VERS L'ALGORITHME DE LA DIVISION AU CM_1

(par Claude PARISELLE – I.R.E.M. de Grenoble)

Une technique opératoire est un gros sujet de préoccupation pour les enseignants. Celle de la division est en effet délicate à faire acquérir aux enfants. Il nous paraît nécessaire de l'expliciter pas à pas en prenant garde de ne jamais la couper du concept. Cela exige une très longue approche au cours de laquelle l'enfant élabore des méthodes de recherche du quotient et du reste ; ensuite elles seront collectivement reprises et perfectionnées par la classe qui mettra ainsi au point des techniques transitoires. Ce travail devrait se poursuivre au moins jusqu'en sixième et peut-être ne pas déboucher obligatoirement, le plus rapidement possible, sur la technique opératoire la plus courante en France.

A ce sujet, nous renvoyons nos lecteurs aux articles parus dans les numéros 1, 13 et 14 de IN et nous reproduisons en annexe un organigramme tiré de la brochure *"La division à l'école élémentaire"* publiée par l'A.P.M.E.P. (Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public), pour le lecteur qui aurait besoin de se convaincre de la complexité de l'algorithme !

L'approche de la division décrite dans les pages suivantes a les mêmes objectifs :

I – Présenter aux enfants des activités variées dans lesquelles intervient la division et que l'on peut répartir en trois types :

1 – **Activités numériques** (On travaille sur les nombres sans se soucier d'un habillage concret).

– reconnaître si un naturel a est multiple d'un naturel b.

– encadrer a par deux multiples consécutifs de b.

– résoudre dans IN les équations

$a = b \times \square + \triangle$ avec le cas $\triangle < b$

$a = b \times \square$ (cas du reste nul).

– rechercher des caractères de divisibilité.

2 – Situations-problèmes.

Exemples :

– Partages égaux avec reliquat minimum (On cherche la valeur d'une part ou le nombre de parts).

– Recherche du nombre de carreaux (carrés) de 6 cm de côté pour carreler une cuisine de 2,8 m sur 4 m.

– Activités sur le calendrier (Approche du calendrier perpétuel) : par exemple, sachant que le 11 mai 1978 était un jeudi,

- donner d'autres jours de mai 1978 connaissant leurs quantièmes.
- le 18 juin était-il un jeudi ?
- quel jour sera le 1er janvier 1979 ?
- quel était le jour de ma naissance ?

3 – Situations-jeux.

Ce sont des jeux dans lesquels il existe une stratégie gagnante qui fait intervenir la division ; par exemple :

– Course à zéro (ou jeu des cavaliers) *

– Jeu de pièges (voir IN n° 13)

Suivant les cas, ces activités mettent l'accent sur le quotient, le reste ou les deux à la fois.

II – Montrer aux enfants que les trois types d'activités ci-dessus ont un aboutissement commun, l'écriture,

$$a = bq + r$$
$$\text{avec} \quad r < b.$$

III – Conduire les élèves, grâce aux activités de type ③ , à l'usage des soustractions successives de b ou de multiples de b. Cette méthode sera réinvestie ensuite dans les activités de type ① ou ② et dans l'élaboration de techniques opératoires.

(*) Jeu à deux joueurs : étant donné un nombre (par exemple 20), chaque joueur peut retrancher 1 ou 2 au nombre annoncé par le joueur précédent. Gagne celui qui dira zéro.
Il existe une stratégie gagnante que les élèves peuvent trouver.

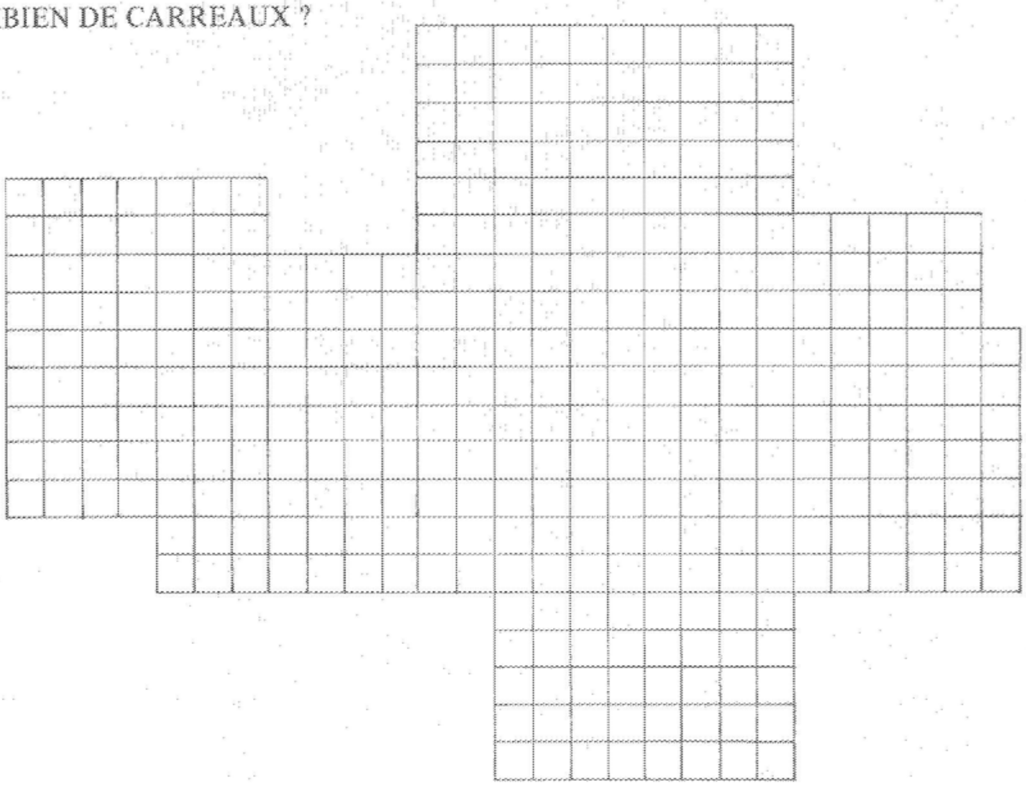
COMPTE RENDU DU TRAVAIL SUR LA DIVISION – CM_1 de Mme VIDAL à Chambéry.

(16 séances d'environ 1 h. chacune)

Jeudi 18 Janvier 1979.

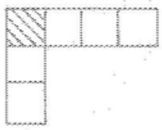
Les enfants travaillent sur la fiche ci-dessous qui leur est proposée sans commentaire.

COMBIEN DE CARREAUX ?



Intentions : Voir si les enfants utilisent spontanément le fait que le nombre de carreaux d'un rectangle est le produit du nombre de carreaux d'une ligne par le nombre de carreaux d'une colonne.

– lors de la mise en commun, rappeler et renforcer au besoin cet aspect de la multiplication. Corriger également les erreurs (par exemple celles qui sont liées au "problème du coin")



Remarques : – certains enfants comptent tous les carreaux (soit oralement, soit en inscrivant un nombre dans chaque carreau ce qui est évidemment extrêmement long).

– d'autres commencent à compter, puis se mettent à utiliser au cours du travail un mélange de multiplications et d'additions.

– d'autres enfin "découpent" dès le début la figure en rectangles (en traçant des traits) à l'intérieur desquels ils écrivent le nombre de carreaux, presque toujours calculé par multiplication. Ils terminent par une addition.

Lundi 22 Janvier.

– Mise en commun à propos du dénombrement des carreaux. Il est notamment fait appel aux enfants qui avaient commencé par tout compter.

– Ensuite la maîtresse demande aux élèves de dessiner le plus petit rectangle contenant la figure, et de trouver, sans les dessiner, combien il contient de petits carreaux.

– En fin de séance, la maîtresse distribue à chaque enfant une feuille 15 cm X 10 cm quadrillée (carreaux de 1 cm sur 1 cm) et demande de découper ces carreaux pour la prochaine fois.

Jeudi 25 Janvier.

La maîtresse explique aux enfants qu'avec les carreaux découpés, ils vont faire des pavages comme s'ils étaient des carreleurs. Elle leur demande de faire, avec 50 carreaux, le rectangle **le plus grand possible** ayant un "côté de 6 carreaux".

Tous les enfants résolvent le problème par manipulation, et sans erreur.

Après mise en commun, on écrit au tableau :

$$50 = (6 \times 8) + 2$$

Le travail recommence avec un côté de 13, puis de 7, et aboutit aux écritures :

$50 = (13 \times 3) + 11$ et $50 = (7 \times 7) + 1$

La maîtresse fait porter la discussion sur la question suivante : "Quand est-on sûr de ne plus pouvoir faire de rangée ? ".

Les enfants répondent en exprimant bien la condition $r < b$, à leur manière.

On reprend encore un travail analogue avec 84 et 15, avec 84 et 10, avec 84 et 14. Peu à peu, les enfants abandonnent la manipulation des petits carreaux et cherchent tout de suite à approcher le nombre a de carreaux par des multiples de b (nombre de carreaux dans une rangée).Ils font pour cela des multiplications, mais se servent aussi de l'ordre de grandeur : c'est-à-dire qu'ils ne calculent pas systématiquement b, $2b$, $3b$, $4b$, ...

Bien entendu, les exemples comme $a = 84$ (grand nombre de carreaux) et $b = 10$ (utilisation facile des multiples de 10) incitent les enfants à abandonner le matériel.

Lundi 29 Janvier.

Après avoir demandé aux enfants de "raconter" la séance précédente, la maîtresse demande de trouver combien on peut faire au maximum de rangées de 15 avec 2 543 carreaux.

Après la phase de recherche, suit une mise en commun permettant aux enfants d'expliquer leur "tactique".

Généralement ils choisissent un premier nombre (il serait intéressant d'étudier en détail ce premier choix qui ne semble pas souvent refléter un souci de l'ordre de grandeur). Ayant observé le produit de ce nombre par 15, ils font ensuite un deuxième choix et ainsi de suite. La plupart des enfant ne s'arrêtent que lorsqu'ils ont trouvé un nombre tel que :

$$15 \times b \leqslant 2\,543$$

$$15 \times (b + 1) > 2\,543$$

On peut aussi noter que, si certains enfants ne font que des multiplications, la plupart terminent la recherche en ajoutant ou en retranchant un certain nombre de fois 15, ou même $15 \times k$.

Exemple :

15	15	16	15	15	2250
× 50	× 60	× 500	× 200	× 150	+ 15
750	900	7500	3000	75	2265
				15	+ 15
				2250	2280
					+ 150
	2543				2430
	− 2535				+ 150
	0008				2580
					− 15
150 + 1 + 1 + 10 + 10 − 1 − 1 − 1 = 169					2565
					− 15
2543 = (15 × 169) + 8					2550
					− 15
					2535

La maîtresse intervient pour faire rappeler les règles de la multiplication par 10, 100, 1 000, ... et pour suggérer aux enfants de commencer leur recherche en "essayant" successivement les nombres obtenus par la multiplication par 10, 100 ou 1 000. Elle propose alors de faire la recherche pour 3 500 carreaux à poser par rangées de 16.

On peut alors constater que les stratégies restent souvent les mêmes (avec des séries de choix parfois plus pertinents) et que la "stratégie de 10, 100, 1 000 .... " est encore assez peu reprise par les enfants. (Cette suggestion a peut-être été faite trop tôt).

Jeudi 1er Février.

La maîtresse demande aux enfants de lui raconter l'histoire du Petit Poucet. Chacun prenant la parole pour rajouter un détail oublié, on arrive à une "reconstitution" très complète.

Les enfants connaissent déjà la lieue et, ayant fait une estimation de sept lieues en kilomètres, on reprend celle-ci et on convient de parler des "bottes de vingt sept km" du Petit Poucet.

La maîtresse déplie et accroche devant le tableau une carte routière. Elle explique comment on trouve les distances.

Un enfant vient au tableau et choisit où il irait s'il était le Petit Poucet (le premier choisit Paris, le deuxième Bilbao et le troisième Genève). En partant de Chambéry et en choisissant son itinéraire, il lit toutes les distances indiquées. Tous les autres enfants notent, puis font l'addition.

Une discussion s'engage, d'où il ressort que :

– Le Petit Poucet ne doit pas dépasser sa destination, mais aller le plus loin possible en utilisant ses bottes de 27 km.

– Afin d'être sûr de s'arrêter au bon moment, il doit savoir d'avance le nombre de pas qu'il aura à faire avec les bottes.

– On aimerait savoir combien de kilomètres il lui reste à faire à pied ("en tout cas moins de 27 km" disent déjà certains enfants).

Les élèves font ensuite individuellement le travail de recherche et après la mise en commun on aboutit à des écritures du type :

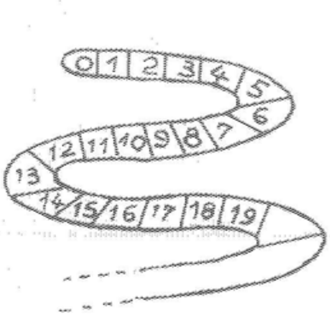
Pour Paris : 565 km.

20 pas et il lui reste 25 km à pied

$565 = (27 \times 20) + 25$

Jeudi 8 Février.

On va jouer à un nouveau jeu : "les pièges à puces" et on prépare le matériel :



* le sautoir (un ruban de cases numérotées de 0 à au moins 80)

* quelques petits morceaux de papier de couleur pour repérer la place des pièges.

* papier de brouillon et crayon pour le cas où les calculs s'avèreraient utiles.

Règle du jeu : (voir IN n° 13).

Les enfants jouent par deux.

Le premier place 3 pièges sur trois cases de numéro supérieur à 50.

Le deuxième "est la puce" qui saute de 5 en 5 cases. Il doit choisir sa case départ (de 0 à 4) et il gagne s'il arrive à éviter tous les pièges en sautant de 5 en 5.

Les enfants jouent plusieurs fois ainsi.

La maîtresse leur propose ensuite de convenir que la puce fait des sauts de 7 cases (la case départ étant choisie de 0 à 6), puis des sauts de 10 cases (départ de 0 à 9), puis des sauts de 3 (départ de 0 à 2). Certains enfants font varier le nombre de pièges.

Pendant toute cette phase la plupart des enfants en restent au stade empirique, même lorsque la puce fait des sauts de 10 cases.

On décide alors, au cours de la mise en commun, de simplifier le jeu en ne mettant qu'un piège (après la case 50).

Les enfants recommencent à jouer avec cette nouvelle règle mais à la fin de cette séance aucune stratégie n'est encore mise au point par la classe.

Commentaires.

* En ce qui concerne la première règle du jeu, le choix de 3 pièges pour des sauts de 5 cases avait été fait pour que la fréquence des "puces piégées" incite les enfant à chercher une stratégie. Cela n'a pas été le cas dans cette première phase. On peut penser qu'il faudrait pour cela laisser jouer les enfants plus longtemps et essentiellement sur des sauts de 10, 5 (voire 2 avec un ou deux pièges).

* On pourrait aussi orienter le travail collectif vers une recherche de la meilleure façon de placer les pièges, et chercher quel est le nombre minimum de pièges à placer pour être sûr "d'attraper la puce".

Lors des séquences décrites ici, les enfants ont simplement remarqué que, en gardant toujours 3 pièges, la puce a plus de chance de gagner lorsqu'elle fait de plus grands sauts.

* Cette situation (en particulier sous la forme de la 2ème règle du jeu, avec un seul piège) cache la recherche du reste d'une division euclidienne (si le piège est placé en case 62 et que la puce fait des sauts de 7, il ne faut pas partir de la case 6 car $(8 \times 7) + 6 = 62$)

Mais elle incite beaucoup plus que les situations de division précédentes (carrelages et Petit Poucet) à une technique soustractive,

par exemple :

$$\begin{array}{r} 62 \\ -\ 7 \\ \hline 55 \\ -\ 14 \\ \hline 41 \\ -\ 28 \\ \hline 13 \\ -\ 7 \\ \hline 6 \end{array}$$

et c'est pour cela qu'elle a été choisie.

En effet, lorsqu'on cherchera à mettre au point un algorithme de la division avec la classe, il faudra que les enfants soient prêts à faire des soustractions successives de multiples de b pour atteindre "le plus grand multiple de b inférieur ou égal à a".

Lundi 12 Mars.

Jeudi 15 Mars.

Lundi 19 Mars.

Notons que, depuis la séance précédente, les enfants ont joué chez eux, avec leurs frères et sœurs en général et que, continuant de jouer à la maison pendant une bonne période, ils sont très motivés pour acquérir une stratégie gagnante.

Ces trois séances sont consacrées à achever la familiarisation de tous les enfants avec le jeu, et à construire avec eux la stratégie des soustractions successives tout en la faisant fonctionner sur des nombres de plus en plus grands : cela les oblige à abandonner la vérification sur le sautoir.

Au début de la séance du lundi 12, on reprend un moment le jeu par deux en faisant des sauts de 5 cases et en plaçant quelques pièges.

Puis on change de règle du jeu : le "chasseur" ne pose qu'un piège ; la "puce" doit trouver "la case-départ dangereuse" et gagne si elle la trouve du premier coup, en ayant le droit d'utiliser un crayon et une feuille de papier.

A ce stade, on vérifie en partant de la case dangereuse si on tombe bien dans le piège.

La maîtresse demande aux enfants de jouer par deux, avec des sauts de 5, 6 et 11 cases et en modifiant plusieurs fois la place des pièges.

Lors de la mise en commun, la maîtresse fait construire à la classe la stratégie des soustractions successives.

On fait ensuite fonctionner collectivement cette technique, ce qui donne par exemple :

$$\begin{array}{rr} 314 & \\ -230 & 10 \\ \hline 84 & \\ -46 & 2 \\ \hline 38 & \\ -23 & 1 \\ \hline 15 & \end{array}$$

$$314 = (23 \times 13) + 15$$

Remarque : Pour en arriver, comme dans l'exemple ci-dessus, à retrancher tout de suite $10 \times 23 = 230$, il a fallu passer par une phase pendant laquelle les enfants n'ont fait que des soustractions de 23 (à la rigueur de 46 ou de 69), au terme de laquelle ils ont finalement pris conscience qu'ils avaient intérêt à essayer de retrancher de "grands multiples de 23" pour arriver le plus vite possible au résultat.

Après avoir traité plusieurs exemples avec toute la classe, la maîtresse demande aux enfants de travailler individuellement ($a = 350$, $b = 6$; $a = 5615$; $b = 5$; etc ...).

Lundi 26 Mars.

Jeudi 29 Mars.

Lundi 2 Avril.

La maîtresse fait travailler les enfants individuellement sur plusieurs exemples. Cette fois-ci, ils choisissent eux-mêmes chaque fois les deux nombres. D'autre part on ne fait plus référence à la puce et au sautoir : bien que le mot "division" ne soit toujours pas introduit les enfants font un travail sur les nombres ("retrancher des multiples de b jusqu'à ce qu'on ne puisse plus et compter combien de fois on a retranché b").

Pour voir comment se réinvestit la technique des soustractions successives dans une situation où aucun enfant ne l'avait employée spontanément, la maîtresse rappelle l'histoire du Petit Poucet. Elle demande aux enfants de choisir eux-mêmes le nombre de km à parcourir et la distance (en km) parcourue en faisant un pas avec les bottes. Une bonne partie de la classe réinvestit la technique soustractive, mais il y a quand même un certain nombre d'enfants qui reprend sa technique initiale.

La mise en commun est consacrée à essayer de convaincre toute la classe :

* que, quelle que soit la technique utilisée, on fait toujours le même travail : la recherche du plus grand multiple de b ne dépassant pas a.

(Pour cela il est important d'insister sur l'écriture du type $a = bq + r$ avec $r < b$ pour chaque exemple numérique).

* que, dans la plupart des cas (et en tout cas dès que les nombres deviennent assez grands), il est plus rapide d'utiliser la méthode des soustractions successives. (Mais il faudra attendre encore quelques séances pour que tous les enfants choisissent d'utiliser cette dernière).

Enfin la maîtresse propose aux enfants de préparer des tables de multiples de b et d'essayer de s'en servir pour arriver le plus vite possible au résultat. Bien entendu cela se fait de façon collective avec parfois des discussions animées sur les choix à faire.

Exemple :

1	37	10	370	100	3700
2	74	20	740	200	7400
3	111	30	1110	300	11100
4	148	40	1480	400	14800
5	185	50	1850	500	18500
6	222	60	2220	600	22200
7	259	70	2590	700	25900
8	296	80	2960	800	29600
9	333	90	3330	900	33300

11523	37
– 11100	300
03423	
– 3330	90
093	
– 74	2
19	392

$14523 = (37 \times 392) + 19$

Remarques :

1 – La réalisation de la première colonne de multiples est l'occasion de discussions sur les différentes méthodes que l'on peut utiliser (ajouter chaque fois 37, faire des multiplications ou même mélanger les deux méthodes).

2 – Assez rapidement, les enfants ne se serviront que des deux premières colonnes, ce qui leur permettra de gagner du temps.

Lundi 23 Avril.

Jeudi 26 Avril.

Le vocabulaire est enfin introduit : *division, quotient* et *reste*. ("Alors on savait déjà faire des divisions ! " dit une petite fille. Elle traduit bien l'espèce de fierté que les enfants ressentent à savoir faire quelque chose dont ils ont souvent entendu dire que c'était très difficile.)

Ces séances sont consacrées à faire fonctionner l'algorithme tel qu'il est présenté page 50 (enne gardant simplement que les neuf premiers multiples du diviseur).

Jeudi 3 Mai.

Lundi 7 Mai.

La maîtresse propose aux enfants une série de travaux sur le calendrier dans lesquels ils réinvestissent assez bien les acquis concernant la division :

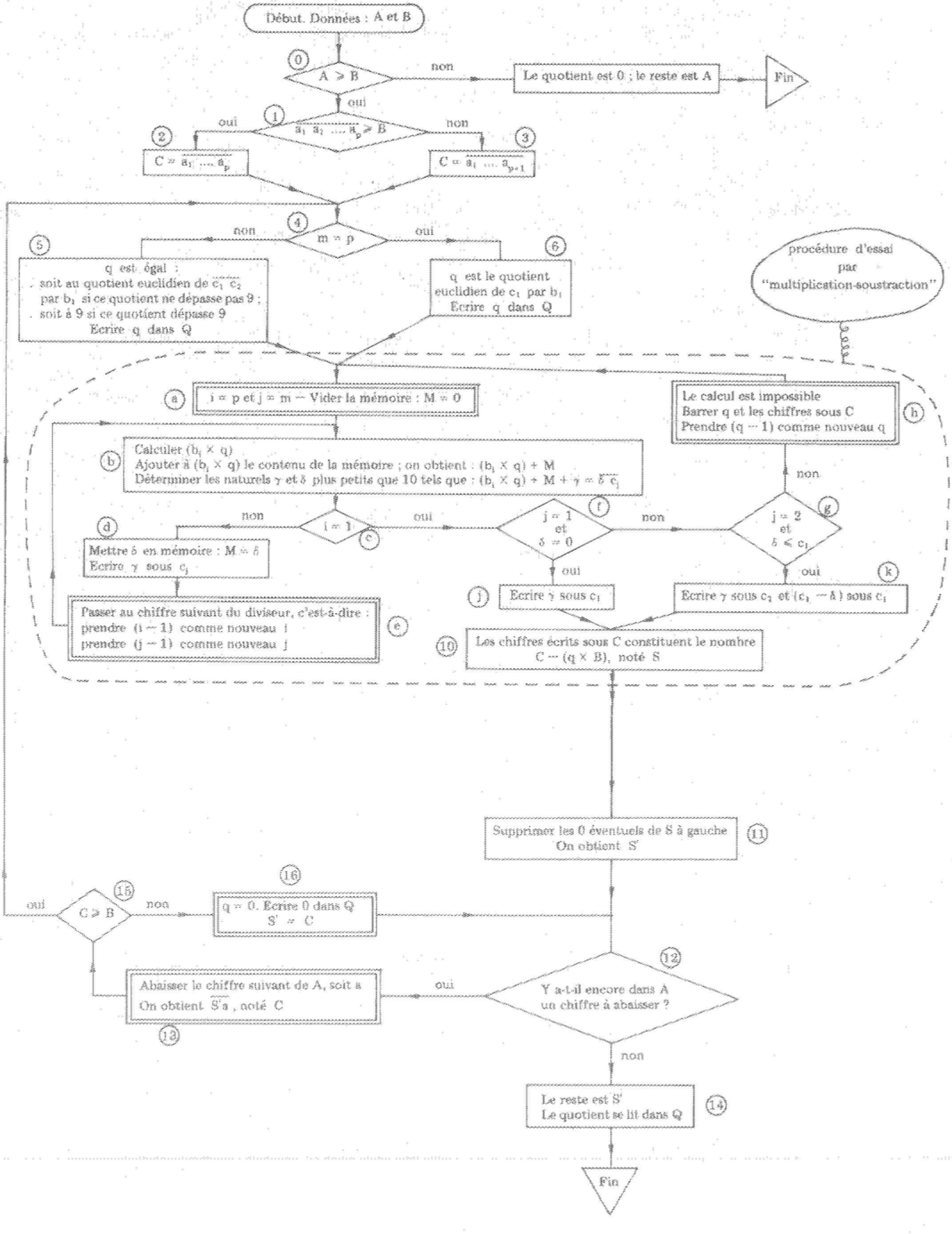
* Cette année Noël était le même jour que le jour de l'An : tous les deux un lundi. Est-ce pareil tous les ans ?

* Quel sera le jour de l'An en 1980 ? en 1981 ? en l'an 2000 ?

* Quel sera le jour de leur prochain anniversaire ?

ANNEXE – *Extrait de la brochure ELEM. MATH. III – APMEP 1977.*

ORDINOGRAMME N° 1 (technique usuelle)



Commentaire *Effrayant !*

11 *variables* : C, m, q, i, j, M, γ, δ, S, S' et a

Et pourtant, c'est une description fidèle de ce qu'on enseigne traditionnellement à l'école élémentaire...