des entiers naturels est constitué, comme *outil d'étude*, d'une part, comme *objet d'étude*, d'autre part. En cela il fournit un exemple remarquable des deux fonctions que tout objet mathématique peut tour à tour assumer - dualité de perspectives sous lesquelles nous l'examinerons ci-après. Il est au point de

---

6. Soit par exemple A l'ensemble des entiers de la forme $3(2k+1)+2$. Le premier entier en est 5. Dans ce cas, bien entendu, l'axiome du bon ordre est inutile. Il n'en va pas de même dans l'exemple prototypique que nous donnerons un peu plus loin.

départ, et demeure au coeur du curriculum du Collège, ce qui justifie la place que nous lui donnerons dans les développements qui suivent.

II.2. *Les entiers naturels comme outil d'étude*

Un système de nombres SN peut intervenir à deux niveaux dans le processus de modélisation algébrique. D'une part, les *variables* définissant le système étudié peuvent être *à valeurs dans SN*. D'autre part, la formulation des *relations* gouvernant le système peut utiliser des expressions algébriques *à coefficients dans SN*.

Bien peu de systèmes cependant peuvent être modélisés à l'aide des seuls entiers naturels. Les manuels de l'école primaire présentent, par tradition et nécessité, des cas particuliers de systèmes réels modélisables en nombres entiers[7]. Au Collège, il ne peut s'agir que d'un pis-aller, dès lors que des systèmes de nombres plus adéquats (par exemple D+) deviennent disponibles.

Par ailleurs, l'introduction du calcul algébrique prend tout son intérêt lorsqu'on étudie une *classe d'états* d'un système, soit que l'on veuille obtenir les valeurs d'une ou de plusieurs des variables en jeu en fonction des autres variables (ainsi qu'on le fait dans l'arithmétique élémentaire), soit que certaines données soient (apparemment) manquantes, situation moins traditionnelle dont voici un exemple (Berrondo, 1979, p.29) :

> Un congrès international de dermatologie réunit des médecins britanniques, allemands et français. Il y a deux fois plus de Français que d'Allemands, ces derniers étant eux-mêmes deux fois plus nombreux que les Britanniques. Deux techniques fort différentes y sont proposées pour soigner au mieux le pityriasis rosé de Gilbert, entre lesquelles chaque médecin présent est invité à choisir. La technique du professeur Smith remporte entre autres tous les suffrages britanniques. Et pour la technique du professeur Simon, il y a autant d'Allemands favorables que de Français hostiles. Quelle est alors celle des deux techniques qui remporte le plus de suffrages ?

Si l'on désigne par a le nombre de médecins britanniques, il y a 2a médecins allemands et 4a médecins français. En désignant alors par x le nombre de médecins allemands favorables à la technique Simon, le nombre des suffrages obtenus par la technique Smith sera

$$U(x,a) = a + (2a-x) + x$$

et le nombre des suffrages obtenus par la technique Simon sera

$$V(x,a) = x + (4a-x).$$

On aura donc $U(x,a) = 3a$ et $V(x,a) = 4a$. Ce *modèle du scrutin* montre que les nombres de voix U et V *ne dépendent que du paramètre a*, et qu'ils sont en outre des fonctions *linéaires* de a. Par suite, la *comparaison* des valeurs de U et de V *ne dépend pas de la valeur de a*. On obtient, quel que soit a, $U < V$, et c'est donc la technique du professeur Simon qui l'emporte.

II.3. *Les mathématiques «finies»*

D'autres exemples, plus réalistes (mais là n'est pas la question), pourraient être présentés : ainsi par exemple l'étude des phénomènes liés au mode de scrutin dans une

---

7. «Monsieur Masson électricien, a fait des réparations chez Monsieur Brun : il a fourni 9 mètres de fil à 35 francs le mètre, 12 mètres de baguette à 20 francs le mètre, etc. Etablissez sa facture».

élection[8]. Mais le vrai domaine d'emploi des entiers, ce sont les mathématiques *finies*, la *combinatoire*, etc.[9].

Il s'agit là de domaines traditionnellement peu explorés au Collège et, comme on le sait, très vite ardus. Mais l'intérêt actuel pour les *mathématiques discrètes* (Potts, 1986) a ramené sur ce secteur l'attention des spécialistes de l'*ingénierie des curriculums* [10]. Nous n'en donnerons ici qu'un exemple, qui trouve sa source dans la doctrine grecque des *nombres figurés*.

On considère les figures suivantes, formées de croix :

```
                              x
                 x           x x
      x         x x         x x x
     x x       x x x       x x x x
```

Si l'on numérote ces figures 1, 2, 3, 4, les nombres de croix composant chacune d'elles sont respectivement P(1) = 1, P(2) = 3, P(3) = 6, P(4) = 10. On veut étudier le nombre P(n) de croix de la figure en fonction de son rang n dans la série (qui est aussi le nombre de croix formant la base de la figure).

En regardant d'abord *une figure à la fois*, par exemple la figure 4, et en comptant les croix ligne par ligne à partir du sommet, on voit que l'on a : P(4) = 1+2+3+4. De même, P(3) = 1+2+3, etc. En général, pour la figure numéro n, on aura : P(n) = 1+2+3+...+n.

En examinant maintenant comment *on passe d'une figure à la suivante*, ainsi que le montre la représentation suivante

```
                      o
       x             x o
      x x           x x o
     x x x         x x x o
    x x x x       x x x x o
```

on voit aisément que l'on a : P(n) = P(n-1) + n.

On met par là en évidence deux propriétés du nombre P(n). Mais ces propriétés ne donnent pas encore *directement* le nombre P(n) pour n donné : elles exigent l'une et l'autre que l'on ait d'abord calculé P(k), pour k < n. Si l'on veut alors établir un modèle du phénomène de génération de ces figures qui donne, «d'un coup», le nombre P(n), on peut se proposer de «travailler» les relations déjà obtenues. Mais on peut aussi examiner à nouveau le système étudié pour mettre à jour une propriété mieux appropriée de P(n), qui viendra enrichir notre modèle du phénomène étudié, en l'augmentant d'une nouvelle relation.

---

8. Voir ainsi Berrondo, 1979, p.29.
9. Rappelons qu'en droit la notion d'ensemble *fini* peut être définie sans l'usage de la notion de nombre entier. L'ensemble E est dit fini si, quelle que soit la partie F de E, il n'existe pas d'injection de E dans F. On démontre alors (moyennant l'axiome du choix) que le cardinal de E peut être mesuré par un nombre entier (voir Mendelson, 1964, p.185).
10. Soit le *Curriculum Development* des auteurs de langue anglaise.

C'est ce dernier parti - pas toujours envisageable - que l'on choisira ici. Pour une figure donnée de la série, on réalise les *expériences* [11] décrites par les deux schémas suivants :

```
      x   o   o   o           x
    x   x   o   o           x   x
  x   x   x   o           x   x   x
x   x   x   x           x   x   x   x
                          o   o   o
                            o   o
                              o
```

Le nombre d'éléments des figures obtenues ainsi par complétion est facile à déterminer. Dans le cas général, il y aura *n lignes*, formées chacune de *n croix*, soit au total n^2 *croix*. Par ailleurs, on obtient la figure complétée en ajoutant un nombre d'éléments égal à celui de la figure de départ diminué du nombre de croix composant l'un des côtés de cette figure, soit donc en ajoutant P(n) - n croix. On a ainsi : $n^2 = P(n) + (P(n) - n) = 2P(n) - n$. On en déduit aussitôt : $P(n) = (n^2+n)/2$.

Si ce modèle est un «bon modèle», il doit permettre de retrouver les propriétés antérieurement établies. Commençons par la seconde, soit l'égalité P(n) = P(n-1) + n. Elle se vérifie directement ; on a en effet :

$$\begin{aligned} 2P(n-1) + 2n &= (n-1)^2 + (n-1) + 2n \\ &= (n-1)(n-1+1) + 2n = n(n-1) + 2n \\ &= n(n-1+2) = n(n+1) = n^2+n = 2P(n), \end{aligned}$$

d'où : P(n) = P(n-1) + n, comme attendu.

La première égalité, soit P(n) = 1+2+3+...+n, ne peut en revanche s'établir de cette manière. L'utilisation de la propriété du *bon ordre*, conjointement avec un *raisonnement par l'absurde* [12], devient nécessaire. Définissant P(n) par l'égalité $P(n) = (n^2+n)/2$, supposons qu'il existe des entiers - au moins un ! - pour lesquels l'égalité P(n) = 1+2+3+...+n *ne soit pas vérifiée*. En vertu de la propriété de bon ordre de N, soit k le premier entier pour lequel cette propriété *n'est pas vérifiée*. Son prédécesseur, k-1, satisfait donc l'égalité P(k-1) = 1+2+3+...+(k-1). Puisque, comme on l'a vu, P(k) = P(k-1)+k, il vient aussitôt : P(k) = [1+2+3+...+(k-1)]+k = 1+2+3+...+k, *ce qui est contradictoire avec l'hypothèse faite sur* k. Ainsi donc, *pour tout entier* n, on a : P(n) = 1+2+3+...+n.

II.4. *L'insuffisance des entiers naturels comme outil*

Dans ce qui précède on a parlé de ce qu'on peut appeler «la modélisation algébrique *sur N*». Or, à plusieurs reprises, nous avons triché par rapport à une interprétation stricte de cette formulation. A priori un tel modèle devrait ne comporter que des égalités (ou des inégalités) de polynômes *à coefficients dans N*. Mais le calcul algébrique le plus simple *ne peut guère être conduit sous cette contrainte*. Dans l'exemple du congrès de dermatologie,

11.Sur ce point, voir Y. Chevallard, *Les mathématiques comme activité expérimentale* (à paraître).

12. Il y a là un bon sujet d'*enquête épistémologique*. Pourquoi la technique du raisonnement par l'absurde, familière, au Collège, *en géométrie*, ne l'est-elle pas dans les autres secteurs du corpus mathématique enseigné ?

on a manipulé les expressions a+(2a-x)+x et x+(4a-x), qui, à strictement parler, définissent des fonctions polynomiales (en a et x) associées à des polynômes à coefficients *dans* Z, et sont définies toutes deux sur le sous-ensemble de N^2 décrit par l'inégalité $x < 2a$. Semblablement, lors de la vérification de l'égalité $P(n) = P(n-1)+n$, on a calculé «librement», ainsi qu'on l'aurait fait sur Z.
Il faut se rappeler ici que ce que nous nommons aujourd'hui nombres *relatifs* s'est longtemps appelé nombres *algébriques*. Longtemps, leur introduction inaugura le démarrage du calcul algébrique. Car le fait qu'on ne puisse pas librement retrancher une expression algébrique à coefficients dans N d'une autre de même nature gêne le calcul algébrique. Naguère encore, pourtant, alors que le calcul algébrique se trouvait introduit en classe de cinquième, les auteurs de manuels circonvenaient momentanément cette difficulté en énonçant une «règle» indiquant que, «pourvu que les soustractions soient possibles, on peut effectuer une suite d'additions et de soustractions dans un ordre quelconque» (Monge et Guinchan, 1964, p.42). La juridiction établie par cette remarque permettait alors de proposer aux élèves des exercices des types suivants (op. cit., p.51) :

Effectuer les additions suivantes : 54 + (48-x) ; etc.
Effectuer les soustractions suivantes : 17 - (13+x) ; etc.
Effectuer les opérations suivantes : (25-x) - (13-x) ; etc.

Pourtant, afin d'avoir une situation tout à fait nette, il est bon de disposer, dès le travail avec (ou sur) les entiers naturels, des expressions algébriques *à coefficients dans* Z. C'est ainsi que le polynôme découvert par Euler en 1772 qui engendre des nombres *premiers* pour x variant de 0 à 40, soit $P(x) = x^2 - x + 41$, a ses coefficients dans Z. Il en est de même des polynômes $Q(x) = x^2 - 81x + 1681$ $(0 \leq x < 81)$ et $R(x) = x^2-79x+1601$ $(0 < x < 80)$, même si d'autres polynômes générateurs de nombres premiers peuvent avoir leurs coefficients dans N, tel $S(x) = 11x^2 + 9x + 11$ $(0 \leq x < 11)$.
Le passage de la vision «opératoire» du signe *moins* à sa vision «prédicatoire», c'est-à-dire le passage de la conception d'une expression numéro-littérale *comme suite d'opérations à effectuer,* à la conception formelle de *polynômes* à coefficients dans Z permet seule la mise en oeuvre d'une pratique algébrique satisfaisante. Le passage inverse s'effectue lorsque «on donne à x une valeur» (dans N). Ainsi, dans l'expression $P(3) = 3^2 - 3 + 41$, on retrouve une suite d'opérations *effectuables dans N*. P(3) vaut 47 (qui est bien premier).

Au plus humble niveau, donc, l'ensemble N des entiers naturels apparaît comme un outil *insuffisant*, dès lors que l'étude est conduite par le moyen de l'outil algébrique. Celui-ci ne devient vraiment performant qu'à la condition que soit disponible un sur-ensemble de nombres facilitant les manipulations «algébriques». C'est là un phénomène constant, qui se retrouvera à d'autres niveaux. Ainsi, bien plus tard dans le cursus des études scientifiques, la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle à coefficients *réels* pourra-t-elle trouver avantage à être conduite sur le corps C des nombres *complexes*, etc.

II.5. *Les nombres «artificiels»*

Les nombres négatifs s'introduisent donc, dans la pratique mathématique, non pas à l'instar des entiers «naturels», c'est-à-dire comme des nombres servant à compter, soit à «mesurer» des ensembles finis, mais comme *un moyen de calcul,* comme un *artifice* de calcul - de la même façon que l'automobile peut être regardée comme un «artifice de transport». Pour cette raison, ils furent longtemps rangés - avec, notamment, les fractions

- dans la catégorie des nombres *artificiels* (Smith, 1925, chapitre IV), permettant d'utiliser plus souplement, et donc plus agréablement, un outil mathématique puissant, le calcul algébrique.

La «règle des signes», connue historiquement bien avant l'invention des négatifs, permettait d'écrire, en calculant sur des entiers naturels par addition et soustraction, des égalités du type (a+b)(c-d) = ac+bc-ad-bd (les soustractions du second membre pouvant être effectuées, lorsque c > d, dès lors qu'on aura effectué l'addition ac+bc), et conduisait aux règles de réécriture classiques, a(-b) -> -ab, etc. Elle reçoit désormais une assise numérique qui autorise à ignorer les contraintes du calcul dans N : l'égalité précédente pourra tout aussi bien être réécrite (a+b)(c-d) = -ad-bd+ac+bc, et il devient possible d'effectuer dans l'ordre indiqué les différentes opérations sur les valeurs assignées aux variables (ou paramètres) a, b, c, d.

Les nombres «artificiels» - ici, les négatifs - ne sont donc pas d'abord motivés par l'étude de systèmes à variables prenant des valeurs entières positives et négatives, ainsi qu'on s'obstine à vouloir le faire croire en présentant de rares systèmes de ce type - altitude, ascenseur, pertes et gains, etc. Ils naissent *d'exigences internes au travail mathématique* (exactement : algébrique). Sans doute leur introduction, qui étend le domaine du numérique, soulèvera-t-elle, historiquement, bien des interrogations, qui trouvent nécessairement un écho dans le curriculum du Collège. On sait que Diophante, au IIIe siècle après Jésus-Christ, rejetait comme absurde l'équation 4x+20 = 4, qui donnerait x = -4. Cardan, au XVIe siècle, parlait, s'agissant des négatifs, de nombres *faux*, et Descartes, en 1637, appelle encore *racines fausses* les racines négatives d'une équation. Considérer les nombres négatifs comme de «vrais» nombres a demandé que l'on se risque à écrire des égalités du genre (+15)+(-20) = -5 (Bombelli, 1572), ce qui ne sera vraiment accepté qu'au XVIIe siècle.

Notons surtout que, dans la normalisation progressive du statut des négatifs, dans la banalisation de leur emploi, *l'usage des lettres jouera un rôle unificateur essentiel.* L'idée même d'utiliser une lettre seule, *non affectée d'un signe*, pour désigner indifféremment un nombre positif ou négatif semble être apparue vers 1659 chez Hudde[13].

II.6. *Le passage de N à Z*

Le passage de N à Z, dans l'esprit indiqué, part alors du problème suivant[14]. Pour tout entier a > 0, il faut introduire un «nombre», noté -a, tel que, pour des entiers naturels b et c quelconques vérifiant b > ac, on puisse écrire : b - ac = b + (-a)c. Soit donc un nombre tel que, d'après la définition (dans N) de b - ac, on ait : b = ac + b + (-a)c.

1. Prenons b = a et c = 1. Le nombre -a doit donc vérifier l'égalité a = a + a + (-a), soit encore a + (-a) = a - a = 0. En d'autres termes, -a *est solution de l'équation* $x + a = 0$. Si l'ensemble que l'on veut obtenir à partir de N par adjonction des

13. Smith, 1925, p.259. Descartes était mort en 1650.
14. Même si elle n'a que très peu pénétré la sphère didactique, soulignons qu'il s'agit là d'une conception du numérique qui s'est imposée, dans la sphère savante, dès le milieu du XIX^{e} siècle. «Aux yeux des algébristes anglais (comme Peacock, De Morgan, Hamilton) et allemands (Grassmann, Hankel) du milieu du XIX^{e} siècle, notent ainsi Balibar et Macherey, la permanence du concept de nombre à travers ses extensions successives, qui n'est ni celle d'une représentation concrète, ni celle d'une évidence intellectuelle, est celle d'un symbolisme (...). Un système de «nombres» n'est donc pas autre chose qu'un .système d'objets pour lesquels [les] règles opératoires (usuelles) sont valides» (Balibar et Macherey, 1985, p.1183 c). ; et aussi Artin,

«nombres» -a (a entier naturel > 0), est effectivement un *système de nombres* Z (au sens défini plus haut), alors cette équation n'a sur Z qu'une solution, et, ainsi, l'équation x + a = 0 *caractérise* -a *complètement.*
2. En supposant toujours que Z est bien un système de nombres, de l'égalité a + (-a) = 0 on déduit d'abord (par multiplication par c) l'égalité ac + (-a)c = 0, et, de là (par addition de b), l'égalité ac + b + (-a)c = b. Si les entiers naturels a, b, c sont tels que b > ac, il vient : b - ac = b + (-a)c. *Ainsi, pour constituer Z à partir de N, il est nécessaire et suffisant d'adjoindre, pour tout entier a > 0, un nombre -a tel que a + (-a) = 0.*

L'hypothèse qu'il peut exister un tel système de nombres est très forte. Elle implique notamment que, sur Z, toute équation de la forme x + a = 0 possède une solution : si, en effet, a appartient à N, alors x = -a appartient à Z et est solution de l'équation ; si a appartient à Z-N, il existe b dans N tel que a = -b, et l'équation considérée est alors satisfaite par x = b. Notons en général -a la solution (unique) de l'équation x + a = 0, pour a appartenant à Z. Si a = -b, avec b dans N, il vient : b = -a = -(-b). Plus généralement, pour tout a dans Z, on a : -(-a) = a.

L'hypothèse que Z est un système de nombres permet alors de voir comment il convient de *calculer* dans Z. Soient ainsi les nombres -a et -b, avec a et b dans N. Que vaut leur *somme*, (-a) + (-b) ? On a les égalités (-a) + a = 0 et (-b) + b = 0. On en déduit, par addition membre à membre, et en vertu des propriétés prêtées à Z, l'égalité : ((-a)+(-b)) + (a+b) = 0. Cette dernière égalité fournit la réponse attendue, puisqu'elle nous *montre* que l'on a : (-a)+(-b) = -(a+b). Toutes les propriétés de Z vis-à-vis des opérations d'addition, de soustraction, toutes les relations de compatibilité entre ordre et lois de composition peuvent être obtenues de cette manière. De plus, la fonction *valeur absolue* peut alors être définie et l'inégalité triangulaire établie. Z se distingue de N en ceci que la soustraction y est toujours définie, et que la propriété du bon ordre n'y est plus satisfaite que pour les ensembles *minorés*, ce qui suffit à entraîner que l'ordre de Z, comme celui de N, est *discret.*

II.7. *L'intégration des relatifs au travail mathématique*

Par ce qui précède se dessine le portrait-robot de ce que devrait être, s'il existe, le sur-système de nombres cherché, Z. Se pose alors, en toute rigueur, la question de *l'existence effective* de Z, ou de sa *«construction»* comme système de nombres. Le point de vue *réaliste* que nous préconiserons plus loin à propos des systèmes de nombres, tels D_+ ou Q_+, dont l'existence est, en quelque sorte, «forcée» par les besoins de la mesure des distances dans le plan[15], manque ici d'évidence. Si l'on veut donc «construire» Z, le parti le plus adéquat consiste donc à poser tout simplement Z = N ∪ N-, où N- désigne l'ensemble des couples (-,a), pour a appartenant à N*, le signe - étant un élément quelconque déterminé ; puis, notant -a ou (-a) le nombre (-,a), à munir l'ensemble Z ainsi défini de l'ordre et des lois de composition ordinaires (que le portrait-robot esquissé plus haut aura permis de préciser), en vérifiant qu'ils font bien de Z un système de nombres[16].

15. On sait d'ailleurs qu'on peut construire les nombres (réels)à partir d'une axiomatique de la géométrie du plan euclidien, ainsi que le fait notamment Hilbert avec son «calcul segmentaire» : voir Hilbert,
16. Le procédé suggéré ici possède, oulignons-le, autant de «rugueur mathématique» qu'un autre, par exemple la symétrisation de N, mise naguère à l'honneur par les «mathématiques modernes». En outre, il reste proche du rapport qu'entretient tout un chacun - le mathématicien comme l'élève - avec les nombres négatifs : un nombre entier, avec un signe *moins* devant.

Cela noté, il convient surtout *d'intégrer les nombres relatifs au travail mathématique*. Parce que Z est un système de nombres, on sait déjà qu'ils sont manipulables, dans les calculs, à l'instar des nombres déjà connus - et cela, comme on l'a assez souligné, avec une souplesse accrue. Trois niveaux d'intégration se dessinent alors. On a mentionné le *premier niveau* : les relatifs s'intègrent à l'égal des entiers dans la pratique du calcul - tel était l'objectif visé. Mais, à un *second niveau* d'intégration, on peut maintenant leur attribuer la fonction de *valeurs* prise par une variable. Reprenons ici le polynôme $P(x) = x^2-x+41$. Pour $x = -3$, on a : $P(-3) = (-3)^2-(-3)+41 = 9+3+41 = 53$, qui est un nombre premier. Le polynôme P(x) fournit en fait des nombres premiers pour tout x tel que $-40 < x < 41$; de même, le polynôme $S(x) = 11x^2 + 9x + 11$ engendre des nombres premiers pour tout x tel que $-11 < x < 11$; etc.

Un *troisième niveau* d'intégration se situe enfin dans le cadre de la modélisation de systèmes qu'on ne pourrait modéliser aussi aisément à l'aide des seuls entiers naturels : il en est ainsi essentiellement des systèmes dont la modélisation suppose une «orientation», qu'il s'agisse de figures géométriques, de circuits électriques, etc. Ainsi donc, en introduisant les nombres relatifs pour obtenir un calcul algébrique simplement plus agréable, *nous avons étendu notre puissance de modélisation.*

III. - Les entiers naturels comme objet d'étude

III.1. *Un objet d'étude par excellence*

En tant qu'outil d'étude, les entiers naturels se révèlent très vite insuffisants. En revanche, considérés comme *objet d'étude*, ils fournissent au curriculum du Collège un thème de travail privilégié, mais aujourd'hui négligé, voire ignoré.

Les entiers naturels ont d'abord cette vertu essentielle de constituer une réalité qui, psychologiquement, est vécue comme familière, car fréquentée de longue date. En même temps, pourtant, ils offrent une multiplicité de «systèmes» dont la complexité de l'étude est très diverse et proposent notamment un important matériel appelant la mise en oeuvre et l'exploitation des formes les plus élémentaires du calcul algébrique.

Les exemples rapidement présentés dans ce qui suit illustreront en outre un phénomène important, sur la signification duquel nous reviendrons plus loin : dès les cas les plus simples d'emplois modélisants du calcul algébrique, celui-ci, outil de base, *n'intervient pratiquement jamais seul.* Il entre quasiment toujours en combinaison avec d'autres outils, spécifiques du domaine auquel «appartient», si l'on peut dire, le système étudié. On ne s'étonnera donc pas de voir très vite apparaître des concepts propres à la théorie des nombres, même si l'on en reste aux rudiments naguère encore présents dans le curriculum du Collège.

III.2. *La première mise en oeuvre du calcul littéral*

Le système des nombres entiers offre en effet à l'observation de nombreux phénomènes qui peuvent être modélisés algébriquement. La modélisation doit généralement s'appuyer sur un certain nombre de mises en correspondance entre propriétés des entiers et expressions littérales, qui constituent autant de connaissances issues de modélisations antérieures, qui auront été intégrées dans le savoir enseigné : un entier pair s'écrit sous la forme 2k, un entier impair sous la forme 2k+1, un carré s'écrira sous la forme k^2, etc.

Considérons ainsi deux nombres *impairs*, par exemple 5 et 9. Leur somme, 14, est un nombre *pair*. Comment rendre raison de ce phénomène ? Les nombres impairs donnés, a et b, étant écrits 2k+1 et 2h+1, leur somme c est donnée par :

$$c = a+b = (2k+1)+(2h+1) = 2k+2h+1+1 = 2k+2h+2 = 2(k+h+1),$$

et cette dernière expression montre que c est bien un entier pair.

Prenons ensuite deux entiers impairs *successifs*, comme 5 et 7. Leur somme, 12, est paire, comme prévu ; mais elle est de plus *un multiple de 4* - elle est «pairement paire». L'examen d'autres couples d'impairs successifs (3+5 = 8, 9+11 = 20, 13+15 = 28, etc.) conduit à la même observation, dont la généralisation apparaît dès lors comme une *conjecture* raisonnable.

Dans le cas général, les nombres impairs successifs considérés, a et b, seront ici modélisés par les formes 2k+1 et 2k+3. Leur somme s'écrit

$$c = (2k+1)+(2k+3) = 4k+4 = 4(k+1),$$

expression qui, là encore, montre ce à quoi l'on s'attendait - la somme c est un multiple de 4.

L'étude ainsi amorcée peut encore se poursuivre. On vient de mettre en évidence un certain *phénomène numérique*. On peut maintenant se demander *pourquoi* un tel phénomène se produit ; et, dans cette perspective, rechercher ce qui *«explique»* que la somme de deux impairs successifs soit toujours un multiple de 4.

Pour cela, observant que la somme de deux impairs quelconques est toujours paire, on peut se demander dans quels cas elle est «pairement paire» ; dans quels cas elle est, au contraire, «impairement paire». Soient deux impairs a = 2k+1 et b = 2h+1. Leur somme a+b = 2(k+h+1) est pairement paire si et seulement si k+h+1 est pair, donc si k+h est impair, soit enfin si *k et h sont de parité différente*. Supposons k pair et h impair (ce qui ne diminue pas la généralité de l'étude) : k = 2n et h = 2m + 1. Il vient : a = 4n + 1 et b = 4m + 3, nombres dont la somme est bien un multiple de 4. Ainsi, deux *impairs* ont une somme *pairement paire* si et seulement si *l'un est de la forme 4n+1 et l'autre de la forme 4m+3*. On comprend alors pourquoi la somme de deux impairs *successifs* est toujours pairement paire : si le premier s'écrit 4n+1, le second s'écrira 4n+3 ; si le premier est de la forme 4m+3, le second s'écrit 4m+5 = 4(m+1)+1, et sera donc de la forme 4n+1 (avec n = m+1).

Cette étude met encore en relief un fait qui n'était pas évident au départ. Si tous les couples (a,b) d'impairs à somme multiple de 4 sont de la forme (4n+1,4m+3) ou (4m+3,4n+1), il en est en particulier ainsi de tous les couples d'impairs successifs, et on en déduit donc que *tout impair est soit de la forme 4n+1, soit de la forme 4n+3,* résultat qui fournit *une nouvelle modélisation algébrique*, distinguant deux cas, *de la notion d'entier impair*. Ce résultat, déjà «rencontré» au cours de l'étude précédente sans qu'il y ait été explicité, peut, bien entendu, être retrouvé directement à partir de la forme générique 2k+1, en faisant respectivement k = 2n et k = 2n+1. [17]

III.3. *Equations diophantiennes simples*

Aussi élémentaire soit-il, le calcul algébrique permet d'élucider une foule de phénomènes numériques. Considérons ainsi trois entiers consécutifs, par exemple 5, 6, 7. *Le produit des «extrêmes»*, soit ici 5 x 7 = 35, retranché au carré du «moyen», soit

17. Il peut encore être établi en considérant les restes dans la division d'un entier par 4. Les valeurs possibles du reste sont 0, 1, 2, 3. Les restes 0 et 2 correspondent aux entiers pairs respectivement divisibles par 4 ; les restes 1 et 3, aux impairs de la forme 4n+1 et 4n+3 respectivement.

$6^2 = 36$, donne 1. Ce résultat est obtenu quels que soient les entiers consécutifs a, b, c que l'on choisit : $8^2 - 7 \times 9 = 64 - 63 = 1$; $12^2 - 11 \times 13 = 144 - 143 = 1$; etc. Posons $b = a+1$, $c = b+1 = a+2$. Il vient : $b^2 - ac = (a+1)^2 - a(a+2) = (a^2+2a+1) - (a^2+2a) = 1$. L'égalité $(a+1)^2 - a(a+2) = 1$ ainsi obtenue constitue un *modèle algébrique du phénomène numérique* étudié. Selon une perspective de recherche déjà empruntée, on pourrait alors se demander quels sont les triplets (a,b,c), avec $a < b < c$, tels que l'on ait : $b^2 - ac = 1$; etc.

Dans cet exemple comme dans le précédent, on aura noté un autre trait de toute activité de modélisation : les situations que l'on est amené à examiner sont souvent, et très simplement, *génératrices de nouveaux problèmes*. Le problème auquel nous sommes parvenus, la résolution en nombres entiers de l'équation $b^2 - ac = 1$, relève du domaine des équations *diophantiennes* [18]. Certaines d'entre elles peuvent faire l'objet d'une étude simple, associant calcul algébrique et théorie élémentaire des nombres. Nous en donnerons ici un seul exemple[19]. Le nombre 8 peut s'écrire comme la différence de deux carrés : $8 = 9-1$; de même 7 (= 16-9), ou 12 (= 16-4), etc. On peut se demander si tous les entiers ont cette propriété. La réponse est négative, il suffit pour le voir de donner un *contre-exemple* numérique. Soit ainsi le nombre 6. S'il existait des entiers a et b tels que l'on ait : $6 = a^2-b^2$, on aurait aussi : $6 = (a-b)(a+b)$, égalité qui montre que a+b divise 6. On en déduit que les nombres a et b, s'ils existent, *sont inférieurs à 6*. Cette observation permet de procéder à une *énumération exhaustive* des couples (a,b) susceptibles de convenir, laquelle confirme que 6 est indécomposable.

On peut alors se demander quels sont, au juste, les entiers décomposables en une différence de deux carrés d'entiers. L'égalité $n = (a-b)(a+b)$ constitue un *modèle* des nombres cherchés, dont nous avons déjà fait usage à propos du nombre 6. Le *travail* de ce modèle permet de produire un certain nombre de connaissances, qui se révèleront décisives. Si a et b *ont même parité*, les facteurs a-b et a+b sont *pairs*, et par suite n *est un multiple de 4* ; si a et b sont *de parité différente*, a-b et a+b sont *impairs*, et leur produit n est alors *impair*. On établit ainsi que les entiers décomposables doivent être cherchés parmi les nombres impairs et les multiples de 4 (le nombre 6, non décomposable, n'est bien ni l'un ni l'autre). Il est facile, ici, de voir qu'en fait c'est *tous les impairs*, d'une part, et *tous les multiples de 4*, d'autre part, qui sont décomposables. Si, en effet, $n = 2k+1$, on a : $2k+1 = (k+1)^2 - k^2$; si $n = 4k$, on a : $4k = (k+1)^2 - (k-1)^2$.

On pourrait alors se demander si un entier décomposable possède une décomposition unique et, sinon, combien il en existe, etc.[20]. On pourra surtout se demander *dans quels types de situations* on peut être amené, au Collège, à étudier des équations diophantiennes simples. Cette question fait réapparaître le fil rouge de notre enquête, les interrelations entre *construction et emploi des systèmes de nombres,* d'une part, et *calcul algébrique*, d'autre part.

III.4. *Un terrain pour la formation mathématique de l'élève*

Les exemples qui précèdent illustrent ce fait que l'emploi fécond du calcul algébrique *suppose une dialectique permanente entre le calcul et les phénomènes qu'il permet de modéliser*, entre la *conduite* du calcul et le *raisonnement* qui permet seul d'arriver aux *décisions de calcul* pertinentes. Comment exprimer par une écriture littérale telle ou telle propriété ? Inversement, quelles propriétés cette forme algébrique nous montre-t-elle ? Voilà les deux questions qui s'avèrent être le moteur de la résolution des

18. Pour quelques équations diophantiennes classiques, voir Ore, 1967.
19. Nous laissons le lecteur examiner l'équation $b^2 - ac = 1$.
20. Autre question laissée au lecteur !

problèmes examinés. C'est là un principe général que les élèves retrouveront au Lycée et au-delà, dans la mise en oeuvre du calcul algébrique (en géométrie «analytique» par exemple), et sur lequel on ne saurait trop insister.

Dans la ligne de cette dernière remarque, ajoutons que le corps de problèmes auquel nous avons fait allusion jusqu'ici appelle la mise en jeu, sur des exemples entièrement contrôlables par l'élève, d'une foule de notions *dont la maîtrise est constitutive de la culture mathématique* (et, plus largement, de toute culture scientifique), et cela, dès le niveau élémentaire où nous nous situons ici. Sans développer ce point, citons, à titre d'exemples, la notion de *conjecture*, appelée par l'examen (non exhaustif !) d'exemples, les notions solidaires mais distinctes de *conviction* (personnelle ou partagée) et de *preuve* (coulée dans la rhétorique qu'appelle la notion de *démonstration*), etc. Tout cela fait de l'étude élémentaire, à l'aide du calcul algébrique le plus simple, du système des nombres entiers un terrain exceptionnel de *formation mathématique,* c'est-à-dire d'«apprentissage mathématique» - et pas seulement d'apprentissage de mathématiques.

III.5. *Construction du numérique et contrôle du calcul*

Un autre motif qui pousse à promouvoir l'étude des entiers, dans ses aspects les plus élémentaires, par les moyens offerts par le calcul algébrique (utilisés en conjonction avec des moyens plus spécifiques du domaine de réalité étudié), tient en ce que cette étude offre une prise solide sur la construction, l'analyse et l'emploi des systèmes de nombres venant «après» N.

Nous avons rassemblé plus haut quelques remarques sur le passage de N à Z ; le passage de Z à Q pourrait faire l'objet de semblables analyses[21]. En demeurant ici à un niveau déjà abordé, nous donnerons à nouveau un exemple, qui se rapporte cette fois au thème *de l'analyse et du contrôle des erreurs.*

Considérons le calcul suivant : 5/6 - 4/5 = (5-4)/(6x5) = 1/30. Contrairement aux apparences, ce calcul est entièrement *valide.* Bien entendu, la règle utilisée (différence des numérateurs/produit des dénominateurs) est *fausse* comme règle *générale* de calcul sur les fractions. Pourquoi réussit-elle ici ? Dans quels autres cas peut-elle réussir ? En d'autres termes, quel est son *domaine de validité* ? Si l'on tente de modéliser «au plus près» le phénomène numérique observé, on arrive au modèle suivant : a/(a+1) - (a-1)/a = 1/a(a+1). On peut vérifier qu'il s'agit bien là d'une *identité.* On aura donc par exemple : 7/8 - 6/7 = 1/56, 11/12 - 10/11 = 1/132, etc. Cette identité explique pourquoi le calcul initial donnait un résultat exact.

Il peut sembler beaucoup plus ambitieux de vouloir déterminer le *domaine de validité complet* de la règle mise en oeuvre. Pour qu'elle soit valide, on devrait avoir l'égalité : a/b - c/d = (a-c)/bd. Or on a, dans le cas général, a/b - c/d = (ad-bc)/bd. La validité de la règle équivaut donc à l'égalité : a-c = ad-bc. L'étude du domaine de validité conduit ainsi à l'étude d'une équation diophantienne.

Cette équation, modèle du phénomène étudié, est en quelque sorte une île au trésor : on peut dire qu'elle renferme toute la vérité du phénomène que l'exemple numérique initial ne nous avait permis d'observer que fugacement. Son «exploration» nous livrera les réponses aux questions que nous nous étions posées à ce propos.

---

21. Sur cette question, voir Freudenthal, 1973, pp.224-241.

III.6. *Problèmes ouverts et curriculum*

L'égalité obtenue s'écrit encore : ad = a + (b-1)c. On en déduit que a divise (b-1)c, et qu'il existe donc n, m, h et k tels que : a = nm, b-1 = nh, c = mk ; d'où il suit que l'on a aussi d = hk+1. Dans le cas général, on obtient donc les fractions nm/(nh+1) et mk/(hk+1), dont la différence est bien donnée par la règle examinée. Lorsqu'on particularise en prenant m = h = 1, on obtient la différence n/(n+1) - k/(k+1), qui généralise le cas «général» étudié plus haut. En prenant maintenant n = 1, il vient la différence m/(h+1) - km/(hk+1) qui, réécrite, donne a/b - ka/[k(b-1)+1], expression qui nous montre que, quelle que soit la fraction a/b, il existe une infinité de fractions c/d telles que le calcul de la différence a/b - c/d puisse s'effectuer par la règle examinée.

Plus généralement, étant donnée une fraction a/b, on obtiendra *toutes* les fractions c/d «admissibles» de la façon suivante : soit n un diviseur commun à a et b-1, et soient alors m et h les entiers tels que a = nm et b-1 = nh ; les fractions admissibles sont alors les fractions de la forme mk/(hk+1), où k est un entier quelconque. Ainsi, pour a = 12 et b = 27, les diviseurs communs à a et b-1 sont 1 et 2, qui conduisent respectivement aux deux suites de fractions 12k/(26k+1) et 6k/(13k+1).

Si nous avons donné un peu de place à ce dernier exemple[22], c'est pour souligner avec quelle facilité l'abord, en termes de modélisation, des situations mathématiques les plus classiques dans le curriculum traditionnel du Collège (ici, la différence de deux fractions) peut conduire à des problèmes *ouverts* relativement à ce curriculum ; et avec quelle facilité, donc, cet abord, qui induit une activité mathématique localement autogénératrice, entraîne à fonctionner dans un curriculum ouvert, rapprochant en cela l'activité mathématique scolaire de l'activité du mathématicien[23]. On verra pourtant maintenant que cet aspect, qui fait en partie la force de la perspective proposée, soulève des problèmes didactiques considérables, qu'il convient d'abord d'identifier afin même de pouvoir travailler à les résoudre.

IV. - Premiers repères d'un programme de recherche

IV.1. *Les domaines d'emploi du calcul algébrique*

L'étude des entiers naturels apparaît ainsi comme un *domaine d'emploi*, mathématiquement ouvert, du calcul algébrique. Plus généralement, le programme de recherche appelé par la problématique présentée ici suppose le *repérage* et l'*exploration* de tels *domaines d'emploi potentiels*.

A l'ensemble de ceux où n'apparaissent que des variables à valeurs entières, l'extension du système de nombres disponible permet d'ajouter ceux fournissant des systèmes à variables décimales, *rationnelles*, réelles. L'introduction des rationnels peut être associée à des problèmes de division de grandeurs, on l'a noté. L'introduction des *irrationnels* est, quasi nécessairement, et depuis les origines grecques des mathématiques, poussée en avant par la volonté de mesurer des grandeurs que la théorie des aires fait apparaître comme «irrationnelles».

22. Dont l'étude pourrait se poursuivre : si n et n' sont deux diviseurs communs à a et b - 1 et sont *distincts*, les suites de fractions obtenues sont-elles sans éléments communs ? Etc.

23. On notera en particulier, en conformité avec des analyses antérieures, que l'abord «modélisant» remet constamment en jeu les conceptualisations acquises.

Cet entrelacement du problème de la *mesure des grandeurs* et du problème de la *construction des systèmes de nombres* est, au Collège, *fondamental* [24]. En ce sens, la *«métrisation» de la géométrie* (du plan et de l'espace) est un thème central à ce niveau. Elle ouvre immédiatement sur une floraison très riche de configurations géométriques, dont l'examen dans l'esprit de la modélisation algébrique conduit en fait à retrouver les charmes aujourd'hui démodés de ce qu'on appelait autrefois les *relations métriques* (dans le triangle, le cercle, etc.), et qui constituent un domaine d'emploi à reconsidérer de manière systématique.

Sur ce dernier thème, déjà abordé plus haut, nous ne donnerons ici qu'un exemple, à la fois élémentaire et non classique. On veut tracer un triangle dont l'un des côtés ait pour mesure 6, et dont les mesures des deux autres côtés aient pour différence 2. Le système considéré peut être décrit à l'aide d'un seul paramètre, x, les mesures des côtés étant respectivement 6, x, x+2 (voir la figure 2).

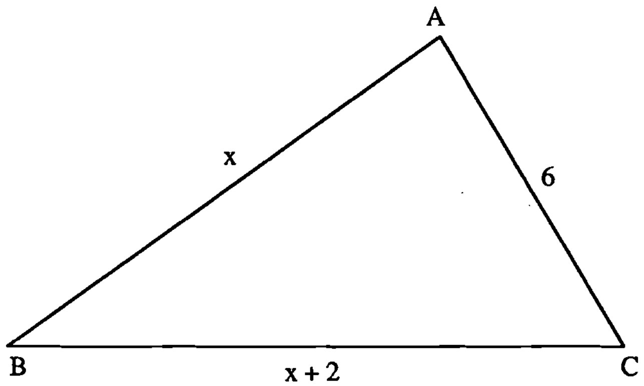

figure 2

Imaginons que l'on tente de tracer un tel triangle en traçant d'abord le côté de mesure 6 et en traçant alors les deux cercles centrés aux deux extrémités de ce côté, avec respectivement pour ouvertures du compas x et x + 2. Il est clair que, si x est trop petit, les deux cercles ne se couperont pas. Plus précisément, ils ne se couperont pas si la somme des deux ouvertures, x + (x + 2), est inférieure à la mesure du côté, 6. En d'autres termes, pour que ce triangle puisse être tracé, il est nécessaire que l'on ait l'inégalité : $x+(x+2) > 6$.

Cette condition est-elle suffisante ? On pourrait imaginer que, pour x «très grand», les deux cercles cessent de se couper, l'un étant alors contenu dans l'autre. La réponse à cette interrogation peut être apportée par une «connaissance antécédente» relative aux systèmes «triangles» : il est possible de tracer un triangle (propre) dont les côtés ont des mesures données a priori si et seulement si chacune de ces mesures est inférieure à la somme des deux autres. Dans le cas considéré, cela conduit à modéliser les triangles cherchés par un système de trois inéquations :

$$\begin{aligned} 6 &< x+(x+2) \quad (1)\\ x &< 6+(x+2) \quad (2)\\ x+2 &< x+6 \quad (3) \end{aligned}$$

24. Le meilleur exposé sur cette question reste, à ce jour, l'ouvrage d'Henri Lebesgue sur la mesure des grandeurs (Lebesgue, 1932). On lira aussi avec profit Dhombres, 1978.

Les inégalités (2) et (3) sont toujours vérifiées ; l'inégalité (1) constitue donc une condition nécessaire et suffisante. Elle équivaut à $x > 2$.

Ce résultat confirme que x ne doit pas être «trop petit». En revanche, il montre que, contrairement à une conjecture un instant envisagée, x pourra être «aussi grand que l'on veut». Le phénomène que l'on avait pu imaginer ne se produit donc pas. Aurait-il pu se produire, par exemple pour une autre valeur de la différence des deux côtés ? Pour étudier cette question, il convient d'introduire un *paramètre* [25]. L'un des côtés étant de mesure 6, désignons par a la différence des mesures des deux autres côtés. Le modèle algébrique correspondant est alors :

$$6 < x+(x+a) \quad (1')$$
$$x < 6+(x+a) \quad (2')$$
$$x+a < x+6 \quad (3')$$

L'inégalité (2') est toujours trivialement vérifiée. L'inégalité (3') ne l'est que si $a < 6$, mais elle n'impose aucune condition à x. On supposera donc qu'elle est satisfaite, sinon le problème proposé n'aurait pas de solution. L'inégalité (1') est équivalente à $x > (6-a)/2$, avec, donc, $(6-a)/2 > 0$. L'étude du modèle algébrique obtenu fait ainsi apparaître que, pour qu'il y ait une solution, x doit être «assez grand», *mais qu'il peut alors être «aussi grand que l'on veut»*. Ce résultat confirme et généralise celui obtenu dans le cas particulier précédemment examiné : si le problème a une solution, il a des solutions «arbitrairement grandes». Le phénomène envisagé un instant *ne se produit jamais.*

En vérité, on peut fort bien ne pas être totalement satisfait par ce résultat. Si la différence a est strictement inférieure à 6, les deux cercles tracés se coupent toujours, dès lors que x est assez grand, certes : voilà ce que notre modèle algébrique nous amène à conclure. Mais *comment se fait-il* qu'il en soit ainsi ? Pour répondre à cette question, on peut revenir au registre géométrique : en d'autres termes, on peut donner un *modèle géométrique* de notre *système algébrique d'inéquations.* On prendra ici à nouveau $a = 2$. Soit [OO'] le côté de mesure 6. On considère sur la droite (OO') le *repère d'origine* O pour lequel *le point* O' *a pour abscisse 6.* Le cercle C(O,x) coupe l'axe ainsi défini aux points M et N d'abscisses -x et x respectivement[26]. Le cercle C(O',x+2) coupe (OO') aux points P et Q d'abscisses respectives 6-(x+2) et 6+(x+2), soit -x+4 et x+8. Sur l'axe (OO') on a donc, si toutefois $-x+4 < x$, c'est-à-dire si $x > 2$:

$$M(-x) < P(-x+4) < N(x) < Q(x+8).$$

Les points M et N appartiennent au cercle C(O,x), les points P et Q au cercle C(O',x+2) : *chacun des deux cercles a donc un point intérieur et un point extérieur à l'autre ; par suite, ces deux cercles se coupent* [27].

25. C'est un fait fondamental, en géométrie *euclidienne*, que la «taille» de la figure n'intervient pas : on peut donc conserver la valeur 6 choisie initialement sans diminuer la généralité de l'étude.

26. C'est à dessein... que nous ne proposons pas de figure ici : le lecteur pourra le faire pour son propre compte.

27. Le fait que, sous cette condition, les deux cercles se coupent, est tenu au Collège pour aller de soi ; en toute rigueur, sa démonstration exigerait un axiome «à la Dedekind» : voir par exemple Greenberg, 1974, p.82.

IV.2. *La modélisation de systèmes extramathématiques*

Exploration algébrique du numérique et du géométrique : tels sont les deux grands axes structurant l'espace des recherches nécessaires. Au-delà, on entre dans les domaines que numérique et géométrique, souvent en combinaison, permettent de soumettre à la modélisation. Univers immense, sur lequel nous ne ferons ci-après que quelques rapides remarques.

Lorsque le système étudié est non mathématique, le corps de connaissances (relatives au système) sur lequel prend appui le travail de modélisation - qui permettra de produire de *nouvelles connaissances* relatives au système - peut relever d'un savoir bien déterminé : sciences physiques, biologiques, économiques, etc. Il est à peine nécessaire de redire ici que, dans tous les cas, une certaine connaissance de la discipline est alors nécessaire : pour modéliser un système physique, il faut connaître «de la physique», etc. Mais, entre l'étude du pendule simple par exemple (Chevallard, 1989 a, p.54), lequel «appartient», institutionnellement, à la physique, et l'étude d'un système «proprement mathématique», d'autre situations s'intercalent.

Certains des systèmes que l'on peut vouloir étudier sont soumis à des lois objectives, qui ne dépendent pas de la volonté des hommes. C'est le cas des phénomènes physiques et, plus généralement, des phénomènes qu'étudient les sciences de la nature. En revanche, certains systèmes, création de la culture, sont explicitement réglés, de manière parfois fort précise, par convention sociale. C'est le cas des transactions financières, du prêt à intérêt, etc., pratiques sociales qui sont en fait *définies a priori par un modèle mathématique* [28].

On notera cependant que cette distinction tend fréquemment à être oblitérée : la convention, banalisée par un usage social de longue durée, tend à devenir culturellement transparente. Elle tend à se *naturaliser*. Fruit d'un «pacte» explicite à l'origine, elle prend une apparence d'objectivité qui l'apparente aux systèmes que nous présente la nature.

Mais, en quelques occasions au moins, la distinction de la réalité mathématique et de la réalité extramathématique tend elle-même à s'évanouir. Nous en donnerons un seul exemple. Dans ses *Récréations mathématiques,* Edouard Lucas décrivait, au siècle dernier, une forme de calcul digital qui, nous dit-il, se rencontre «en Palestine» et permet de multiplier deux chiffres supérieurs ou égaux à 5 (Lucas, 1892, p.22) :

> La main ouverte, avec les doigts rapprochés, représente *cinq* ; pour représenter *six*, on baisse l'auriculaire ; pour représenter *sept*, on baisse deux doigts, l'auriculaire et l'annulaire ; pour représenter *huit*, on baisse trois doigts et pour représenter *neuf*, on en baisse quatre. Cela fait, on représente les deux facteurs avec les deux mains et la multiplication se fait par les règles suivantes : 1. Ajouter les doigts baissés et les compter comme dizaines. 2. Multiplier les doigts levés et ajouter le produit compté pour les unités au nombre des dizaines déjà obtenues.

Prenons un exemple : pour multiplier 7 et 8, on abaisse 2 doigts de la main gauche et 3 doigts de la main droite. Il y a donc 5 doigts baissés (chiffre des dizaines). Le nombre de doigts levés est 3 pour la main gauche, et 2 pour la main droite, nombres dont le produit est *6* (chiffre des unités). Le produit de 7 par 8 est donc 56.
Pour le mathématicien occidental, cette technique de multiplication, culturellement exotique, où le corps - les doigts des deux mains - est l'outil sémiotique essentiel, demande explication : elle appelle une *enquête épistémologique*. Celle-ci peut prendre la forme d'un modèle algébrique très simple, que Lucas donne d'ailleurs explicitement, avec ce commentaire : «Telle est la justification de ce joli procédé que nous recommandons aux

28. Sur ce thème, voir Chevallard et Jullien, 1989, chapitre 6.

maîtres d'école». Si l'on doit en effet multiplier le nombre 5+a par le nombre 5+b, avec a et b inférieurs à 5, on aura a doigts baissés (et donc 5-a doigts levés) à une main, et b doigts baissés (et donc 5-b doigts levés) à l'autre. La validité de la procédure employée sera établie si l'on peut démontrer alors que, au moins pour a et b variant de 0 à 4, on a l'égalité :

$$(5+a)(5+b) = 10(a+b) + (5-a)(5-b).$$

Or on vérifie aisément qu'il s'agit là d'une identité.

Un mathématicien «palestinien» de l'époque, écrivant quelque ouvrage de Divertissements mathématiques, aurait peut-être amusé son public en relatant la curieuse manière dont les enfants français font, quant à eux, la multiplication de deux nombres supérieurs à 10 :

$$\begin{array}{r} 67 \\ 29 \\ \hline 603 \\ 134 \\ \hline 1943. \end{array}$$

Peut-être aurait-il cherché, lui aussi, à donner à cette étrange technique une saine et nécessaire justification. Le contraste, pourtant, vaut d'être souligné. Une telle justification apparaîtrait, à nos yeux, comme un travail *mathématique* (comme il en allait précédemment à propos du procédé de calcul digital) opéré sur un objet *lui-même mathématique* - l'algorithme «usuel» de multiplication à la main. Dans le cas du procédé «palestinien», en revanche, la justification mathématique que nous avons apportée semble ne pas se distinguer, par l'effet d'exotisme liée à une certaine distance spatio-culturelle, de la modélisation mathématique de telle ou telle pratique sociale peu familière, telle la géomancie par exemple[29]. Joints à tous ceux précédemment cités, l'exemple que l'on vient de développer nous aidera à saisir un problème didactique fondamental, repris un peu plus loin dans le cadre de l'examen des difficultés que les perspectives jusqu'ici exposées élèvent devant nous : celui du statut des systèmes soumis à l'étude, et des connaissances qui en dérivent.

V. - Problématique du programme de recherche

V.1. *Contraintes normatives et déterminisme didactique*

Les prescriptions qu'impose toute perspective curriculaire déterminée se heurtent, on l'a dit (Chevallard, 1989 a, p.49), aux contraintes *permanentes* qui prévalent par-delà la volonté des décideurs. Le mur épais du *déterminisme didactique* ignore nos rêveries comme nos désenchantements ; et les intentions didactiques apparemment les mieux apprêtées s'y brisent aisément.

Aussi, avant même de se demander si telle réforme projetée est une «bonne» réforme, il faut s'assurer, autant que nous le pouvons dans l'état actuel de nos connaissances didactiques, qu'elle est tout simplement *possible*, et que, robuste, elle

29. Sur la géomancie, voir par exemple Jaulin, 1971.

pourra résister aux multiples dénaturations que les lois didactiques, qui se moquent de notre bonne volonté, sont toutes prêtes à lui infliger.

De ce point de vue, la perspective esquissée tout au long de notre travail a ce premier mérite, on le verra, de mettre en relief quelques contraintes didactiques incontournables, que l'illusion de la transparence, malheureux apanage des situations acquises, tend, dans les périodes «normales»[30], à gommer de notre champ de conscience.

Ce sont là pourtant des contraintes que l'évolution récente, en déstabilisant durablement le curriculum du Collège, a fait émerger à nouveau. Le problème de l'intégration didactique de la problématique de la modélisation, que nous considérerons maintenant, les rendra plus apparentes encore.

V.2. *Adéquation, idonéité, pathologies*

Les contraintes *normatives*, ou *prescriptions*, s'identifient à des classes de *conditions didactiques* qu'il s'agirait de créer, et qui devraient permettre aux élèves (ou, du moins, à une majorité d'entre eux) d'apprendre à employer de manière satisfaisante le calcul algébrique (et, plus généralement, à pratiquer la modélisation algébrique) dans une variété de domaines.

Cette intention, et les «manoeuvres» qu'elle inspire, sont en elles-mêmes banales. Les «lois» didactiques qui en gouvernent la réalisation le sont tout autant. Concrétisées dans un curriculum localement stabilisé, les contraintes retenues se traduiraient par la définition d'un certain *rapport institutionnel* au calcul algébrique, étalon en fonction duquel sera alors évalué, à travers un processus complexe[31], l'adéquation du *rapport personnel* de l'élève au calcul algébrique. On reconnaîtra ici, exprimé dans le cadre d'une conceptualisation sans doute non familière[32], un phénomène didactique banal.

Pourtant, aucun ensemble de conditions didactiques ne peut être à cet égard *universel*, en ce sens qu'il assurerait, en chaque élève, la formation du rapport attendu. Quoique de manière inégale sans doute, tout ensemble de conditions didactiques laisse la porte ouverte au surgissement de *pathologies* déterminées du rapport au savoir. Par le moyen notamment d'études expérimentales et cliniques conduites depuis plusieurs années, la didactique des mathématiques peut aujourd'hui fournir de précieux repérages dans un domaine que décideurs et opinion publique tout ensemble recouvrent encore de l'étiquette globale, pudique et dramatisante tout à la fois, d'«échec en mathématiques», voire, plus souvent encore, d'«échec scolaire»[33]. Comme si l'on parlait, en matière de santé publique, de «la maladie», entité unique et indifférenciée qu'il s'agirait d'éradiquer sans autre façon !

On résumera, plus prudemment mais trop globalement encore, certaines conclusions apportées par la recherche en disant que les distorsions provoquées, dans le jeu supposé - à tort - libre et souverain des *conditions* didactiques que l'on entend créer, par les *contraintes* didactiques permanentes, engendrent chez l'élève un rapport personnel au savoir enseigné présentant des pathologies déterminées, ou, à tout le moins, certaines particularités qui le rendent peu idoine[34] : on l'a vu, au demeurant, dans la deuxième partie de cette étude, à propos du calcul algébrique.

On retrouve alors les effets de la solidarité organique entre des éléments que l'on a tendance à séparer pour la bonne administration des choses de l'enseignement, solidarité

---

30. Au sens où Kuhn a pu distinguer «science normale» et «crises scientifique» (voir Kuhn, 1983).
31. Voir Chevallard et Feldmann, 1986.
32. Sur les notions de rapport institutionnel et de rapport personnel, voir Chevallard, 1989 b.
33. Voir Chevallard, 1988 a.
34. Sur la notion d'*idonéité*, voir Chevallard, 1989 a et b.

qui justifie en dernier ressort les expressions de *système* didactique et de système d'enseignement que nous avons plusieurs fois employées.

Cette solidarité «systémique» peut être exprimée, de manière sans doute un peu pessimiste, en disant que *toute «solution» est elle-même génératrice de problèmes* [35].

V.3. *La rupture de l'autonomie relative de l'algébrique*

Par rapport à la situation passée et actuelle, le réaménagement que nous envisageons ici rencontre tout de suite une difficulté évidente. Par principe il conduit, fût-ce localement, à rompre l'*autonomie relative* de l'algébrique, et, par voie de conséquence, de chacun des domaines d'emploi que l'on entendra donner au calcul algébrique - numérique comme géométrique par exemple. En visant à établir des liens *intersectoriels* organiques, il menace la différenciation interne, en différents *secteurs*, du corpus enseigné[36], et viole ainsi une loi didactique à laquelle il faudra bien, en quelque façon, payer son dû - sauf à voir croître de manière irréaliste la charge didactique et cognitive imposée aux acteurs, enseignant et enseignés, de la relation didactique.

Une telle évolution ouvre, plus généralement, sur un univers de problèmes de didactique sur lesquels nous sommes, aujourd'hui, encore peu avancés, et que l'on peut résumer ainsi : quelles sont les *conditions de possibilité*, et les limites, d'un enseignement et d'un apprentissage *fonctionnels* du calcul algébrique ? En particulier, elle attire l'attention sur les conditions de génération du rapport de l'élève aux *écritures symboliques* (et pas seulement au calcul algébrique) en tant qu'*outils de conceptualisation et de résolution de problèmes*. Cette dernière ligne de recherche conduit à insérer la question des écritures algébriques dans une perspective de *longue durée*, concernant la construction de *codes*, et la manipulation *formellement valide*, et *fonctionnellement pertinente*, des codes ainsi créés : partant de l'école maternelle avec les premiers codages graphiques[37], passant par l'école primaire avec les écritures numériques[38], elle se cristallise, au Collège, autour du code algébrique et se poursuit au-delà par la mise en oeuvre fonctionnelle du calcul algébrique.

Cette perspective, unitaire et progressive, qui retrouve un problème commun en divers avatars successifs, est cependant insuffisante si l'on veut résoudre le problème didactique de l'autonomie relative interne du corpus enseigné. L'unité de visée doit s'articuler à la reconnaissance de la différenciation des cibles - ainsi que l'analyse des différences entre langage arithmétique et code algébrique nous l'a montré (Chevallard, 1989 a, pp.63-64).

V.4. *Applications et modélisation*

Ce n'est pas par hasard, en effet, que le corpus enseigné se présente fragmenté en divers secteurs à l'articulation toujours incertaine. La formule usuelle d'une telle articulation, on le sait, est celle d'*application* : application d'un secteur (outil) à un autre (objet). Il faut alors mesurer, du point de vue qui nous occupe ici, la distance qui sépare cette notion traditionnelle d'application de celle de modélisation.

Dans la première formule, les interrelations entre deux secteurs sont directement, explicitement contrôlées dans leur direction comme dans leur contenu. Si on l'interprète en termes de modélisation, on dira que le secteur *appliqué*, S, fournit un répertoire

---

35. Pour un exemple d'analyse dans cette ligne de pensée, nous renvoyons à l'annexe 1 («L'empirisme, solution et problèmes») Chevallard, 1989 a.
36. Sur ce thème, voir Chevallard, 1985 b.
37. Voir Pérès 1984.
38. Voir par exemple Schubauer-Leoni, 1986.

prédéfini d'*outils de modélisation*, qui permettront de produire, à propos de certains *systèmes* du secteur d'*application*, S', certaines connaissances : celles, très précisément, qui peuvent être produites à l'aide de l'ensemble prédéterminé des outils qu'offre S (mis en oeuvre selon un répertoire de gestes techniques également fixé), *et à l'aide de ces outils-là seulement*. Ce qui importe alors est moins la connaissance du type de systèmes étudié, que la *capacité* des outils considérés *à produire des connaissances* relatives à ces types de systèmes.

Dans le processus de modélisation, au contraire, *le système et son étude sont premiers*. Les outils, seconds, retrouvent leur fonction de moyens au service d'une fin, la connaissance du système. L'expérience la plus simple peut convaincre qu'il n'existe a priori aucune garantie que le répertoire des outils nécessaires - ou souhaitables - pour mener à bien l'étude du système sera effectivement disponible au niveau considéré du cursus. On passe ainsi du *bricolage*, défini comme réutilisation de moyens disponibles, dont la disponiblité à un moment donné est liée à l'histoire autonome du processus de production de ces outils dans la classe, à une activité d'*ingénierie*, où la recherche des outils pertinents, et l'effort pour se les rendre disponibles, s'imposent. Corrélativement, on passe d'un outillage fermé et prédéfini à un outillage ouvert et indéfini.
Cette ouverture, consubstantiellement liée à l'activité de modélisation, a été constatée dans presque chacun des exemples dont nous avons illustré notre propos jusqu'ici. Elle est le point de départ d'une série de problèmes didactiques non résolus globalement (sous la contrainte de maintenir l'exigence de modélisation) et met en relief, a contrario, la robustesse de la solution traditionnelle en termes d'application.

La direction de recherche qui surgit alors tout naturellement est celle-ci : en chaque point du curriculum, il convient de faire en sorte que l'outil dominant dont l'apprentissage est visé (le calcul algébrique ici) soit coprésent aux outils dont la disponibilité est nécessaire pour mener à bien une étude significative. C'est poser là un problème d'*écologie didactique des objets de savoir* qui se révèle d'une extrême difficulté.

V.5. *Le statut des systèmes étudiés et de leur étude*

Quelle que soit l'activité proposée par l'enseignant, il est nécessaire que soit donné un *statut didactique* aux objets de cette activité. En mettant au premier plan le système étudié, l'approche modélisante pose instamment le problème du statut accordé au *système*, et aux *connaissances* que sa modélisation produira. Est-il un objet de savoir enseigné ? Les connaissances produites sont-elles «à savoir» ? Ou, en d'autres termes, l'enseigné doit-il, à la fin de l'étude, connaître le système étudié comme, par exemple, l'ingénieur doit connaître les systèmes dont il assure la maintenance ?

Si l'on réexamine l'activité mathématique-scolaire traditionnelle dans la perspective de la modélisation, on voit immédiatement que, dans ce cadre, la réponse aux questions précédentes est, généralement, négative. Les systèmes à connaître, les connaissances à propos de ces systèmes sont en effet assez fermement désignés par la tradition. Lorsqu'il aura démontré, *à titre d'exercice*, que trois entiers consécutifs a, b, c vérifient la relation $b^2 - ac = 1$, l'élève *pourra oublier ce résultat*. Semblablement, de l'étude des systèmes «rectangles» (Chevallard, 1989 a, p.59), il devra retenir la formule S = ab sans doute, non la formule x = Stan(u). Plus généralement, le contrat didactique gouverne cette répartition de la manière la plus claire, par le moyen du processus de topogénèse[39]. Une connaissance produite *dans les exercices*, c'est-à-dire, en principe, par *les élèves*, n'est

39. Sur cette notion, voir Chevallard, 1985 b.

pas supposée «à savoir» ; une connaissance produite *dans le cours*, c'est-à-dire, en principe, *par l'enseignant*, sera réputée «à savoir».

Le mécanisme par lequel, dans le traitement didactique usuel, les systèmes étudiés se trouvent, en quelque sorte, *mis entre parenthèses*, peut être plus précisément décrit. Au départ, il y a bien un système à étudier, et l'étude prend, très normalement, la forme concrète de *questions* que l'on se pose à son sujet. Apporter une *réponse* aux questions posées, c'est, dans le langage utilisé ici, produire des connaissances relatives au système. Mais, en un autre langage, plus familier, poser une question c'est proposer un *problème*, et fournir une réponse à la question posée c'est donner une *solution* au problème proposé.

Les problèmes naissent ainsi dans l'étude de systèmes. Ils constituent le moyen par lequel on passe de l'*intention d'étude* à la *production de connaissances*. Dès lors, *la mise entre parenthèses du système*, dont nous parlions, apparaît corrélative de *la mise en avant des problèmes* qui apparaissent dans l'étude du système. Ou, plus exactement, elle se réalise par la mise en avant de la *résolution* de problèmes (relatifs au système étudié) ; parle primat accordé au fait de vaincre une difficulté, soit de *résoudre le problème*, par rapport aux *résultats* que cette résolution permet d'établir. De là que, dans le cadre didactique-scolaire usuel, on résout des problèmes plus qu'on n'*étudie des systèmes*. Ainsi, *le problème vient faire écran entre le système et la connaissance du système*.

On doit souligner ici que ce phénomène est *proprement didactique*, en ce qu'il est lié, très précisément, au problème du statut didactique des systèmes étudiés et des connaissances produites, auquel il fournit une solution. De manière fort éclairante, en effet, on voit s'inverser le rapport de dominance entre systèmes et connaissance des systèmes, d'une part, et problèmes, d'autre part, si, au lieu de considérer la catégorie des *exercices*, on porte son regard sur le *cours*. Ou, pour le dire d'une manière indépendante de telle ou telle structure didactique particulière, quand on passe du «rôle» de l'enseigné au «rôle» de l'enseignant.

Dans ce dernier cas, selon un basculement statutaire déjà noté, la *procédure de production* de connaissances, que l'élève pourra oublier, compte moins que les *connaissances produites*, qu'il devra faire siennes. Les «exercices» viendront ensuite, non pas produire de nouvelles connaissances à institutionnaliser, mais attester de la capacité de l'élève à manipuler les connaissances produites et institutionnalisées *par l'enseignant*.

V.6. *Une organisation didactique pathogène*

En légitimant l'effacement des systèmes étudiés au profit de la seule résolution des problèmes que leur étude fournit l'occasion de soulever, le contrat didactique usuel engendre une espèce déterminée de pathologie. Un problème de mathématiques devient une suite de difficultés à vaincre ; le système sous-jacent est oublié au point que l'organisation des différentes questions que l'on se pose à son sujet, leurs interrelations et les dépendances entre les voies et les moyens de la résolution tendent à être gommées. En conséquence, le rapport de l'élève à cet objet didactique particulier qu'est un problème (au sens scolaire du terme) prend une structure extrêmement singulière. La première question *«faite»*, c'est-à-dire la première difficulté vaincue, on oubliera facilement et le résultat établi et les techniques mises en oeuvre pour ce faire, et les connaissances auxiliaires, apparues au cours de sa résolution, relatives au système dont les questions suivantes du problème continueront pourtant l'étude.

La situation de résolution de problème est ainsi le lieu d'une intense *amnésie didactique*. Un problème est «à faire», non «à apprendre», distinction qui signe un rapport particulier à l'activité de résolution de problèmes. Le slogan, aujourd'hui si bien reçu, selon lequel «on apprend des mathématiques en résolvant des problèmes», a pour cela une signification ambiguë.

Les didacticiens, à la suite de Guy Brousseau, parlent de la *dévolution* du problème que les élèves devront résoudre : le problème proposé par l'enseignant doit devenir problème *pour l'élève*. Il nous semble pourtant que cette notion doit être réanalysée à la lumière des notations qui précèdent. Le problème, second logiquement et chronologiquement par rapport au système dont il permettra, par sa résolution, d'accroître notre connaissance, ne peut être dévolu que sur le fond de la dévolution première *du système* que l'on entend étudier[40]. Plus largement, prenant ici le mot de problème en son sens scolaire usuel[41], on opposera à cette amnésie *l'étude du problème*, par opposition à sa seule «résolution» : étude, que l'énoncé du problème organise et conduit, du système premier sous-jacent, bien sûr ; étude, aussi, de ces systèmes que sont les modèles successifs que cette étude elle-même engendre ; étude enfin, au second degré si l'on peut dire, des techniques du travail de ces modèles, c'est-à-dire de leur mode de génération.

Dans cette perspective, le problème se voit conféré le statut d'un *terrain d'apprentissage mathématique* - même si les connaissances qui y sont produites ne font pas l'objet, ès-qualités, d'une institutionnalisation dans les formes dominantes du «cours».

V.7. *«Résolution de problèmes» et «activités»*

Dans l'enseignement traditionnel, la «mise entre parenthèses» du système sous-jacent à un problème donné est rendue possible par ce fait que les systèmes ainsi (potentiellement) étudiés appartiennent à des *classes standard de systèmes*. Ainsi en va-t-il avec les configurations géométriques, où les triangles rectangles succèdent aux rectangles, etc. La familiarisation acquise est alors une condition de possibilité essentielle du phénomène de dominance des problèmes. Or cette condition cesse d'être réalisée lorsque, selon les vues développées ici, et, plus généralement, selon une évolution qui touche le curriculum en de nombreux pays, on tend à s'intéresser à des systèmes *«non standard»* - ainsi qu'il en va dans le cadre des «activités» que la réforme des programmes qui vient de s'achever aura tenté de promouvoir.

Le problème didactique général de l'assignation d'un *statut* aux systèmes étudiés prend alors une forme concrète immédiatement sensible. Dans la mesure où les connaissances produites ne sont pas institutionnalisées en savoir enseigné, le temps de l'étude apparaît comme du temps d'horloge qui demeure *hors du temps didactique* [42], c'est-à-dire comme du temps chronologique *non didactiquement productif*. Le professeur et les élèves «perdent leur temps», quelle que soit la masse des connaissances manipulées ou produites au cours de l'étude. Manifestation cruelle et, pourra-t-on penser, absurde, mais bien réelle pourtant, de ces contraintes didactiques dont nous parlions plus haut : contraintes que la ferveur réformatrice ne saurait, par ses seules forces, annuler !

Ce problème didactique est ancien : il apparaît lorsque s'impose, historiquement, la tyrannie féconde du temps didactique «moderne»[43]. La «solution» à laquelle on s'est

---

40. La chose est apparente dès lors que le plan de réalité du système et celui du modèle s'éloignent l'un de l'autre. Elle est plus nette déjà lorsque le système est, par exemple, une configuration géométrique ; elle devient évidente lorsqu'il s'agit d'un système physique - qu'il apparaîtra bon, alors, de présenter concrètement aux élèves avant et afin d'enclencher son étude.
41. Sur l'analyse de cette notion, nous renvoyons à Chevallard, 1989 c.
42. Sur la notion de temps didactique, voir Chevallard, 1985 b.
43. Voir Chevallard et Mercier, 1987.

arrêté au cours de ces dernières années est indiquée par le mot d'*activité*. Formellement, le principe en est simple. Plus que de le résoudre, il s'agit toujours de contourner, d'éviter le problème didactique que pose la nécessaire présence, dans le champ didactique, des systèmes dont l'étude fournira le terrain de l'apprentissage.

La solution «traditionnelle» - dont nous avons hérité - consiste à n'employer que des systèmes «classiques», objets supposés *déjà naturalisés* par l'enseignement prodigué, et que le problème que l'on se pose à leur propos vient à point nommé faire oublier. Cette naturalisation, toutefois, ne peut guère concerner que des systèmes (tenus pour) *intramathématiques*, relevant par exemple du numérique ou du géométrique. Toutefois, dans l'enseignement classique, auquel la réforme des mathématiques modernes a mis fin, l'enseignement des mathématiques supposait l'exploitation didactique de systèmes clairement extramathématiques, dont il fallait par conséquent que les élèves eussent quelque connaissance[44]. A défaut de pouvoir être naturalisés, de tels types de systèmes étaient alors transformés en systèmes *standard* regardés comme classiques, en tant que «supports» de problèmes eux-mêmes classiques : ainsi parlait-on de «problèmes de marchands de vins», de «problèmes d'actions combinées», de «problèmes de mélanges» ou de «problèmes d'alliages» - manière de faire dont les expressions de «problèmes de robinets» ou «de trains qui se croisent» étaient culturellement devenus emblématiques.

La solution contemporaine récente, à laquelle le mot d'activité sert d'emblème, pousse à l'extrême cette solution classique, et, en un sens, la dénature. On parlera alors de «problèmes», tout court ; de «résolution de problèmes», sans autre précision ; d'«activité de résolution de problèmes», plus complètement ; et, par un raccourci épistémologiquement ambigu et didactiquement hasardeux, d'«activité», tout simplement. La signification didactique du temps passé à l'étude d'un système nécessairement déterminé serait alors, génériquement, qu'on y aura «résolu un problème», voire seulement qu'on y aura développé «une activité» - qui pourrait bien, au demeurant, ne pas être de «résolution de problèmes».

Ainsi l'institution d'enseignement se met-elle à parler dans une langue de bois *abstraite*, qui remplace le jargon coloré d'autrefois. La stabilité d'une telle modification apportée au contrat didactique ne va pas de soi. Elle suppose en effet que «résolution de problèmes» et «activités» soient traitées *à l'égal d'un objet de savoir*, seul type d'objet autour duquel peut se nouer un contrat d'enseignement et d'apprentissage. La gageure est ici de faire accréditer cette fiction que «résoudre des problèmes» revient à maîtriser un objet de savoir *déterminé* - la «résolution de problèmes», ou, comme on dit en anglais, le *problem solving*.

A cet égard, la tentative la plus ambitieuse, bien que située aux marges du système d'enseignement, est constituée par l'oeuvre pionnière de George Polya : *How to Solve It* date de 1945 [45]. Une telle ambition repose sur l'hypothèse métathéorique selon laquelle il existerait un corps de connaissances assez bien défini, appelé *heuristique* par Polya, dont la maîtrise permettrait, en termes de performance, de «résoudre des problèmes», *sans que l'on précise de quels types de problèmes, relatifs à quels types de systèmes, il s'agit.*

---

44. Pour bien comprendre le problème didactique qui se présente ici, on peut réfléchir sur l'exemple suivant : si, dans un cours élémentaire de théorie des probabilités (ou de combinatoire), on désire proposer des problèmes portant sur le jeu de *bridge* ou le jeu d'*échecs*, il convient que certaines connaissances relatives à ces jeux soient disponibles ; or la connaissance de ces jeux n'est pas regardée comme relevant intrinsèquement des mathématiques, et il conviendra donc d'associer ces jeux (ces «systèmes»), d'une certaine manière, à l'enseignement prodigué.
45. Voir Polya, 1965.

On n'entrera pas ici dans le détail de la critique de cette tentation unitariste, contre laquelle bien des arguments peuvent être invoqués[46]. Nous soulignerons seulement que, existerait-il un ensemble à valeur universelle de principes de résolution de «problèmes», il ne s'agirait pas moins de faire vivre dans la classe, et d'intégrer dans le curriculum, et le système support du problème à résoudre, et le problème que l'étude du système met en avant.
Or, face à cette incontournable exigence, le mouvement en faveur du *problem solving* est tenté d'oublier le *système* en hypostasiant le *problème*, de mettre l'accent sur la *résolution* du problème en scotomisant la *dévolution* du problème, fût-elle, comme il en va souvent dans l'activité de recherche, *auto*dévolution du problème. Tentative a priori hasardeuse de résoudre un problème didactique dont elle simplifie abusivement l'énoncé, la voie ouverte par les recherches sur le *problem solving* passe ainsi à côté des difficultés que nous voulons souligner ici.

V.8. *Organisations du savoir et domaines de connaissances*

La loi didactique d'autonomisation interne du corpus enseigné, déjà mentionnée, implique une certaine *organisation* du savoir, et voue à l'échec les tentatives de traitement qui se veulent «indifférentes au contexte»[47]. Le corpus mathématique enseigné se présente toujours comme plus ou moins structuré. L'état présent du système d'enseignement le fait apparaître, à cet égard, comme plutôt *moins structuré* : situation que nous avons décrite comme l'effet durable, et non encore réduit, d'une déstabilisation du curriculum inaugurée par la réforme des mathématiques modernes (Chevallard, 1989 a, pp.45-46). Mais il semble possible d'établir une hiérarchie des *niveaux d'organisation* qui, tout à la fois, fournisse à l'analyse didactique un schéma descriptif large, et dote l'ingénierie curriculaire d'un cadre directeur réaliste.

On distinguera, en premier lieu, l'organisation *globale* du corpus, qui divise celui-ci en différents *secteurs*. C'est elle qui, dans le vaste bouleversement de la réforme des mathématiques modernes, est d'abord réaménagée : les titres mêmes des rubriques composant les programmes sont changées (Chevallard, 1985 a). Au niveau immédiatement inférieur se trouvent les organisations *régionales*, où apparaissent, dans des formes définies, des relations *intersectorielles*, dont nous avons dit plus haut qu'elles ne doivent pas, pour des raisons d'économie didactique, devenir trop complexes. Enfin vient le niveau des organisations *locales*, dont Hans Freudenthal a naguère bien mis en valeur le rôle structurant[48].

C'est à ce dernier niveau que nous rejoindrons le problème qui nous occupe ici. Une organisation locale, rappelons-le, met en forme du savoir institutionnellement reconnu comme «à enseigner» et «à apprendre». Or le traitement didactique du savoir enseigné *suppose plus que le savoir enseigné*. Il appelle, comme on l'a montré, *des types de systèmes*, qui n'ont jamais été du savoir enseigné ou ont cessé de l'être, sur lesquels porteront des *types de problèmes*, et il appelle encore ces classes de systèmes (intramathématiques) dont la manipulation pertinente permettra la résolution des problèmes proposés.

Surgit ainsi, à la croisée d'un type de systèmes et d'un type de problèmes, ce que nous nommerons un *domaine de connaissances* - connaissances dont une large partie,

46. Nous nous contenterons de renvoyer à Schoenfeld, 1985 (chapitre 3 notamment), et à Schoenfeld, 1987.
47. Vir Niss, 1987, p.493.
48. Voir Freudenthal, 1971.

présente dans la classe *à titre de moyen de l'activité de la classe*, nécessaire par conséquent *à l'exercice du métier d'élève*, ne sera jamais institutionnalisée en savoir.

La reconnaissance de cet état de fait peut être résumée par l'expression de «curriculum caché», *hidden curriculum*, ensemble des conditions et contraintes qui entrent dans la définition du curriculum, mais qui ne sont pas explicitées par les textes qui administrent officiellement le système d'enseignement. C'est donc dans cet espace curriculaire, structuré par la triple organisation - globale, régionale, locale - du corpus enseigné, cadre d'activité où émergent les domaines de connaissances que le fonctionnement didactique suppose et engendre, que doit être posé le problème fondamental des emplois du calcul algébrique au Collège.

V.9. *Contrat didactique et culture mathématique-scolaire*

La mise en fonctionnement d'un concept nouveau dans une institution n'est jamais seulement une affaire de propagande, d'endoctrinement ou d'apprentissage «pur». Elle peut être un temps - un temps seulement - un effet de mode ; mais sa pérennisation suppose un changement plus profond.

Ainsi en va-t-il avec le concept de modélisation. Son inscription institutionnelle dans l'Ecole ne peut se satisfaire d'une révolution dans les têtes, d'un changement dans les mentalités. Ou plutôt, tout changement dans les mentalités est corrélatif d'un changement *dans la culture de l'institution*, lequel est, indissociablement, changement dans la culture *matérielle* de l'institution.

Un tel changement s'articule donc, inévitablement, à l'émergence de *dispositifs concrets* inédits, autour desquels viennent se nouer des contrats didactiques renouvelés. Il ne suffit pas de montrer que l'activité mathématique-scolaire est susceptible d'une lecture différente, et de suggérer que cette lecture porte en elle une puissance de changement de ce dont elle prétend être lecture. Encore faut-il que cette manière autre de lire soit constamment réactivée, au sein même de l'institution, et qu'à partir d'un foyer où elle apparaisse comme la seule culturellement possible, elle irradie, en quelque sorte par contiguïté, vers les parties où elle est moins susceptible d'être spontanément reçue.

Nous avons dit plus haut que la *notion commune* de modélisation - à partir de laquelle, par continuité et rupture, peut s'établir le *concept* de modélisation - était appelée par l'étude de ces systèmes dont la connaissance n'est revendiquée par aucun savoir établi. L'hypothèse de travail que retient alors le programme de recherche ici esquissé est que le concept de modélisation, pour prendre racine dans l'Ecole, doit se concrétiser dans l'étude de tels systèmes, qui ne relèvent clairement, à un moment donné de leur histoire, d'aucune des disciplines enseignées. La mise à l'épreuve d'une telle hypothèse suppose donc un lieu spécifique, qui serait le foyer dont nous avons parlé. C'est à un tel lieu que l'équipe «Modélisation algébrique» de l'IREM d'Aix-Marseille a donné le nom d'essai d'*Atelier MSE, ou Atelier de modélisation mathématique de systèmes extramathématiques*. Et c'est autour de ce lieu qu'elle conduit actuellement des recherches dont la série de trois articles qui s'achève ici a tenté de présenter la problématique générale[49].

V.10. *Conclusion*

L'analyse didactique des perspectives curriculaires que nous avons esquissées amène en surface des problèmes de didactique des mathématiques qui soulignent la nécessité de liens très étroits, d'une dialectique opiniâtre, qui devrait être le souci de tous,

49. Voir Chevallard, 1989 d.

entre la recherche *fondamentale* en didactique et les activités de *développement* du système d'enseignement.

Par contraste, la situation actuelle laisse apparaître la grande légèreté dont la tradition, d'inspiration empirique et dogmatique, nous a fait les malheureux héritiers. Il ne suffit pas de délibérer, de décider et d'agir pour résoudre les problèmes auxquels nous sommes et restons confrontés. Comme en d'autres domaines, la recherche n'est plus aujourd'hui cette part de rêve que des sociétés à forte croissance pouvaient s'offrir comme par surcroît. Il lui appartient désormais d'explorer, au nom de tous, les voies du possible.

Références bibliographiques

Artin E. (1972), *Algèbre géométrique*, Gauthier-Villars, Paris.

Badiou A. (1968), *Le concept de modèle*, François Maspéro, Paris.

Balibar E. et Macherey P. (1985), "Formalisme et formalisation", *Encyclopaedia Universalis*, vol. 7, Paris, pp.1183-1186.

Berrondo M. (1979), *Les jeux mathématiques d'Eurêka*, Dunod, Paris.

Chevallard Y. (1985a), "Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège - Première partie. L'évolution de la transposition didactique", *Petit x, 5*, pp.51-94.

Chevallard Y. (1985b), *La transposition didactique - Du savoir savant au savoir enseigné*, La Pensée sauvage, Grenoble.

Chevallard Y. (1986), "Les programmes et la transposition didactique - Illusions, contraintes et possibles", *Bulletin de l'APMEP*, 352 (février 1986), pp.32-50.

Chevallard Y. (1988a), *Notes sur la question de l'échec scolaire*, Publications de l'IREM d'Aix-Marseille, n° 13, Marseille.

Chevallard Y. (1988b), "Implicit Mathematics : Its Impact on Societal Needs and Demands", *in* John Malone, Hugh Burkhardt et Christine Keitel (eds), *The Mathematics Curriculum : Towards the Year 2000*, Curtin University of Technology, Perth (Australie), 1989, pp.49-57.

Chevallard Y. (1989a), "Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège - Deuxième partie. Perspectives curriculaires: la notion de modélisation", *Petit x*, 19, pp.43-75.

Chevallard Y. (1989b), *Le concept de rapport au savoir - Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel, intervention au Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique* (Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 26 juin 1989), année 1988-1989, LSD-IMAG et Institut Fourier, Grenoble, pp.211-235.

Chevallard Y. (1989c), *Activités de modélisation mathématique en classe de seconde*, rapport intermédiaire de l'équipe «Modélisation algébrique» de l'IREM d'Aix-Marseille.

Chevallard Y. (1989d), *Arithmétique, algèbre, modélisation - Etapes d'une recherche*, Publications de l'IREM d'Aix-Marseille, n° 16, Marseille.

Chevallard Y. et Feldmann S. (1986), *Pour une analyse didactique de l'évaluation*, Publications de l'IREM d'Aix-Marseille, n° 3, Marseille.

Chevallard Y. et Mercier A. (1987), *Sur la formation historique du temps didactique*, Publications de l'IREM d'Aix-Marseille, n°8, Marseille.

Chevallard Y. et Jullien M. (1989), *Sur l'enseignement des fractions au Collège - Ingénierie, recherche, société*, Publications de l'IREM d'Aix-Marseille, no 15, Marseille.

Dhombres J. (1978), *Nombre, mesure et continu : épistémologie et histoire*, Cedic/Nathan, Paris.

Dunn S.C. (1981), "Parking a Car", in D.J.G. James et J.J. McDonalds (eds), *Case Studies in Mathematical Modelling*, Stanley Thornes, Cheltenham, pp.110-123.

Freudenthal H. (1971), "Geometry Between the Devil and the Deep Sea", *Educational Studies in Mathematics*, 3, pp.413-435.

Freudenthal H. (1973), *Mathematics as an Educational Task*, D. Reidel, Dordrecht.

Greenberg M.J. (1974), *Euclidean and Non-Euclidean Geometry*, W.H. Freeman, San Francisco.

Halmos P.R. (1967), *Introduction à la théorie des ensembles*, Gauthier-Villars, Paris, et Mouton, Paris - La Haye, deuxième édition 1970.

Hilbert D. (1971), *Les fondements de la géométrie*, édition critique préparée par Paul Rossier et publiée avec le concours du CNRS, Dunod, Paris, 1971.

Jaulin R. (1971), "Analyse formelle de la géomancie", in P. Richard et R. Jaulin (eds), *Anthropologie et calcul*, Union générale d'éditions, Paris, pp.183-215.

Kuhn T.S. (1983), *La structure des révolutions scientifiques*, Flammarion, Paris.

Lebesgue H. (1932), *La mesure des grandeurs*, Albert Blanchard, Paris, 1975.

Lucas E. (1892), *Récréations mathématiques*, vol. III, Albert Blanchart, Paris, 1960.

Mendelson E. (1964), *Introduction to Mathematical Logic*, D. Van Nostrand, Princeton.

Niss M. (1987), "Applications and Modelling in the Mathematics Curriculum - State and Trends", *Int. J. Math. Educ. Sci. Techn.*, 18, 4, pp.487-505.

Ore O. (1967), *Invitation to Number Theory*, The Mathematical Association of America, Yale University.

Pérès J. (1984), *Utilisation d'une théorie des situations didactiques en vue de l'identification des phénomènes didactiques au cours d'une activité d'apprentissage scolaire - Construction d'un code de désignation d'objets à l'école maternelle*, Université de Bordeaux I, IREM de Bordeaux.

Polya G. (1965), *Comment poser et résoudre un problème*, deuxième édition, Dunod, Paris.

Potts R.B. (1986), "Discrete Mathematics", in M. Carss (éd.), *Proceedings of the Fifth International Congress on Mathematics Education*, Birkhaüser, Boston, pp.31-47.

Schoenfeld A.H. (1985), *Mathematical Problem Solving*, Academic Press, Orlando.

Schoenfeld A.H. (1987), "Polya, Problem Soving, and Education", *Mathematics Magazine*, 60, 5 (décembre 1987), pp.283-291.

Schubauer-Leoni M.L. (1986), *Le contrat didactique dans l'élaboration d'écritures symboliques par des élèves de 8 - 9 ans*, Interactions didactiques, no 7, Universités de Genève et de Neuchâtel.

Smith D.E. (1925), *History of Mathematics*, vol. II, Dover, New York, 1958.

Vergnaud G. (1981), *L'enfant, la mathématique et la réalité*, Peter Lang, Berne.