

# UNE ACTIVITE POUR L'INTRODUCTION DE LA GEOMETRIE ANALYTIQUE TRIDIMENSIONNELLE EN 3° A L'AIDE DE L'ORDINATEUR

Iman OSTA  
Equipe de Didactique, Grenoble  
Université Libanaise, Beyrouth

## I- Constat de problèmes dans l'enseignement de la géométrie

### I.1. Introduction de la géométrie analytique

En consultant les manuels scolaires et la pratique de l'enseignement, on peut remarquer que la **notion de système de référence** est introduite, dès la classe de quatrième, comme un fait établi. La notion de *repère*, les éléments caractéristiques du repère utilisé (qu'il soit unidimensionnel, bidimensionnel ou tridimensionnel) sont présentés comme des réalités ayant toujours existé. Ils ne sont pas envisagés comme solution nécessaire à des problèmes spécifiques de représentation, de mémorisation, de communication ou de traitement d'informations géométriques, nécessitant l'organisation de l'espace physique (Bessot & al. 1988).

D'autre part, dès que cette notion est introduite, les élèves entrent de manière subite dans le cadre de *la géométrie analytique*. Un nouveau langage, un nouveau système de représentations symboliques sont utilisés, imposés par l'enseignement sans être construits en interaction avec les connaissances géométriques des élèves. Les points sont remplacés par des nombres, les courbes par des équations. Des relations algébriques sont définies et utilisées sur les caractéristiques numériques des éléments d'une configuration, pour remplacer des relations géométriques supposées entre ces éléments. En parallèle avec cette modification de la nature de l'activité "géométrique", les figures et représentations graphiques disparaissent, ou presque.

Ainsi l'enseignement, dès la classe de quatrième, "réduit" la géométrie à l'algèbre, en négligeant l'interaction qui doit exister entre la construction de la connaissance géométrique et celle des "systèmes de signifiants auxquels elle est indissociablement liée" (Vergnaud 1981). Il y a alors un risque de rupture brutale du lien de sens dans un tel passage du géométrique à l'algébrique. L'activité géométrique peut se transformer en une activité calculatoire, au sein de laquelle l'interprétation au niveau du géométrique est négligée. Le statut marginal des figures est l'un des aspects de cette rupture.

## I.2. Cas de la géométrie tridimensionnelle

Dans le cas de la *géométrie tridimensionnelle*, une sublimation rapide et brutale semble être effectuée entre des activités concrètes de manipulation et d'observation, et des activités mettant en œuvre des abstractions, des théorisations et des concepts. Dans la pratique de l'enseignement, il est difficile de créer des liens entre deux aspects de ces activités : l'intuition géométrique et l'algébrisation. Il y a rupture avec toute observation ou manipulation antérieure, dans un processus dévalorisant ce qu'il est convenu d'appeler "intuition géométrique", aux dépens d'une algébrisation poussée au point d'ignorer tout lien de sens avec les figures géométriques ou leurs représentations.

Même quand elles ont lieu, les activités de manipulation ou de représentation semblent avoir pour but principal l'introduction de quelques objets géométriques, mais elles ne visent pas à faire acquérir ou construire, par les élèves, des connaissances spatiales. Dans les phases suivantes de l'enseignement (cycle secondaire), ces activités ne sont pas exploitées d'une manière fonctionnelle comme fondement de connaissances géométriques, ne serait-ce que pour favoriser leur dépassement comme processus nécessaire à des abstractions ultérieures.

## I.3. Représentations graphiques de situations spatiales

Une raison primordiale à cette rupture entre les deux types d'activités est la difficulté d'accès aux situations spatiales. Cet accès se fait essentiellement à travers les *représentations graphiques*. Certaines caractéristiques de la configuration représentée sont alors absentes ou modifiées (par ex., un angle droit peut être représenté par un angle non droit); l'explicitation d'un code de lecture et d'écriture est exigée. Bien qu'il soit nécessaire, ce code ne peut être suffisant pour surmonter les difficultés de coordination de points de vue ou de construction de rapports entre espace graphique et espace physique. L'interprétation de ces représentations exige, de la part de l'élève, une *activité perceptive* (au sens de Piaget 1961) permettant une appréhension des configurations représentées.

Dans les manuels scolaires et dans la pratique de l'enseignement, la géométrie dans l'espace se distingue par un ensemble de figures stéréotypées, présentant le moins possible d'ambiguïtés. De telles représentations sont ainsi considérées (ce qui n'est pas toujours vrai) comme étant perçues et interprétées de la même manière par le maître et par les élèves, et c'est ce qui justifie leur utilisation dans l'enseignement. Ainsi, le rôle de l'activité perceptive est volontairement minimisé. Il se réduit, dans ce cas, à la perception intuitive qui, à partir d'une représentation graphique, évoque une configuration spatiale, moyennant des stéréotypes scolaires et culturels.

Les nouveaux programmes scolaires (arrêté du 9 juillet 86) accordent plus d'importance aux représentations graphiques : "Les représentations graphiques doivent tenir une place très importante dans l'ensemble des parties du programme. Outre leur intérêt propre, elles permettent de donner un contenu intuitif et concret aux objets mathématiques étudiés; leur mise en œuvre (...) met l'accent sur des réalisations combinant une compétence manuelle et une réflexion théorique".

On voit là une tendance à une réconciliation des deux pôles de la géométrie enseignée, par le biais des représentations comme intermédiaire entre le concret et sa théorisation. La question reste néanmoins posée sur les moyens à mettre en œuvre pour exploiter une telle place attribuée aux représentations graphiques : comment les utiliser de manière fonctionnelle dans la transmission des connaissances géométriques ? peuvent-elles procurer un intermédiaire symbolique pour restaurer le lien de sens rompu entre le spatial et le théorique, dans l'enseignement de quelques notions géométriques (notamment dans la genèse et l'évolution de la notion de système de référence) ? comment surmonter les difficultés pratiques qui rendent difficiles et coûteuses des activités graphiques en classe ?

## II. Une approche des problèmes

Dans nos travaux (Osta 1988), nous essayons de proposer une approche des problèmes soulevés ci-dessus. Explicitons les caractéristiques d'une telle approche :

### II.1. Utilisation de l'ordinateur

Par l'utilisation de l'ordinateur, cette recherche ne vise pas l'enseignement de l'informatique. Elle se situe dans le cadre des tentatives d'ingénierie didactique "à composante informatique" (Chevallard 1985). Quoique les études sur l'enseignement de la programmation ou la formation à l'utilisation de systèmes informatiques se soient rapidement développées, moins nombreuses sont celles concernant l'informatique comme outil d'aide à l'enseignement des mathématiques.

Nous supposons que *l'utilisation de l'informatique comme outil d'aide à l'enseignement* peut changer la nature des activités géométriques scolaires, d'un côté par les possibilités de traitement qu'elle permet et, de l'autre, par les contraintes qu'elle impose. Les possibilités les plus directement liées à nos objectifs sont celles de la visualisation et de la simulation de situations spatiales réelles, statiques ou dynamiques. Les contraintes les plus fonctionnelles que nous exploitons sont celles correspondant aux propriétés topologiques du logiciel utilisé (décrites au §V.1).

Nous nous proposons d'étudier les spécificités d'une telle approche, dans le contexte de l'enseignement de la **notion de système de référence tridimensionnel**. Des questions se posent alors : l'outil informatique peut-il aider à surmonter les problèmes posés par la représentation plane d'objets spatiaux ? Peut-il contribuer à l'évolution de l'"activité perceptive", lors de la lecture, de la production ou de la validation de dessins dans un problème de géométrie de l'espace ?

### II.2. Statut des représentations graphiques

Nous attribuons un statut particulier aux représentations graphiques : nous nous basons sur l'hypothèse d'une interaction entre la maîtrise des représentations planes de certains objets et les connaissances géométriques relatives à ces objets.

Dans ces travaux, les problèmes posés concernent des représentations en *perspective cavalière*. Nous ne visons pas l'enseignement des règles élémentaires de construction de ces représentations; en effet, ce problème est résolu par les données initiales du problème (représentation de l'objet unité) et par les possibilités offertes par l'informatique (duplication, translation de dessins, etc...). Mais nous les utilisons comme moyen pour l'acquisition de notions géométriques.

Au début de l'activité, les connaissances requises en matière de représentation en perspective se réduisent donc à un strict minimum que nous supposons disponible chez les élèves concernés, d'après les thèses de la psychologie génétique (élèves de 14-16 ans), et même d'après les acquis culturels et scolaires dans ce domaine.

### **II.3. La perception : moyen de contrôle et obstacle**

Une des orientations principales de cette recherche est de redéfinir le statut et le rôle de la perception dans l'apprentissage de connaissances en géométrie tridimensionnelle. Dans la construction de cette séquence d'enseignement, la perception acquiert deux rôles contradictoires et complémentaires. C'est d'abord un moyen de contrôle intuitif dont disposent les élèves pour l'interprétation et la production des représentations graphiques. C'est ensuite un obstacle qu'ils doivent dépasser, en construisant contre lui d'autres moyens de contrôle basés sur des relations géométriques, relevant du repérage.

Un des moyens est de créer des conflits entre ce qui est "perçu" et ce qui est "conçu" par les élèves, fait qui exige le dépassement de la perception intuitive. Pour favoriser une telle transformation de l'activité perceptive, notre recherche va à l'encontre de ce qui est usuel dans la pratique de l'enseignement et dans les manuels scolaires : elle tente d'introduire des ambiguïtés perceptives, par le choix particulier de la perspective adoptée (voir §IV.1). Le but principal est de favoriser le franchissement du problème de la vision dans l'espace, en déstabilisant la confiance en la perception, ce qui favorise un contrôle par des propriétés et relations spatiales.

## **III- Tâche proposée**

Cette activité est la première d'une séquence, visant un processus d'apprentissage de différents types de repérage, à travers plusieurs situations didactiques enchaînées de manière à faire évoluer les connaissances des élèves. Les relations mises en jeu dans les différentes situations évoluent des relations topologiques aux relations euclidiennes, en passant par les relations projectives entre les éléments des configurations spatiales concernées. Les situations sont construites de manière à préserver le lien de sens entre la géométrie et son expression au niveau algébrique, dans le contexte de la géométrie tridimensionnelle.

### **Consigne :**

En se servant du logiciel Mac Paint, et en utilisant la représentation d'un cube, donnée dans l'album, dessiner l'assemblage de cubes accrochables donné.

Les élèves disposent :

- d'une disquette Mac Paint,
- de la représentation d'un cube dans l'album de Mac Paint,
- d'un assemblage de cubes réels accrochables placé sur la table des élèves dans une position fixée.

#### **IV- Choix particuliers de la situation-problème**

En relation avec les objectifs de la situation étudiée, des choix particuliers ont été faits:

##### **IV.1. Type de représentation adopté**

Le choix du type de représentation adopté est lié au double statut que nous avons voulu accorder à la perception. Nous avons recherché un certain équilibre entre :

- d'une part, la possibilité qu'auraient les élèves de trouver un appui figuratif dans la représentation graphique utilisée, mobilisant ce qu'il est convenu d'appeler "intuition géométrique",
- d'autre part le but que nous nous sommes fixé de déstabiliser la confiance en la perception comme moyen de contrôle ou de validation des représentations graphiques.

Ceci suppose que la perception sera, au premier abord, et à défaut d'autres moyens accessibles aux élèves, le moyen de contrôle. D'où le choix d'un type "figuratif" de représentation (selon la classification de Deforge (1981)) : la perspective cylindrique. Cette dernière répond à un besoin qu'a l'observateur "d'une représentation de l'espace constituée par un dessin dans lequel les trois dimensions principales : longueur, largeur et hauteur sont représentées par trois directions distinctes" (Audibert & Keita 1987).

Etant par excellence le moyen de représentation adopté dans les manuels scolaires, la pratique de l'enseignement et les ateliers de formation technique et professionnelle, elle correspond à un modèle culturel fort. Ce fait compense son non-réalisme en tant que cas limite d'une perspective conique, où le point de vue est rejeté à l'infini. Elle nécessite, en plus de l'interprétation perceptive, une connaissance d'un ensemble de codes et de propriétés géométriques. Transformation affine consistant à projeter la scène sur un plan par des projetantes parallèles, elle conserve le parallélisme des droites et les rapports (et par suite l'égalité) des mesures de segments parallèles.

D'autre part, du point de vue de quelques études en psychologie, "Si l'on suit néanmoins le développement de la représentation de l'espace tridimensionnel, on s'aperçoit que les sujets, à partir de 12 ans, entrent dans la perspective cavalière (orthonormée) et ne peuvent concevoir l'espace de l'objet qu'en perspective" (Dolle 1985).

Nous avons adopté un type particulier de perspective cylindrique, ayant les caractéristiques suivantes que nous présentons sur l'exemple du cube ci-contre (fig.1) :

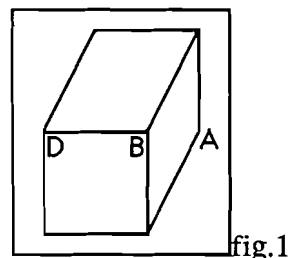


fig.1

- 1) perspective cavalière frontale,
- 2) ambiguë par l'alignement des trois points A, B et D, qui représentent trois sommets dont deux (B et D) sont situés à un niveau de profondeur et de hauteur différent de celui du troisième (A)
- 3) la longueur de la fuyante est plus grande que celle des horizontales et des verticales

La première ambiguïté introduite par cette perspective se situe au niveau de sa particularité (caractéristique 3) par rapport aux modèles culturels de perspectives de cubes que procure l'expérience. En effet, elle correspond à un cas où "l'œil balaie un champ de vision plus large" que dans les conditions usuelles d'observation (Colmez & al. 1987). La droite de projection est "trop" inclinée par rapport au plan de projection. Cette propriété implique une dévaluation (voulue) de la perception intuitive immédiate comme moyen d'interprétation, au profit de la connaissance des codes et des règles géométriques correspondant à la perspective. C'est contre les modèles perceptifs habituels que vont évoluer et s'organiser ces connaissances.

Un autre niveau d'ambiguïté est introduit lorsque la configuration contient plus d'un cube : les constituants des représentations de plusieurs cubes peuvent présenter des coïncidences et des alignements trompeurs. Dans l'exemple de la fig.2, les flèches doubles indiquent des alignements de segments représentant des arêtes situées, en fait, à des niveaux de hauteur et de profondeur différents. La flèche simple indique la coïncidence de points représentant deux sommets situés à des niveaux de hauteur et de profondeur différents.

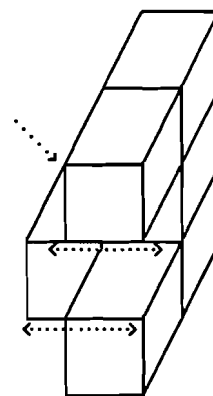


fig.2

#### IV.2. Monde d'objets concernés par l'activité

Les objets utilisés sont des assemblages de cubes réels accrochables à l'aide de tétons et de trous situés au centre des faces, ce qui impose que les faces des cubes adjacents coïncident.

La configuration "cube" est l'unité constitutive de ce monde d'objets. Disposées à l'horizontale, à la verticale et en profondeur, ces unités constituent une première mise en ordre de l'espace vécu; les objets utilisés, qui sont des assemblages de cubes de même taille, relèvent du micro-espace et procurent donc des possibilités de manipulation; déjà utilisés dans d'autres recherches autour du champ conceptuel relatif au repérage (Bessot &

Eberhard 1987; Polo 1987), ces objets renforcent cette structuration en trièdre de l'espace physique par la prise en compte d'alignements remarquables dans 3 directions orthogonales deux à deux. De plus, ces objets permettent de fonder un quadrillage de l'espace et d'accéder à des systèmes de coordonnées entières. Un tel choix mène à la banalisation de l'aspect métrique : les problèmes de mesure sont réduits, par la nature même des objets considérés, à des problèmes de dénombrement.

Au niveau des types de représentation de ces objets, nous avons fait des choix successifs. Ces choix correspondent à des valeurs de variables que nous estimons pertinentes, dans le sens qu'elles peuvent influencer sur l'évolution des stratégies des élèves (variables didactiques) :

- variable relevant du type de perspective imposé : il s'agit de représentations de cubes peintes ou sans peinture (dans le cas de dessins peints, l'anticipation est beaucoup plus importante avant de gommer, car la réparation des motifs de peinture est beaucoup plus coûteuse),

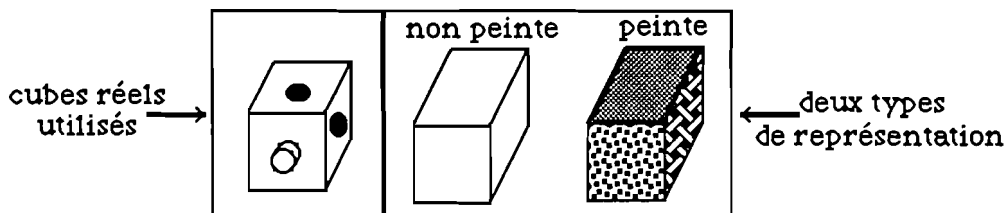


fig.3

- variable relevant de la configuration : en modifiant les caractéristiques topologiques de l'assemblage à représenter. Celles-ci joueront un rôle important dans la modification des stratégies des élèves et dans le passage d'une règle d'action à une autre.

## V- Analyse a priori de la situation

### V.1. Analyse conceptuelle du logiciel Mac Paint

C'est un éditeur graphique fonctionnant sur Macintosh de "Apple" (fig.4), destiné à la réalisation de dessins à l'aide d'outils graphiques simples, dont quelques-uns se rapprochent des outils utilisés en situation de dessin ordinaire (papier-crayon) :

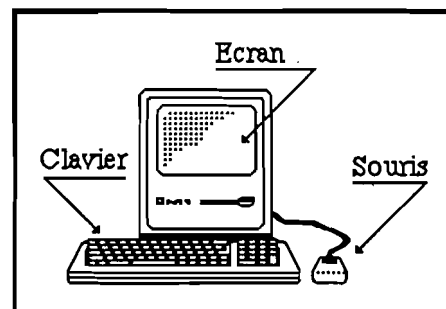


fig.4

 "stylo",  "gomme",  "règle",  "pinceau", etc...

L'élève peut avoir accès, sans distinction aucune, à chacun des points de la page virtuelle de dessin; il peut donc traiter et transformer, séparément, des zones quelconques du dessin. Cette caractéristique peut avoir des répercussions sur les représentations graphiques d'objets spatiaux qui sont traitées comme des dessins plans : les différences de niveaux (surtout en profondeur) ne sont pas gérées par le logiciel. De ce fait, l'élève doit prendre en charge le contrôle des caractéristiques spatiales des objets pour ne pas rompre le lien entre l'espace d'un objet et l'espace graphique de sa représentation (voir fig.6 et explication correspondante). Préserver de tels liens ou les restaurer fera partie de l'activité des élèves, pour répondre aux exigences de la tâche.

Le traitement peut se faire point par point à l'aide d'outils de dessin, ou zone par zone à travers la sélection de portions de la page de dessin, à l'aide de l'un ou l'autre des deux outils de sélection :

 "rectangle pointillé" ou  "lasso".

Signalons que Mac Paint offre la possibilité de déplacer une portion de dessin sélectionnée, d'en créer une copie à l'aide de la commande "copier" ce qui permet de la stocker en mémoire (dans le "presse-papiers"), de manière à ce que l'utilisateur puisse l'appeler dans la page de dessin autant de fois qu'il le veut, en utilisant la commande "coller". Notre tâche est fondée sur cette possibilité.

Dans l'activité présente, c'est surtout le lasso qui sera utilisé, sur la suggestion du maître. Avec cet outil, la sélection s'effectue selon un procédé basé sur des notions topologiques : la sélection d'une zone contenant des lignes fermées affecte automatiquement au dessin tous les pixels situés à l'intérieur de ces lignes; la zone intérieure à toute ligne fermée sera donc atteinte par toute transformation subie par la zone sélectionnée. Une transformation importante nous intéressera particulièrement : le déplacement (en translation) d'une portion sélectionnée de la page de dessin. Cette portion (que nous appellerons "courante") sera automatiquement mise dans un premier plan de traitement, elle survolera la page et les dessins qui y figurent. Les zones situées au voisinage de frontières ouvertes ne seront pas considérées comme faisant partie de la zone sélectionnée (fig.5), elles sont considérées comme transparentes.

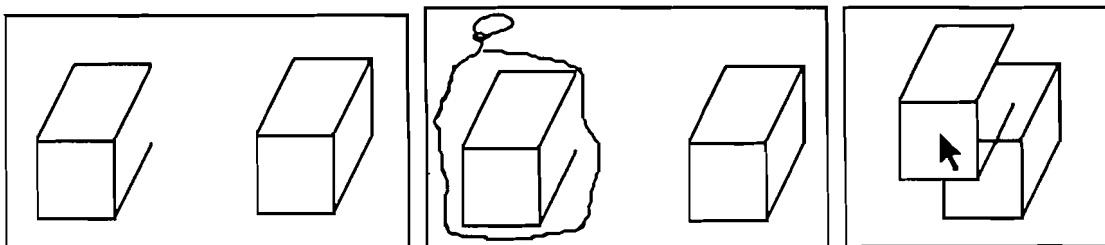


fig.5. (la flèche représente le curseur dont le déplacement fait déplacer le dessin sélectionné)



Les zones comprises à l'intérieur de frontières fermées seront considérées comme opaques et masqueront les parties correspondantes de la page (fig.6). Une telle propriété peut amener à des dessins qui, composés à partir de représentations d'objets selon le code de la perspective, sortent du contexte des représentations planes d'objets à 3 dimensions. C'est, par exemple, le cas du dessin représenté dans le dernier cadre de la fig.6. Il a été obtenu en sélectionnant, déplaçant et positionnant la représentation du cube de gauche.

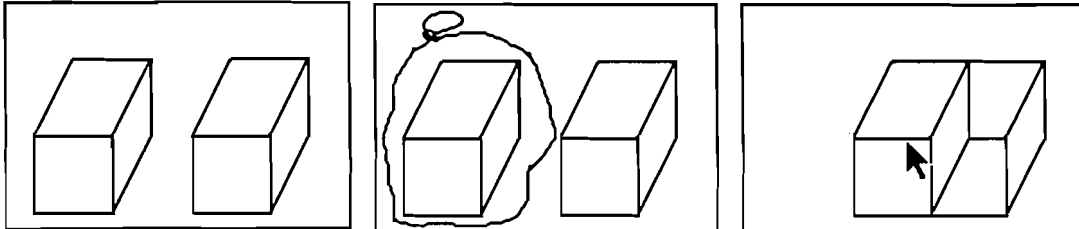


fig.6

## V.2. Analyse de la tâche

Cette situation a deux objectifs :

- la prise de conscience de l'existence d'éléments qui seront cachés par d'autres constituants,
- la construction d'un type de repérage topologique, lié à l'objet.

La réalisation de l'un ou de l'autre de ces objectifs sera favorisée, comme nous l'avons vu, par le choix adéquat des valeurs des variables, ce qui a donné lieu à deux modalités (fig.7) différenciées par la nature du cube représenté (peint ou non) et la composition de l'assemblage à construire (ses caractéristiques topologiques).

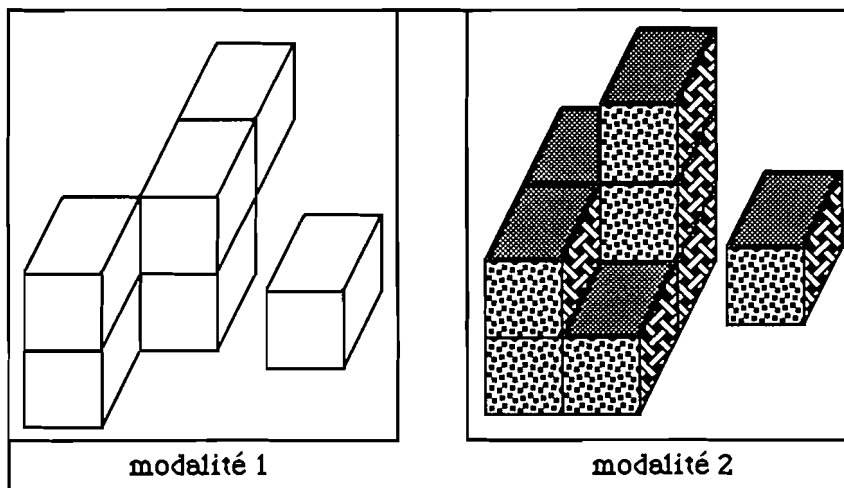


fig.7

La tâche consiste à utiliser le dessin d'un cube, stocké dans l'album, pour représenter l'assemblage de cubes accrochables placé sur la table dans une position fixée. Elle doit être réalisée à travers des actions utilisant plusieurs commandes et types de traitement. L'élève doit successivement :

- appeler l'album,
- dupliquer dans le "presse-papiers" le dessin du cube qu'il contient (à l'aide de la commande "copier"),
- pour chaque cube de l'assemblage : "coller" le dessin de cube ainsi stocké, puis le déplacer pour le positionner par rapport à l'ensemble de la configuration.

Cette tâche met les élèves dans une situation de simulation d'une activité qui leur est familière : construire un assemblage de cubes réels, en juxtaposant plusieurs cubes, tout en contrôlant leurs positions relatives dans la configuration, les alignements des arêtes et la coïncidence des faces. Cette familiarité est soutenue par :

- le type d'interaction Macintosh (souris: prolongement de la main (fig.4), commandes structurées en menus dans un langage proche de la langue naturelle),
- la donnée initiale du problème : le dessin d'un cube dans l'album est identifié par les élèves à la donnée d'un nombre indéterminé de cubes concrets identiques, du fait qu'ils peuvent, à tout moment, appeler "ce cube" dans leur page de dessin,
- les actions disponibles dans Mac Paint, liées à la réalisation de la tâche :
- possibilité de sélection d'un dessin (ici, la représentation ou une portion de la représentation d'un cube) que l'élève identifie à l'action de "prendre" le cube;
- possibilité de translater ces représentations, que l'élève identifie à l'action de "déplacer" le cube.

Dans le cadre de cette identification à une tâche familière, deux moyens de contrôle sont possibles : le contrôle perceptif et le contrôle par les alignements d'arêtes et les juxtapositions de faces. Des relations topologiques doivent être respectées : relations de voisinage et d'ordre spatial (devant, derrière, dessus, dessous, à gauche, à droite).

Selon la position relative du cube courant par rapport à la configuration, et précisément lorsque ce cube doit être placé derrière, dessous ou à gauche d'un cube déjà en place, l'application de l'action naturelle peut se heurter à un obstacle, relevant de la caractéristique déjà évoquée du logiciel utilisé : un dessin sélectionné dans Mac Paint est automatiquement mis dans un premier plan de traitement; alors, translaté ou sur place, il masque les autres éléments du dessin qui occupent la même surface (fig.8); d'où une prise de conscience de la nécessité d'effacer des traits de la représentation du cube courant, pour pouvoir l'intégrer dans la représentation globale.

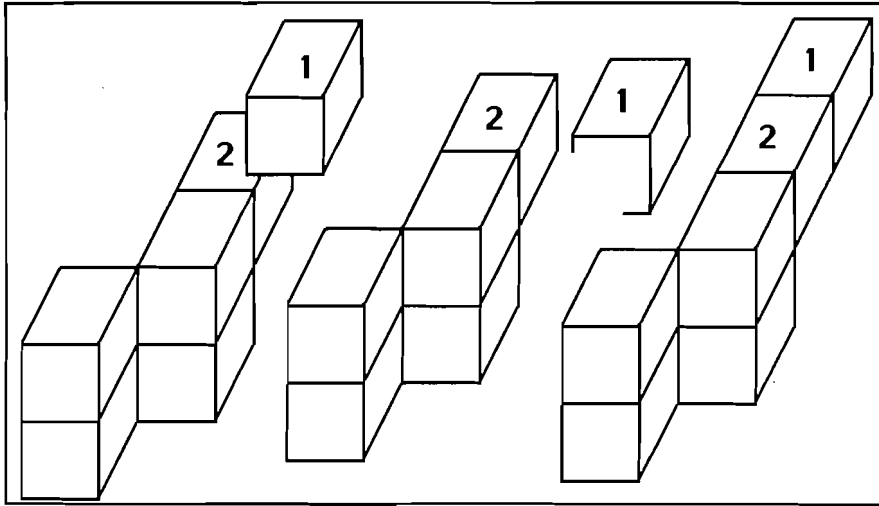


fig.8

Ce problème ne se pose pas lorsque le cube courant est à placer devant, dessus ou à droite d'un cube déjà en place. Ceci est dû aux caractéristiques de la perspective cavalière "face, dessus, droite".

Dans cette phase de l'activité, l'anticipation de l'ordre des cubes à positionner est nécessaire; en effet, l'effacement ne peut se faire que sur le dessin du cube courant, éloigné du dessin global; une estimation de la partie du dessin à effacer doit être faite pour pouvoir raccorder, à la suite, les alignements; dans le cas d'erreur dans l'estimation, on court le risque d'abîmer la représentation globale, en essayant de corriger.

Dans une deuxième étape de l'activité, un tel travail d'effacement est rendu encore plus difficile et coûteux : en effet, les assemblages sont composés à partir du dessin peint d'un cube et la reproduction des motifs de "peinture" après effacement est une opération risquée. Une autre stratégie doit alors être recherchée. D'autre part, la composition des assemblages est telle qu'ils admettent un "cube-origine", à partir duquel les cubes de l'assemblage peuvent être positionnés de manière à préserver les trois ordres dans les trois directions principales de l'espace. Les choix ainsi opérés incitent à la recherche d'une autre stratégie et favorisent l'apparition d'une règle d'économie liée aux règles de fonctionnement du logiciel.

La règle d'action solution à ce problème consiste à : opérer toujours de la gauche vers la droite, de bas en haut, et de derrière vers l'avant. L'application de cette règle nécessite une anticipation sur l'ordre de composition des cubes. Cette anticipation doit être basée sur une analyse, par les élèves, de la composition topologique de l'assemblage.

Un type de repérage topologique lié à l'objet est sous-jacent à cette règle, basée sur une structuration particulière de l'espace : on fait référence à trois directions privilégiées qui sont déterminées par les directions de composition de l'objet, à savoir : celles des trois axes d'un trièdre trirectangle; la configuration "cube" est l'unité, la mesure est réduite au dénombrement de cubes ; le long de chacune des directions principales, l'ajout de cubes doit se faire dans un sens d'orientation précis, dans l'objectif d'épargner l'effacement : de bas en haut le long de la verticale, de gauche à droite le long de l'horizontale frontale, et vers l'observateur le long de l'horizontale normale .

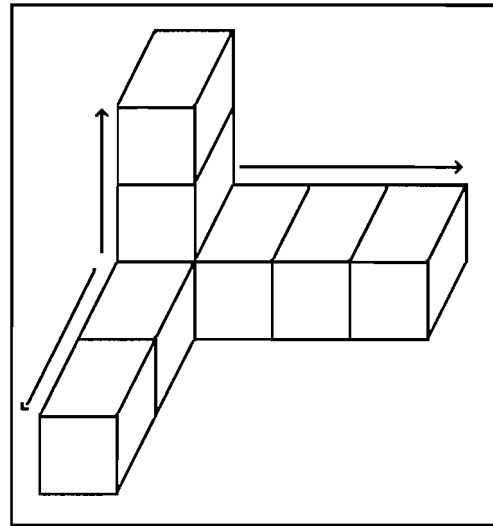


fig.9

Pour une catégorie de configurations convenablement choisies, on peut privilégier un cube de départ, par lequel peut commencer l'action de composition de l'assemblage (le cube extrême de derrière, en bas et à gauche) et par rapport auquel se fera le repérage des autres cubes selon les trois directions; il jouera le rôle de "cube-origine".

## VI- Expérimentation

### VI.1. Dispositif expérimental

L'activité a été expérimentée trois fois, dans le cadre d'une structure d'atelier informatique, dans un collège de la région de Grenoble. Chaque expérimentation a eu lieu en deux séances de deux heures chacune. Une des expérimentations a été réalisée avec des élèves de CPPN, les deux autres avec des élèves de 3°. Chaque expérimentation s'est déroulée avec huit élèves travaillant par binômes, chaque binôme disposant d'un ordinateur.

Les moyens de recueil des informations sont les suivantes :

- les notes des observateurs (un observateur par binôme),
- les enregistrements magnétophoniques,
- la suite des fichiers informatiques enregistrés, contenant les dessins produits par les élèves à des moments réguliers et rapprochés.

Enfin, il est important de préciser que la situation a été préparée en interaction avec l'enseignant. Des phases collectives ont été prévues au sein ou à la fin des différentes situations, en vue d'un bilan des stratégies mises en œuvre par les élèves, et d'une institutionnalisation de certaines connaissances.

## VI.2. Déroulement

Rappelons que nous avons le double objectif suivant :

- prise de conscience de la nécessité de l'effacement et sa mise en œuvre,
- construction de la structuration topologique décrite ci-dessus.

L'activité s'est déroulée en deux phases :

### a) Première phase

Dans cette phase, nous avons voulu réaliser le premier objectif. Le cube représenté dans l'album est un cube non peint (ce qui facilite l'effacement). Deux assemblages ont été successivement proposés à chacun des binômes, ce qui a donné lieu à deux étapes .

- **Première étape** : l'assemblage est composé de manière à ce qu'il soit possible de le construire sans aucun effacement (il admet un cube origine). Notre but était de tester laquelle des deux stratégies les élèves utiliseraient.

- **Deuxième étape** : l'assemblage est composé de manière à ce qu'il ne puisse être représenté sans effacement (il comporte des barres formées de plusieurs cubes, orientées vers le sens négatif le long de la normale). La connexité du cube courant avec un cube déjà construit étant une condition essentielle pour pouvoir le positionner, de telles barres ne peuvent être construites dans le "bon" sens (de l'arrière vers l'avant).

Ce dernier type d'assemblages nécessite l'effacement de portions d'un cube, pour pouvoir le positionner par rapport aux autres déjà placés. Ceci permet une prise de conscience de la nécessité d'effacement, et une activité intellectuelle doit être menée pour décider des portions du dessin à effacer.

### b) Deuxième phase

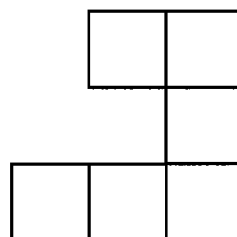
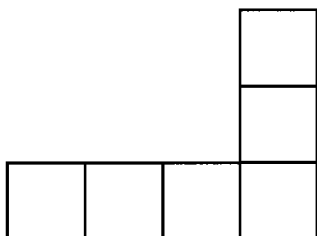
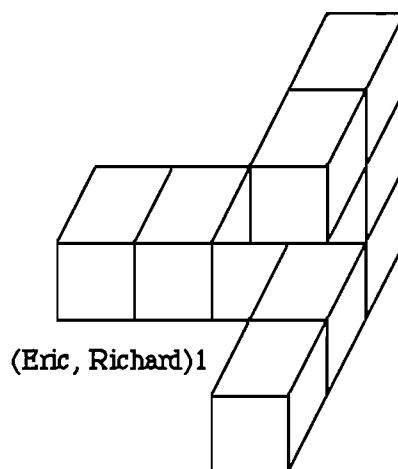
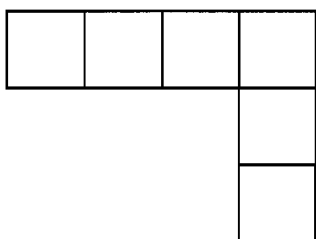
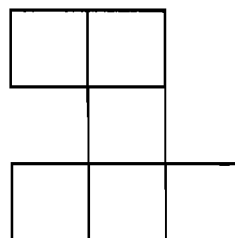
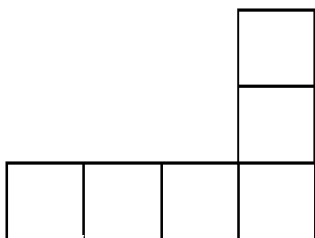
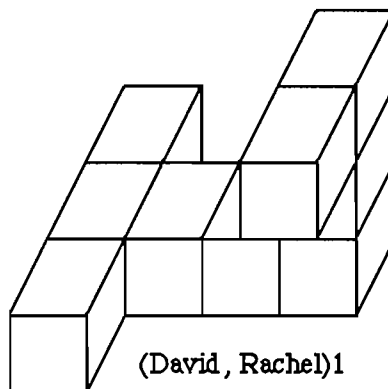
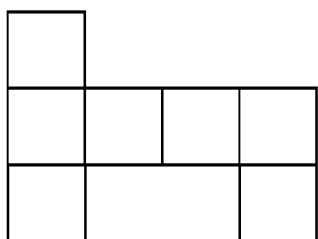
Cette prise de conscience étant acquise, nous avons rendu la solution de l'effacement trop coûteuse, voire impossible à réaliser dans certains cas, par le fait que les dessins sont peints; ceci, en vue de la réalisation du deuxième objectif de la situation.

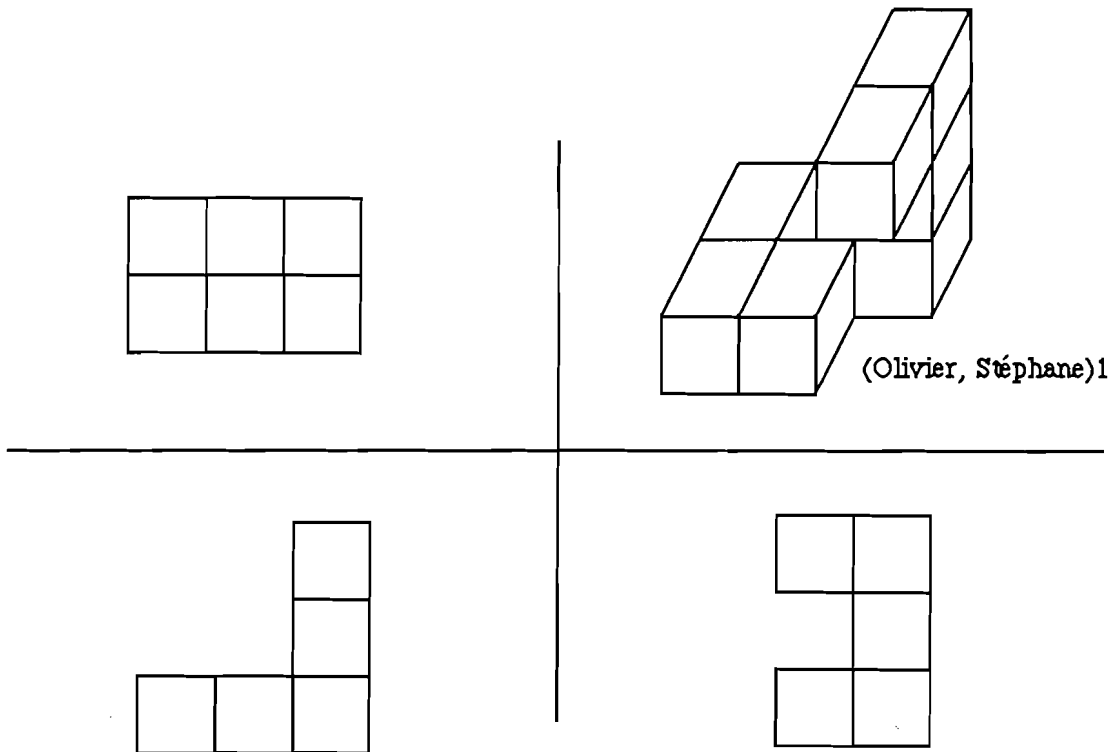
## VII- Analyse sommaire des productions des élèves

Dans ce qui suit, nous analysons les productions de trois binômes dont l'activité est représentative de l'ensemble des élèves-sujets. L'analyse des données recueillies a été faite de manière clinique, en vue de dégager les relations existant entre les conceptions des élèves et la situation. Ces analyses portent sur l'interaction entre les élèves et le problème, l'interaction entre les élèves et l'ordinateur, et les interactions des élèves entre eux (le travail par binômes favorise les conflits socio-cognitifs et les besoins d'argumentation).

### VII.1. Quelles stratégies au cours de la première étape de la première phase ?

Nous présentons ci-dessous les assemblages qui ont été proposés aux élèves au cours de cette étape :





A la fin de cette étape de l'activité, les trois binômes considérés ont mené à terme la construction des assemblages qui leur ont été proposés, en utilisant l'une ou l'autre des deux stratégies. Les deux binômes (Eric, Richard) et (David, Rachel) ont utilisé, sans l'exprimer, la règle de composition selon les trois ordres dans les trois directions principales. Cette utilisation était complètement implicite chez le premier, elle s'est manifestée chez le deuxième par le changement du statut attribué au premier dessin de cube positionné (voir l'assemblage (David, Rachel)1) : Les deux élèves avaient décidé de "*commencer par celui de devant*", en indiquant le cube situé au-devant de la barre normale de trois cubes. Il est représenté par "cube n°1" (fig.10). Au cours du positionnement du deuxième cube "cube n°2" (qui par conséquent doit être placé "derrière" le premier), ils se sont heurtés à la contrainte topologique du logiciel, à savoir : une zone fermée sélectionnée est considérée comme opaque (voir 2° cadre de la fig.10). Ils ont alors changé le statut du premier cube par rapport à la configuration : il est devenu le cube de "derrière". En effet, cette solution s'est avérée à moindre coût.

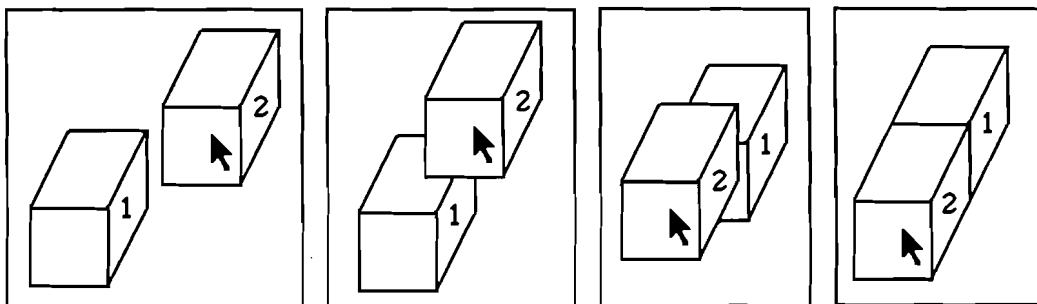
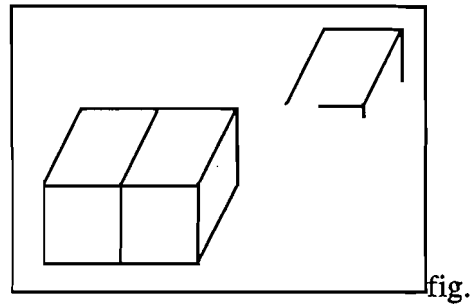


fig.10

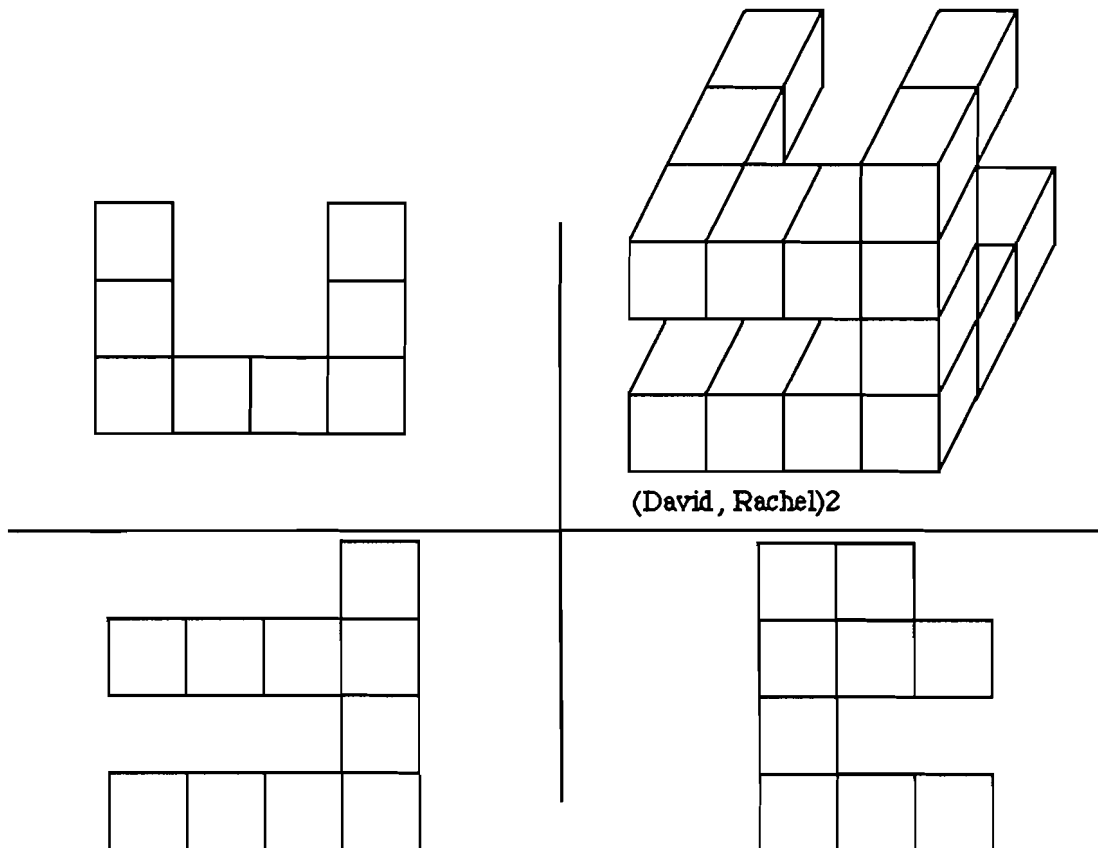
Quant à (Olivier, Stéphane), l'effacement est leur solution pour préserver leur statut de "cubes devant" aux deux représentations de cubes adjacents qu'ils ont commencé par positionner (fig.11). Cette solution a nécessité plusieurs essais pour arriver à une estimation de la partie à effacer pour que la représentation du nouveau cube soit adaptée.



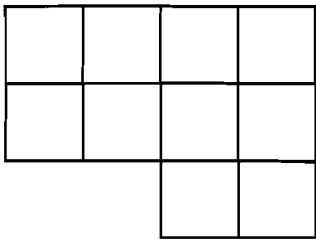
11

## VII.2. Quelles stratégies au cours de la deuxième étape de la première phase ?

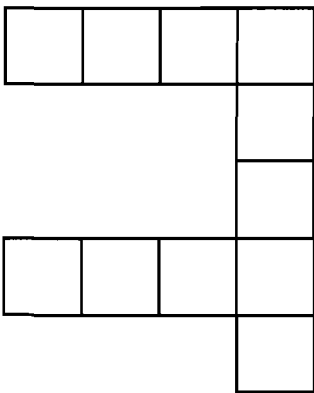
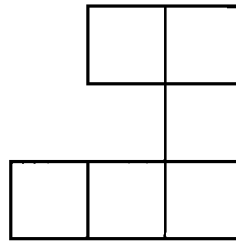
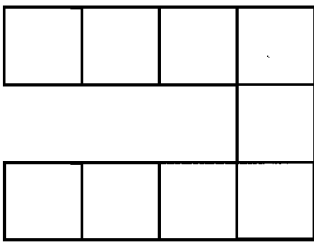
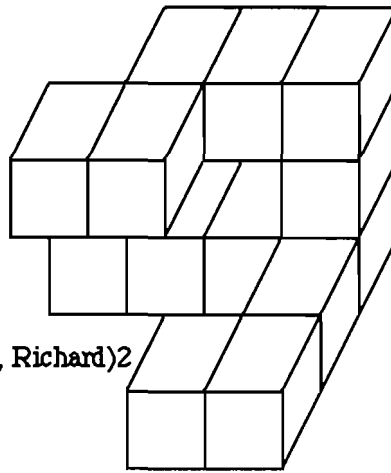
Voici les assemblages qui ont été proposés aux élèves au cours de cette étape :







(Eric, Richard)2



(Olivier, Stéphane)2

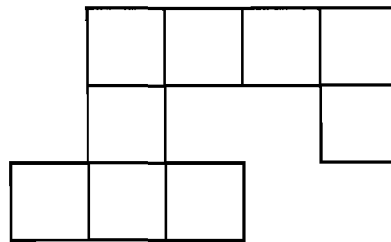
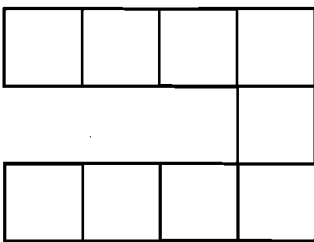
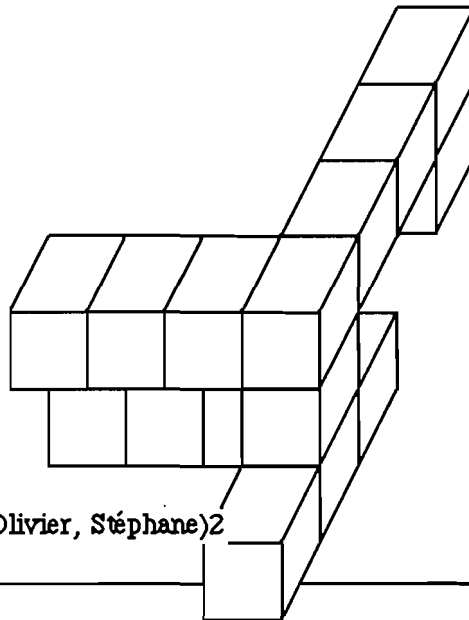
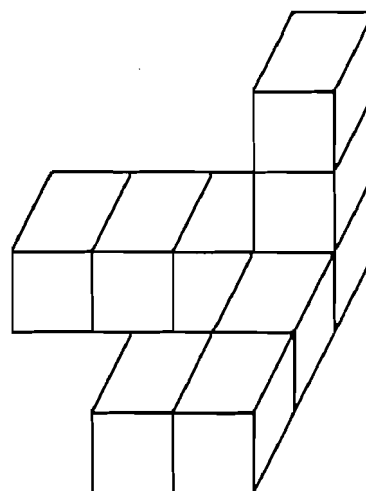


fig.12

C'est l'étape où la stratégie d'effacement est favorisée; elle vise donc surtout la modification du comportement des deux binômes (David, Rachel) et (Eric, Richard). Au cours de cette étape, les deux binômes ont mené une longue analyse de la composition de l'objet et des ordres possibles de réalisation, pour épargner l'effacement. Une telle analyse, menée à deux dans un but déterminé qui était jusque-là implicite, les a amenés à une explicitation et une formulation progressive des trois composantes de la règle d'économie déjà mise en œuvre.



Arrivés à un certain stade de la construction (représenté par la fig.12), les deux élèves se sont heurtés à la contrainte topologique du logiciel (voir l'assemblage qui leur a été proposé : (Eric,Richard)<sup>2</sup>). Ne pouvant pas trouver un ordre de composition adapté, ils pensent à l'effacement :

*E: puisque là, il faut commencer par celui-là, puis celui à côté, puis ...[....]... alors il faut qu'on efface à certains endroits parce qu'il marche dessus... en fait il faut toujours commencer par la gauche, mais là on peut pas*

*R: moi je ferais celui-là puis celui-là avant (les cubes de gauche, en haut, non encore représentés)*

*E: mais comment veux-tu faire celui-là tout seul avant (le cube extrême "gauche, en-haut,devant")? tu ne peux pas savoir, t'as pas de repère*

Dans cet extrait, l'ordre selon l'horizontale est exprimé. Avec l'avancement de la construction, et le souci des deux élèves de minimiser les risques d'effacement, les deux sens d'orientation selon les deux autres directions sont encore exprimés :

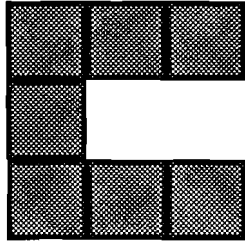
*E: voilà... donc, il faut toujours monter (ordre selon la verticale)... il faut commencer par ceux de derrière (ordre selon la normale), et il faut monter*

*R: oui, mais de toute manière, il faut avoir un repère, il faut caler.... de toute façon quoiqu'on fasse, l'objet est compliqué, ça ira pas pour tous. il faut effacer.*

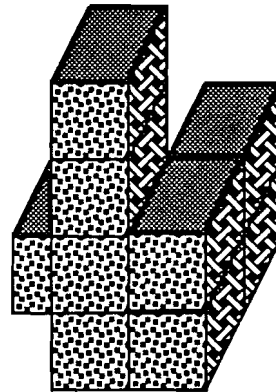
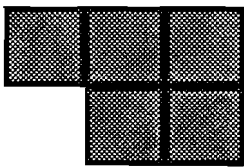
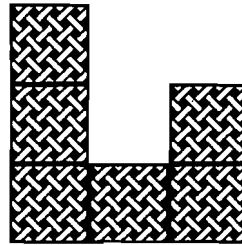
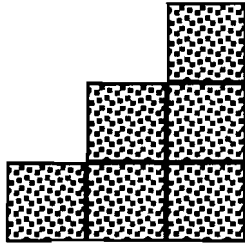
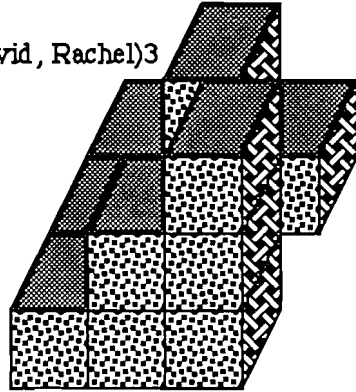
La nécessité de l'effacement est bien liée, chez les élèves, à la composition particulière de l'assemblage, où la construction par connexités successives nécessite la rupture de l'ordre adéquat dans l'opération de construction. Des formulations analogues sont retrouvées chez (David, Rachel).

### VII.3. Quelles stratégies au cours de la deuxième phase ?

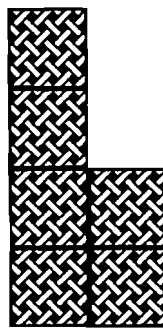
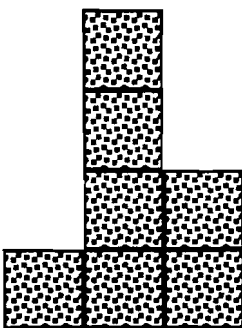
Voici les assemblages qui ont été proposés aux élèves au cours de cette phase :

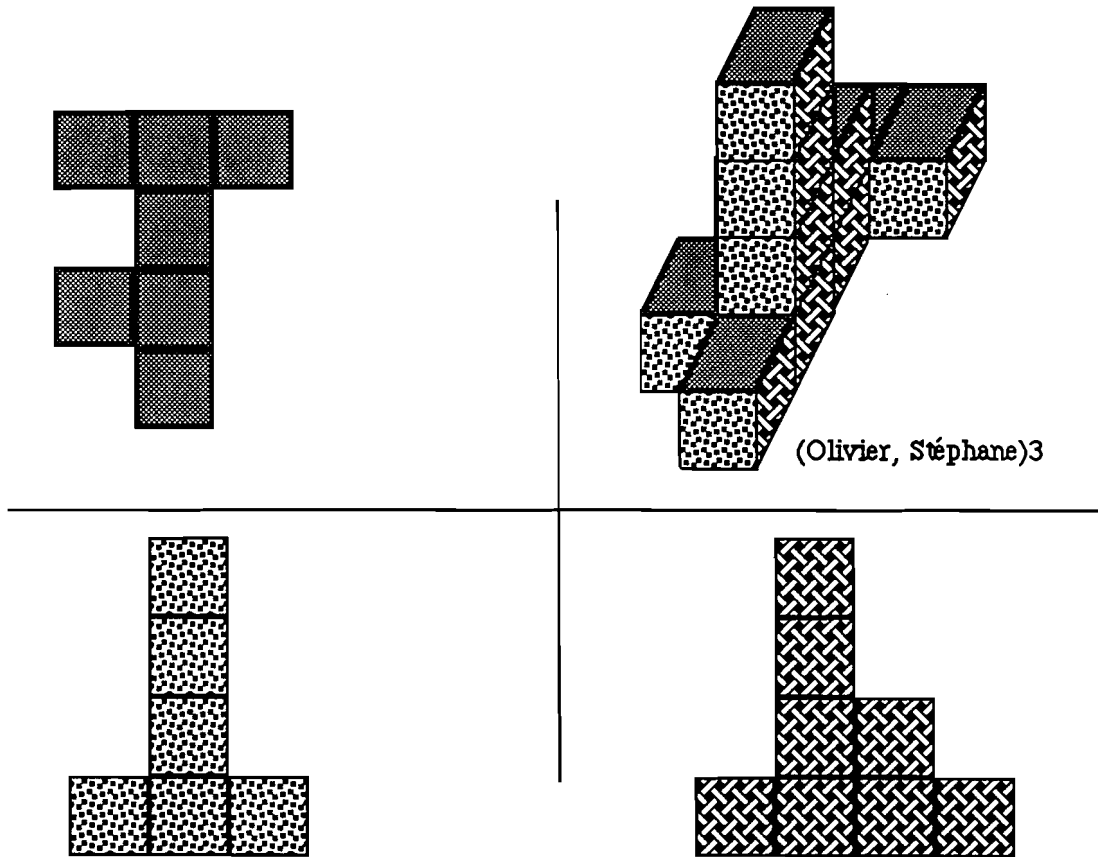


(David, Rachel)3



(Eric, Richard)3





Au cours de cette phase, nous avons noté chez des élèves des retours sur des constructions partielles, et même des reprises à zéro de la construction afin d'éviter l'effacement. A chaque étape, chez (Eric, Richard) et (David, Rachel), une anticipation sur l'ordre de composition des cubes a précédé toute manipulation "puisque'on a trouvé la technique, c'est bon..."; "on va faire le système, allez.... il faut commencer par... celui-là, car il est derrière tous et à gauche... puis..."

N'ayant pas encore appliqué la règle de l'ordre spatial dans les étapes précédentes, Olivier et Stéphane l'ont appliquée et exprimée au cours de cette phase, comme solution à la difficulté supplémentaire, celle de reconstruire les motifs en vue de la réparation des frontières d'effacement (voir l'assemblage (Olivier, Stéphane)3) :

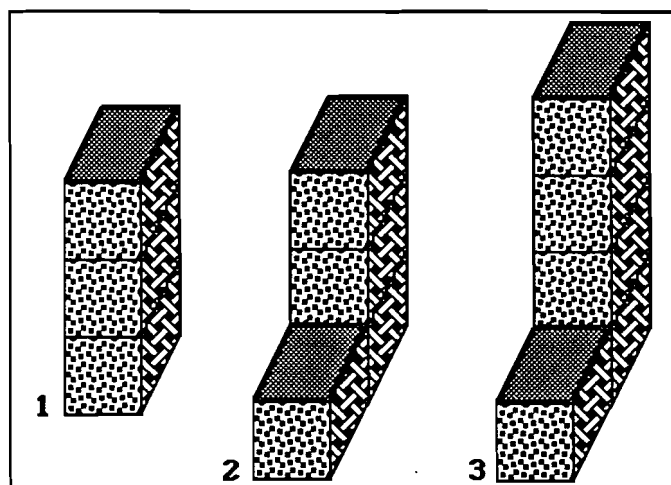


fig.13. construction 1

(Olivier, Stéphane), après la construction 1 :

*O: problème.... maintenant qu'est-ce qu'on fait ?*

*S: tu sais ? il faut peut-être commencer par ceux de gauche, ça ira mieux.... même s'il faudra peut-être éliminer celui-là (il veut dire : le dessin déjà fait en construction 1)*

*O: il faudra qu'on fasse... oh là là ! c'est compliqué... ah il faut commencer par derrière, tu crois pas ?*

*S: comment ça ? il faut refaire, hein ? le problème, si je mets ça, ça passe par-dessus; il faut gommer... il faut gommer les dessins, mais après on peut pas les refaire, les dessins (il veut dire : les motifs)*

*O: je pense qu'il faut commencer par derrière, parce que si on commence là, après on est coincé*

Le troisième sens d'orientation (de bas en haut) n'est pas exprimé car il est le plus évident, et que, jusque-là, il a été respecté implicitement. Ci-après (fig.13, fig.14, fig.15, fig.16), un suivi des constructions successives réalisées par ce binôme (chaque construction illustre un nouvel ordre de composition, après reprise à zéro ou retour à une étape précédente).

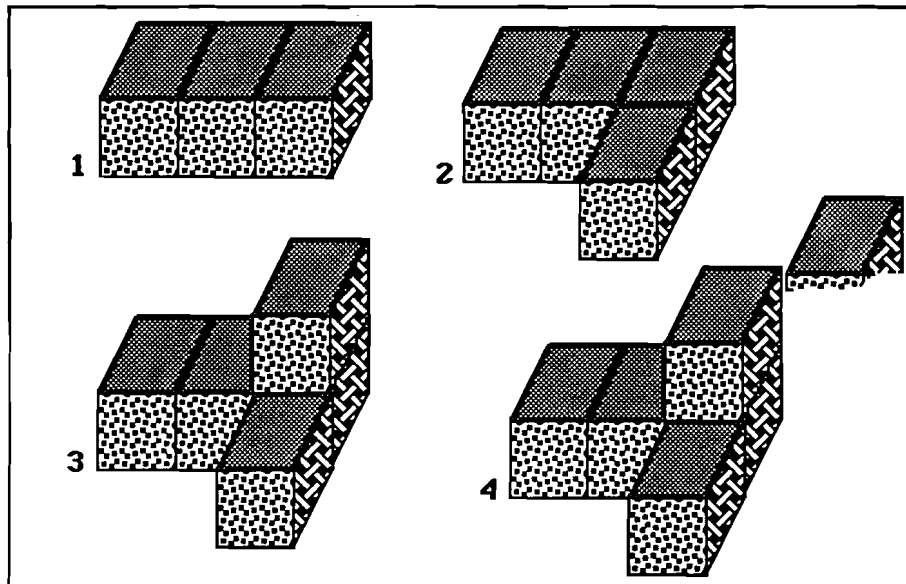


fig.14. construction 2

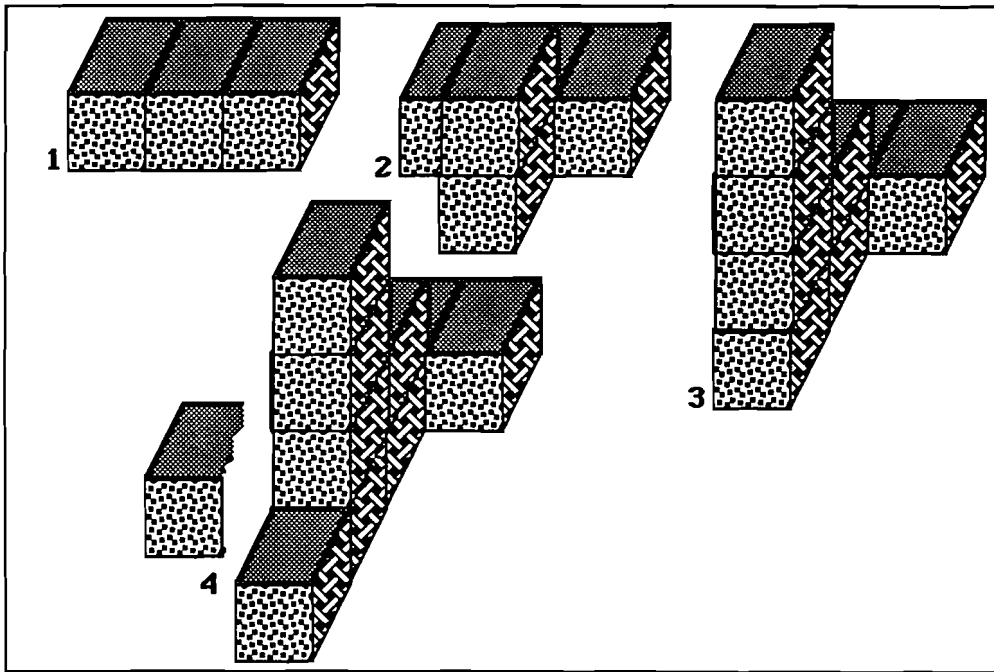


fig.15. construction 3

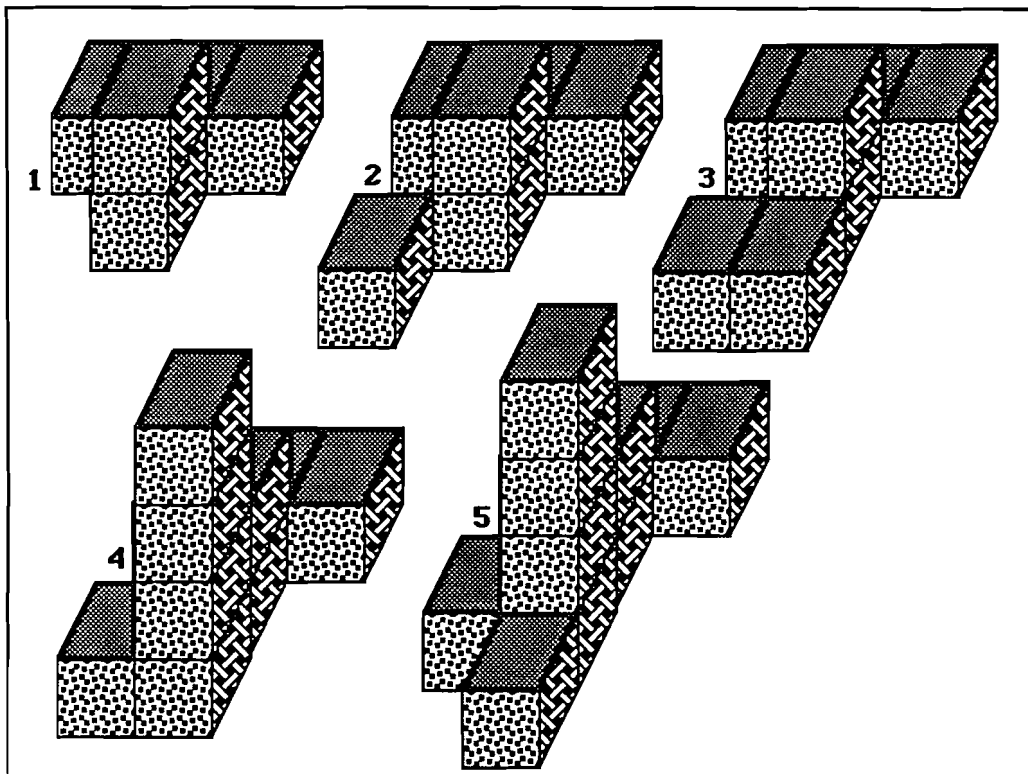


fig.16. Construction 4

#### VII.4. Moyens de contrôle :

Dans leur construction des assemblages, les élèves ont adopté, comme moyen de contrôle principal, les alignements des arêtes, la coïncidence ou la connexité des faces. Ce contrôle s'est souvent fondé sur la perception.

Or, dans certains cas, et à cause de la particularité de la perspective adoptée, des étapes du dessin présentent des ambiguïtés qui rendent difficile sa lecture ou sa validation comme représentant d'une partie de l'assemblage. De telles ambiguïtés ont effectivement incité les élèves à recourir à d'autres moyens de contrôle, basés sur l'ordre spatial : par l'histoire de l'action menée et les positions relatives des représentations des cubes progressivement positionnés. C'est par l'organisation de leur action que les élèves arrivent à surmonter des ambiguïtés perceptives comme celles de la fig.17, représentant des étapes (non finales) de la construction de leurs assemblages :

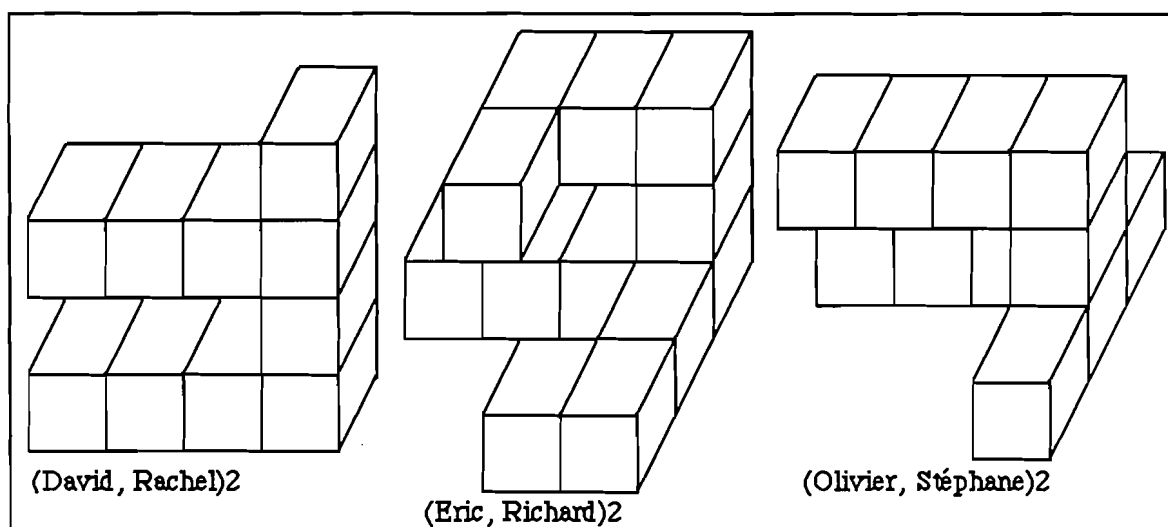


fig.17

(Eric, Richard) :

*E: regarde, il y a une erreur... on dirait qu'elle est derrière l'autre, cette barre (la barre horizontale supérieure)*

*R: oui..... ça fait bizarre.... mais je pense que c'est pas grave... on les a bien mis, les cubes, à leur place*

*E: oui, mais ça fait bizarre quand-même*

Avec les assemblages de cubes peints, la validation du résultat graphique n'est pas moins difficile :

(David, Rachel), fig.18 :

*D: ce qui est bête, c'est qu'on n'arrive pas à distinguer*

*R: ben, écoute, on ne peut pas faire autrement, hein ?*

*D: oui, oui, ça je sais*

*R: on ne peut pas faire autrement, car ils veulent le machin dans cette position, et avec le cube qu'on a dans l'album.... le tout c'est qu'on est sûr de l'ordre de nos cubes et qu'on les a bien placés*

*D: oui, ça doit être ça... oui*

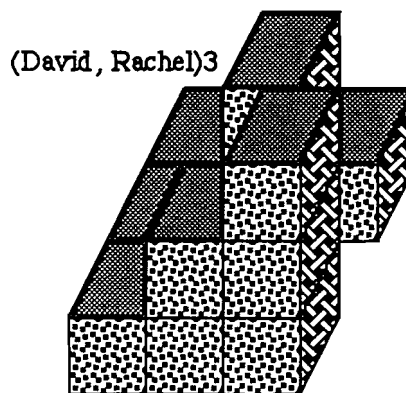


fig.18

Dans cette situation donc, deux moyens de contrôle sont en conflit : la perception (avec ses ambiguïtés) et l'action dans ses étapes progressives et son contrôle avec des relations projectives. C'est l'histoire de cette action et l'organisation a priori de la composition de l'assemblage représenté qui rendent possible une perception autrement impossible, ou au moins difficile, sans mise en œuvre de relations géométriques assez élaborées.

## VIII- Conclusion

Essayons de dégager, à travers les résultats obtenus, quelques aspects de la spécificité d'une telle approche, à l'aide de l'outil informatique, comme outil d'aide à l'enseignement.

La question principale fut d'étudier la possibilité de restaurer, au cours de l'enseignement de la géométrie analytique, le lien de sens entre les configurations spatiales et leur modélisation, à travers les représentations graphiques. Ce lien de sens se manifeste, dans la situation présente, à travers la structuration de l'espace de l'objet, et la construction d'un ordre spatial le long de chacune des directions principales de l'espace. Chaque cube de l'objet est identifié par sa position par rapport au "cube-origine" ou par rapport à un cube précédemment positionné. Cette position est repérée par un nombre ordinal ("*c'est le troisième cube par rapport à celui-là*") et par un sens d'orientation.

A travers le rapport des élèves aux représentations symboliques, nous avons pu noter l'importance des possibilités offertes par l'ordinateur : d'une part la possibilité de manipuler des représentations graphiques (celles d'un cube par exemple) sans avoir à les construire ; d'autre part, la simulation des situations spatiales. Poussée encore plus loin grâce au type d'interaction du matériel informatique utilisé, la simulation a souvent amené à une identification à une activité de manipulation concrète. Cette force de simulation a été, pour nous, une garantie du lien de sens entre les configurations spatiales et leur modélisation.

D'autre part, l'analyse a conforté l'hypothèse d'une interaction entre les connaissances dans les deux cadres : géométrie et informatique. En effet, nous avons noté une concomitance entre deux aspects de l'activité des élèves :



- leur découverte et leur exploitation progressives des propriétés topologiques du logiciel utilisé,
- leurs prises de décision à propos de l'ordre de composition des cubes, dans chacune des directions principales de l'espace.

Ce sont ces propriétés topologiques qui ont induit chez les élèves, par la suite, les stratégies d'organisation de l'espace de l'objet en une structure de trièdre.

Dans notre construction de la situation didactique, nous avons exploité ces propriétés topologiques, en les transformant en contraintes, par un choix judicieux de la tâche et des valeurs de variables, ce qui a favorisé des stratégies particulières, basées sur une structuration particulière de l'espace.

Les résultats précédents concernent le rapport de l'élève à la tâche, à travers l'ordinateur. Ils nous invitent, par ailleurs, à quelques réflexions concernant l'utilisation de l'ordinateur, cette fois du côté de l'enseignement.

L'ordinateur peut jouer un rôle important au niveau de la relation d'enseignement : il permet la construction de situations-problèmes où la validation du travail des élèves est interne à la situation : par la mise en oeuvre des moyens de contrôle (perception, relations géométriques ou numériques, cohérence des composants le long de la construction), les élèves peuvent décider si leur construction d'un composant est correcte ou non.

Cette étude a aussi montré qu'il est possible d'utiliser pour l'enseignement des logiciels non conçus, à l'origine, pour des fins d'enseignement. Cette perspective est ouverte sur un large éventail de possibilités de choix. Elle pose la question du rôle du maître dans une telle orientation, où la situation d'enseignement n'est pas déléguée à un didacticiel, donc au concepteur du logiciel. La recherche a montré l'importance de la construction d'une situation didactique, des choix faits en fonction d'une analyse conceptuelle du logiciel, de manière à favoriser un processus d'apprentissage contrôlé. Ainsi, tout en déléguant à la machine des aspects de la relation didactique, l'enseignant reste le maître de la situation et son ingénieur car, en fait, c'est lui qui décide du degré et de la manière dont ces aspects seront délégués à l'ordinateur.

## Références bibliographiques

- Audibert G., Keita B., 1987, La perspective cavalière et la représentation de l'espace. in *Didactique et Acquisition des Connaissances Scientifiques, Actes du Colloque de Sèvres*, pp. 109-125. Grenoble : La Pensée Sauvage
- Bautier T., Bourdarel J., Colmez F., Parzys B., 1987, Représentation plane de figures de l'espace. in *Didactique et Acquisition des Connaissances Scientifiques, Actes du Colloque de Sèvres*, pp. 127-147. Grenoble : La Pensée Sauvage

- Bessot A., Dolle J.M., Eberhard M., Osta I., Polo M., 1988, *Maîtrise des rapports avec l'espace physique : repérage dans l'espace et projection orthogonale*. Rapport de recherche, compte-rendu d'une recherche financée par le Ministère de la Recherche et de la Technologie
- Bessot A., Eberhard M., 1987, Représentations graphiques et théorisation de l'espace des polycubes. Un processus didactique. in *Didactique et Acquisition des Connaissances Scientifiques, Actes du Colloque de Sèvres*, pp.87-108. Grenoble : La Pensée Sauvage
- Chevallard Y., 1985, *Pour introduire à l'ingénierie didactique à composante informatique*. Rapport sur l'université d'été n°20, Luminy. IREM d'Aix-Marseille
- Deforge Y., 1981, *Le graphisme technique, son histoire et son enseignement*. Paris : PUF
- Dolle J.M., 1985, Analyse de quelques procédures cognitives d'élèves de L.E.P. en situation de lecture-écriture du dessin technique. *Bulletin de psychologie*, tome XXXVIII, n° 369, pp.335-345
- Osta I., 1988, *L'ordinateur comme outil d'aide à l'enseignement. Une séquence didactique pour l'enseignement du repérage de l'espace à l'aide de logiciels graphiques*. Thèse de doctorat de l'Université Joseph Fourier, Grenoble 1
- Piaget J., 1961, *Les mécanismes perceptifs, modèle probabiliste, analyse génétique, relations avec l'intelligence*. Paris : PUF
- Polo M., 1987, *Etude préliminaire à la construction d'une situation didactique : système de référence et géométrie dans l'espace*. Mémoire de DEA, Université de Grenoble 1
- Vergnaud G., 1981, Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol.2, n°2, pp. 215-232