ANALYSE DE DEUX SITUATIONS-PROBLEMES AUTOUR DE LA PROPORTIONNALITE

M.C. Galai, M. Gérente, D. Grenier, R. Rivoire
Groupe didactique au collège, IREM de Grenoble

Introduction

Les deux situations décrites dans cet article ont été élaborées par des enseignants de collège dans le cadre de stages PAF ayant pour but d'introduire quelques concepts de la didactique des mathématiques. Ces situations ont été construites en fonction d'objectifs d'apprentissage qui sont définis collectivement durant la première partie du stage, puis réalisées dans des classes par quelques-uns des enseignants et enfin analysées par eux-mêmes. La deuxième partie du stage a permis de faire un bilan collectif dans lequel nous avons essayé de cerner ce que l'approche didactique avait apporté.

Cette organisation permet, nous semble-t-il, d'utiliser "en vraie grandeur" les outils de la recherche en didactique, par un travail de réflexion sur une notion, à une certaine distance de la pratique quotidienne (observation, analyse de productions), mais relatives à des questions proches de cette pratique (préparation d'activités pour les élèves, expérimentation en classe).

Dans cet article, nous présentons une analyse de ces deux situations et de leur déroulement. Elles abordent la notion de proportionnalité, notion dont l'enseignement se répartit sur tous les niveaux du collège. Plus précisément, la première situation concerne les rapports proportionnalité / volume (situation du Vase), alors que la seconde aborde les relations proportionnalité / vitesse moyenne (situation du Cycliste).

I. La situation du Vase

Le problème a été élaboré pour des élèves de 5ème. Il a été donné à résoudre avant tout enseignement sur la proportionnalité dans cette classe : nous voulions repérer comment les élèves réinvestissaient les connaissances acquises en 6ème. La notion de proportionnalité n'est donc pas évoquée lors de la dévolution du problème.

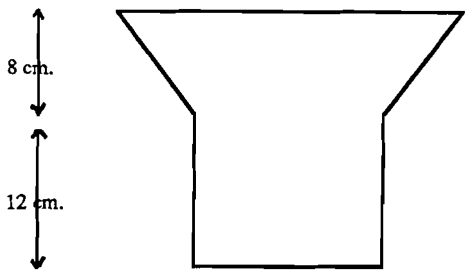
«petit x» n° 22 pp. 5 à 22, 1989-1990

I.1. Le texte du problème

Ce texte a été élaboré à partir d'un problème étudié par Ch. Morin (1987) et tiré d'une recherche de G. Brousseau. La situation est *partiellement* une situation de proportionnalité. Le texte du problème est accompagné d'un tableau et d'un dessin. La présence du dessin a pour objectif d'introduire la situation physique dans le problème. En effet, de nombreuses recherches montrent que la présence d'un tableau induit fortement chez les élèves des procédures de proportionnalité, quelle que soit la situation qu'il décrit. Il s'agissait pour nous de construire une situation où les élèves soient amenés à se poser la question de la validité de leurs réponses par rapport aux nombres du tableau ou/et par rapport à la situation physique. Le rôle du dessin est de favoriser chez les élèves l'émergence d'arguments pour justifier la non-proportionnalité dans la deuxième partie de ce tableau.

Le texte du problème est reproduit ci-dessous.

On verse de l'eau dans ce vase. Pour chaque quantité d'eau versée, on mesure la hauteur de l'eau dans le vase.



Les résultats sont notés dans le tableau suivant

volume d'eau (en cl.)	40	80	120	160	200	240	280	320
hauteur d'eau (en mm.)	27	54	81	108	132	150	160	165

1°) Pouvez-vous trouver la hauteur d'eau pour un volume de 50 cl ? Si oui, donnez la réponse; sinon, expliquez pourquoi.
2°) Même question pour un volume de 148 cl.
3°) Même question pour un volume de 260 cl.
4°) Même question pour un volume de 290 cl.

I.2. Organisation sociale

La classe était organisée en six groupes de 3 à 5 élèves, chaque groupe devant fournir une seule solution concertée (il y avait 25 élèves en tout). La gestion de la séance était assurée par l'enseignant habituel de la classe. Pour des questions matérielles, seuls deux groupes ont été observés (par des enseignants participant au stage).

I.3. Analyse a priori

Cette analyse est le résultat d'un travail en commun des animateurs et des stagiaires. Nos hypothèses sur les procédures des élèves étaient tirées des résultats de la recherche de S.B. Sokona (1989), qui en propose la typologie ci-dessous (nous les citons seulement; des exemples de ces procédures vont être données tout au long de l'article).

- R, règle de trois
- C, produit en croix
- P, rapports proportionnels
- O, calcul d'un opérateur :
    - O1, opérateur fonctionnel
    - O2, opérateur scalaire
- d, décomposition additive
- L, fonction linéaire
- A, fonction affine
- U, recours à l'unité.

Les procédures R, C, O1, L et A sont dites *analytiques* dans le sens où elles font intervenir une relation entre les nombres des deux suites. Les procédures O2 et d sont dites *analogiques* : elles sont basées sur des comparaisons de nombres d'une même suite (comparaison reportée ensuite sur les éléments de l'autre suite). Les procédures U et P peuvent être interprétées dans l'une ou l'autre des catégories, en fonction des démarches des élèves.

Dans un premier temps, on s'attend à ce que les élèves résolvent sans difficulté la question 1 (différentes procédures permettent d'arriver facilement au résultat). Pour la question 2, le nombre choisi se situe encore dans la partie "proportionnelle" du tableau et la procédure choisie pour la question 1 est encore utilisable, mais :

- les procédures de type "décomposition additive" sont peu performantes (obtenir 148 à partir des premiers nombres du tableau nécessite des calculs complexes);
- le résultat n'est pas un nombre entier.

Pour les questions 3 et 4, les calculs sont en théorie impossibles. La plupart des procédures attendues donnent des nombres qui ne sont pas situés dans l'intervalle "probable" (pour la question 4, les nombres sortent du tableau). Nous voulons ainsi provoquer une déstabilisation des procédures employées pour les deux premières questions et un recours à la situation physique.

Remarque

Notre première intention, lors du travail en groupe pendant le stage, était de changer les nombres du tableau proposé par Ch. Morin de manière à rendre inefficaces les procédures de type "décomposition additive". Ceci s'est révélé très difficile à réaliser, en partie à cause de la contrainte que nous nous étions fixée de ne donner que des nombres entiers. Finalement, seul le nombre de la question 2 a été modifié (148 au lieu de 132).

I.4. Analyse des productions des élèves

Nous avons mis en annexe 1 le tableau récapitulatif des procédures des élèves. Ce tableau a été réalisé par les enseignants lors de la phase de bilan du stage.

(a) Les deux premières questions

Nous ne développerons pas l'analyse des réponses à ces deux questions, parce qu'elles semblent n'avoir soulevé aucune difficulté. Les réponses sont justes dans tous les groupes. Les procédures de calcul, très diverses, entrent toutes dans la typologie proposée par S.B. Sokona. En voici des exemples types.

1) **Produits en croix** à partir de la colonne (40 ; 27), ou de la colonne (80 ; 54), ou de la colonne (160 ; 108).

40	50
27	?

40	148
27	?

2) **Décomposition additive**

a) pour 50 cl, à partir de la colonne (40 ; 27)

40 : 4 = 10   40 + 10 = 50

27 : 4 = 6,75   27 + 6,75 = 33,75

b) pour 148 cl, à partir de la colonne (160 ; 108)

148 = 160 - 12

10 cl ---- 6,75 mm

10 : 5 = 2   6,75 : 5 = 1,35

12 cl --- 8,10 mm

108 - 8,10 = 99,9

3) **Recours à l'unité**

a) Hauteur pour 1 cl :   27 : 40 = 0,675

0,675 x 50 = 33,75

0,675 x 148 = 99,9

b) Hauteur pour 10 cl :   27 : 4 = 6,75

6,75 x 5 = 33,75

6,75 x 14,8 = 99,9

4) **Combinaisons de procédures**

Pour 10 cl :   40 : 10 = 4

40 + 10 = 50   début de décomposition additive

27 : 4 = 6,75

Pour 50 cl :   6,75 x 5 = 33,75   recours à l'unité

La "décomposition additive" n'a pas été prise en compte par les élèves qui ont vite réalisé que 50 = 5 x 10 (rapport simple).

Cependant, la réussite à ces deux questions ne prouve pas la compréhension de la proportionnalité. Nous savons, en effet, que la seule présence d'un tableau implique l'utilisation de procédures de proportionnalité, sans vérification de leur adéquation.

(b) Les questions 3 et 4

A l'exception d'un groupe, tous les élèves ont pris conscience d'une difficulté nouvelle, qui ne se posait pas pour les deux premières questions. *Cette prise de conscience se fait , non pas au moment de la résolution, mais lors de l'écriture des résultats des calculs* (ceci est facilement repérable sur les productions des élèves, nous avons la trace de tous leurs essais durant la résolution du problème).

L'analyse des productions de chacun des groupes, donné ci-dessous, montre la diversité des procédures employées (pas toujours compatibles entre elles) et les possibilités des élèves d'aménager une procédure ou d'en changer.

• **Groupe A (3 élèves)**

Les calculs sont effectués avec la même procédure que pour les deux premières questions (produit en croix) :

(260 x 27)/40 = 175,5 mm
(290 x 27)/40 = 195,5 mm

Puis, ils sont barrés et accompagnés d'un commentaire : "le calcul est impossible (on lit aussi "non", "les deux dernières réponses sont impossibles"), car le vase n'a pas une forme régulière".

Les commentaires ne permettent pas de déterminer pourquoi les élèves remettent en question leurs calculs pour 260 cl et 290 cl, mais ils témoignent de la prise en compte de la situation physique, à un moment où on ne peut plus raisonner uniquement sur les nombres du tableau.

• **Groupe B (4 élèves)** (la production B2 est reproduite en annexe 2)

Les élèves donnent quatre productions identiques (ils ont rédigé ensemble). Le groupe n'a utilisé que des procédures analogiques utilisant des additions et des soustractions, *sans aucune multiplication.*

Le calcul de la troisième question est faux, mais il n'est pas remis en cause. On peut faire l'hypothèse que le résultat (157,5 mm) étant un nombre compris entre 150 et 160 est plausible et convient donc aux élèves.

Cependant, pour la question 4, la hauteur trouvée pour 290 cl (165,71 mm) n'est pas remise en cause, alors qu'elle dépasse la hauteur 165 mm correspondant à 320 cl. Les élèves ne vérifient pas la validité de cette réponse. On peut faire l'hypothèse que leur procédure ayant donné des résultats plausibles pour les trois premières questions n'a pu être déstabilisée (elle a pu au contraire être confortée). Le dessin n'a pas été utilisé.

• **Groupe C (4 élèves)**

Une seule production pour le groupe. Seule la question 3 est traitée (hauteur correspondant à 260 cl). On constate que les élèves utilisent dans un premier temps (dans la partie brouillon), la même procédure que pour les deux premières questions (multiplication par le coefficient 0,675), qui donne pour résultat 175,5.

Mais la réponse proposée finalement (155) correspond à la moyenne entre 150 et 160, de même que 260 est la moyenne entre 240 et 280.

240	260	280
150	*155*	160

L'attitude des élèves est donc de changer de procédure au moment où la première procédure ne "fonctionne plus" de manière satisfaisante. Mais ce changement ne provoque pas une remise en cause de la procédure précédente : il s'agit d'une *adaptation locale au problème*. Remarquons que cette procédure donne toujours un nombre "plausible", c'est-à-dire compris entre les deux nombres qui l'entourent dans le tableau.

Comme dans le groupe B, le dessin n'a jamais été pris en compte.

• **Groupe D (5 élèves)**

Les cinq productions sont différentes. Un des élèves (D4) donne deux résultats sans faire aucun commentaire (175,5 mm et 195,75 mm). D5 donne le même résultat pour la question 3 (175,5 mm), pose le calcul pour la question 4 mais n'écrit pas le résultat. Un autre élève (D1) donne pour ces deux questions le même commentaire : "impossible", après avoir posé le produit en croix sans écrire les résultats des calculs.

La feuille de travail de D3 comporte de nombreux essais de calculs pour 260 cl (produits en croix, procédures additives) à partir de différents nombres du tableau, indices pour nous de la perplexité de l'élève devant la résolution des questions 3 et 4. L'élève ne conclut pas et ne fournit aucun résultat.

Le cinquième élève du groupe (D2) est le seul élève de la classe à avoir fourni des arguments solides pour tenter d'expliquer le problème soulevé dans ces deux questions. Nous analyserons plus précisément ses démarches au paragraphe suivant.

• **Groupe E (4 élèves)**

Deux des élèves du groupe (E2 et E4) n'ont pas abordé les questions 3 et 4. Les deux autres élèves ont des résultats analogues pour la question 3, à savoir, un début de calcul de la moyenne des nombres du tableau encadrant la valeur cherchée (nous avons déjà rencontré cette procédure dans le groupe C), suivi d'un commentaire remettant en cause ce calcul :

- l'un d'eux a écrit "impossible", sans donner d'arguments (E3);

- l'autre élève (E1) argumente : "impossible parce que le vase s'agrandi"(*1) ; par la suite, après avoir répondu "impossible de même" à la question 4, il a rajouté pour la question 3 : "A partir de 2OO cl sur 132 mm, le tableau ne sera plus proportionnel, donc on ne pourra pas trouver le résultat parce que le vase s'agrandi".

• Groupe F (5 élèves)

Trois des élèves n'ont pas abordé ces deux dernières questions. Les productions des deux autres élèves (F4 et F5) révèlent des difficultés à résoudre les questions et la volonté commune de trouver à tout prix une réponse "plausible". La démarche de l'un de ces élèves est analysée dans le paragraphe suivant.

(c) Analyse des démarches de deux élèves particuliers

• Des calculs très élaborés

Voici ce qu'un élève du groupe F a écrit pour 260 cl. et 290 cl..

3) on cherche les coefficients :
240 : 150 = 1,60
280 : 160 = 1,75
le milieu de 1,60 et de 1,75 est 1,675
260 : x = 1,675
260 : 1,675 = x
x = 155, 22 388

4) 280 - 240 = 40
160 - 150 = 10
40 : 4 = 10
10 : 4 = 2,5
comme 280 cl +10 cl = 290 cl
160 + 2,5 = 162,5 mm

On constate que les calculs menés sont complexes et assurent que les nombres trouvés sont bien "plausibles", c'est-à-dire :

- pour la question 3, il s'agit de la recherche d'un **coefficient moyen**;
- pour la question 4, il s'agit d'une **interpolation linéaire** entre deux couples de valeurs. Les premiers calculs sont faits dans un intervalle qui n'est pas celui de l'interpolation (entre 240 et 280 pour une interpolation entre 280 et 320). Cette procédure est effectivement correcte dès que l'on a proportionnalité.

(*1) nous avons reproduit les textes originaux des élèves avec les éventuelles fautes d'orthographe.

• Prise en compte de la situation physique

Il s'agit de la démarche d'un élève du groupe D. Appelons-le Jeremy. La feuille remise par l'élève est reproduite en annexe 3.

La production de Jeremy débute par la phrase : "on peut trouver la hauteur d'eau en procédant les calculs croisés". On suppose que c'est la réponse à la question "pouvez vous ...?". Il a effectivement utilisé les produits en croix, mais aussi d'autres procédures.

Pour la question 1, Jeremy fait successivement le calcul par trois procédures différentes :

- produit en croix (C)
- décomposition additive (d)
- recours à l'unité (U).

Les trois calculs aboutissent au même résultat qu'il écrit sans commentaire. Seule la procédure C est réutilisée pour la question 2. Pour les questions 3 et 4, Jeremy utilise une nouvelle procédure : un opérateur scalaire (O2).

Les résultats obtenus pour les quatre questions sont écrits par les élèves dans un tableau, accompagnés d'un commentaire "problème, forme du vase" pour les deux derniers nombres.

On ne peut pas savoir si le "problème" dont parle Jeremy provient d'abord d'un retour au tableau ou d'une observation du dessin du vase. Mais, ce qu'il écrit ensuite montre une prise en compte de la situation physique et une tentative d'explication (du problème) de deux manières différentes :
- **par le dessin** : au début, la hauteur "augmente normalement", le vase est "sans défaut"; puis, le vase présente une "plus grande surface";
- **par le tableau** : il y a une "grande différence" entre 132 et 150 et une "petite différence" entre 160 et 170.

Puis il conclut : "deux mesures à trouver sont impossibles, car il manque d'élément pour les nouvelles". Il y a donc une confrontation des nombres du tableau avec le dessin, destinée à expliquer qu'il y a une relation différente entre les nombres des premières colonnes du tableau et ceux des dernières colonnes.

(d) Commentaires généraux sur les productions des élèves

1. Excepté un, tous les groupes ont "vu" que la proportionnalité ne marchait plus pour les deux derniers nombres à trouver. Cependant, aucun ne l'a explicité. Mais nous ne pouvons répondre à la question : *pourquoi les élèves remettent-ils en question leurs calculs pour 260 cl et 290 cl ?*

Nous faisons l'hypothèse que, dans un premier temps, c'est un examen du tableau qui provoque cette interrogation. Nous avons des indices qui vont dans ce sens :

- dans deux groupes (groupe C et E), les élèves donnent finalement, pour 260 cl, une hauteur de 155 mm, correspondant à la moyenne de 150 et 160 mm (260 représentant la moyenne entre 240 et 280) ;
- dans le groupe F, l'élève F5 a calculé la hauteur correspondant à 260 cl en multipliant 260 par un coefficient égal à la *moyenne des coefficients reliant deux couples de nombres* entourant 260 :

240	260	280
150	x	160
1,60	c	1,75

c "est le milieu de 1,60 et de 1,75" et x = 260 : c .

Dans un deuxième temps, le recours au dessin correspond à la recherche d'une explication. La régularité du tableau semble associée à l'uniformité de la forme du vase.

2. Cependant, la situation ne permet pas d'invalider toutes les procédures de calculs relevant de la proportionnalité qui sont utilisées pour les questions 3 et 4, car certaines aboutissent à des nombres "cohérents" avec ceux du tableau (groupe C). Rappelons aussi que les quatre élèves du groupe B n'ont, de manière évidente, faits aucune réflexion sur leurs calculs. Cette dernière remarque montre l'insuffisance de l'enjeu de la situation-problème.

3. Il peut y avoir confusion entre l'existence d'un coefficient de proportionnalité et la possibilité de trouver un rapport entier entre deux nombres. En effet, pour deux élèves du groupe D, il est apparu que les quotients ne donnant pas d'entiers, on ne peut pas calculer un coefficient de proportionnalité. Voici ce qu'ils écrivent :

"Non, nous ne pouvons pas, parce que le coefficient de proportionnalité est indéfini, ce n'est pas un nombre rond" (élève D3).
"non, on ne peut pas trouver la hauteur d'eau pour 50cl d'eau, parce que le coefficient de proportionalité n'est pas nombre entier" (élève D5).

Mais, et ceci est remarquable, *ces deux élèves utilisent quand même les produits en croix,* ce qui confirme que, pour eux, le domaine de validité de la procédure C est indépendant de la proportionnalité. Ceci est valable pour la plupart des procédures. Elles sont perçues par les élèves comme des outils de calcul et non comme spécifiques à cette notion.

II. La situation du Cycliste

Pour la description de cette deuxième situation-problème, nous avons choisi un autre point de vue : nous décrivons en II.3 *comment* nous l'avons construit, c'est-à-dire les choix didactiques qui ont été faits, en particulier le rôle attendu de certaines caractéristiques du problème sur les procédures des élèves. Cette analyse est transférable sous certains aspects à la situation du Vase que nous avons décrite précédemment.

Cette situation a été également réalisée dans des classes de 5ème. Les résultats sont donnés de manière succinte en II.4.

II.1. Le texte du problème

Ce texte a été élaboré par les enseignants. Nous le reproduisons ci-dessous, avec la consigne donnée aux élèves et les conditions de réalisation.

Un cycliste roule régulièrement, s'arrête, puis roule à nouveau à une allure régulière.
Le tableau suivant représente son parcours :

Temps en minutes	5	25	45	60	80	100	120
Distance en kilomètres	2	10	18	18	28	38	48

1) Calculez la distance parcourue au bout de 20 minutes.
2) Calculez la distance parcourue au bout de 28 minutes.
3) Calculez la distance parcourue au bout de 95 minutes.
4) Quel temps a mis le cycliste pour faire 40 kilomètres ?
5) Refaites le tableau en le complétant avec les résultats que vous avez trouvés.

Consignes écrites à donner aux élèves :

temps : - Pour résoudre le problème donné, vous disposez **d'une heure.**

conditions de travail:
Chaque binôme sera observé par un professeur qui notera ce qu'il se passe.
Un binôme sera enregistré.
Pour faire ce travail vous pouvez demander, si besoin est, à l'observateur :
- une règle graduée ;
- une feuille de papier millimétré,
- une calculatrice pour exécuter un calcul prévu.

Ce travail sera exécuté, discuté à deux.

travail rendu:
Chaque binôme ne disposera que d'une seule feuille (brouillon et devoir rendu en même temps) et d'un stylo bille.
Quand une question est finie, vous tirez un trait, pour la séparer de la suivante et chaque fois vous écrirez le numéro de la question traitée.
Les opérations seront posées sur la feuille puis exécutées à la calculatrice fournie par l'observateur.

II.2. Objectifs

Les objectifs sont analogues à ceux de la situation-problème précédente. La situation doit permettre, dans un premier temps, la mise en oeuvre de procédures relatives à la proportionnalité. Dans un deuxième temps, il faut faire en sorte que ces procédures ne "fonctionnent" plus : il s'agit d'inviter l'élève à se poser des questions sur leur domaine de validité. Enfin, la situation doit être telle que la réponse à ces questions exige une analyse globale du tableau et la prise en compte de la situation physique.

Nous avons joué sur les caractéristiques de la situation : celles-ci devaient inciter les élèves à remplacer les procédures analogiques (qu'ils préfèrent) par des procédures analytiques (l'unicité du coefficient permet d'aller plus vite dans la 2e question, tandis que le rapport scalaire dépend du choix du couple).

II.3. Choix didactiques

(a) Le contexte

La *notion de vitesse*, bien que difficile du point de vue mathématique et physique, est familière en tant qu'objet culturel : cela devrait permettre à l'élève d'interpréter le tableau à partir du texte et de se représenter mentalement la situation physique sous-jacente. Malgré cette familiarité, il ne faut pas s'attendre à ce que l'élève identifie le coefficient (la valeur unitaire) à la vitesse moyenne. La formulation de l'énoncé ("roule régulièrement", "s'arrête", "roule à nouveau régulièrement") est en correspondance simple avec les nombres du tableau et les écarts entre eux.

(b) Les variables de la situation problème

La notion de *variable* en didactique désigne *une caractéristique du problème dont la modification est susceptible d'entrainer des changements de procédures chez les élèves.* Celles que nous décrivons ci-dessous ont émergé du travail des enseignants-stagiaires (elles correspondent à celles repérées dans les travaux de recherche en didactique sur cette notion).

• Le tableau

Nous avons déjà vu que la présentation sous forme de tableau induit des procédures de calcul de type proportionnalité. Elle favorise donc l'entrée dans le problème, d'autant plus que les nombres sont rangés par ordre croissant.

• Les écarts entre les nombres du tableau

L'écart constant au niveau des temps - sauf pour l'arrêt - devrait mettre l'arrêt en valeur et permettre ainsi un retour sur le tableau dans son ensemble et une réflexion par rapport à la situation physique sous-jacente. Le fait de donner les bornes de l'arrêt devrait également, en permettant d'associer texte et tableau, favoriser la prise en compte de la situation physique.

• La nature des nombres

L'utilisation des nombres entiers permet une lecture simplifiée et la donnée de nombres multiples de 20 dans la dernière partie du tableau doit inciter les élèves à lire entièrement le tableau. La relation affine reliant les quatre derniers couples est mise en évidence, mais elle peut aussi être lue comme une relation de proportionnalité par les élèves. D'autre part, certains choix ne favorisent pas les procédures de type analytique : grandeurs de natures différentes, rapports entre les nombres d'une colonne non entiers, absence de l'unité parmi les nombres.

• Le choix des questions

Pour résoudre les deux premières questions, il existe un grand choix de procédures "efficaces". Mais la question 1 favorise la mise en oeuvre de procédures analogiques, par exemple celle qui utilise l'égalité 20 = 25 - 5 et qui donne très facilement le résultat. Par contre, pour résoudre la question 2, il est plus intéressant d'utiliser une procédure analytique, le nombre 28 ne se déduisant pas facilement des nombres de la première ligne du tableau.

Les questions 3 et 4 doivent permettre à l'élève de réaliser que la situation proposée n'est pas une situation de proportionnalité et l'inciter à se rapporter à la situation physique et au texte. Certaines des procédures liées à la proportionnalité peuvent être remises en question: ce sont celles qui aboutissent à un résultat "évidemment incohérent", c'est-à-dire donnant un nombre qui n'est pas dans l'intervalle attendu.

La 5ème question a pour objectif d'attirer l'attention des élèves sur l'ensemble du tableau.

• Le matériel et l'organisation sociale

Les élèves disposent d'une calculatrice et de papier millimétré. La première élimine les blocages dus aux difficultés dans les calculs, le second peut induire chez les élèves la construction d'un graphique. Il est prévu un travail par binôme, d'une durée de 1 heure.

II.4. Résultats

L'analyse des productions des élèves confirme notre hypothèse sur l'influence de la présentation en tableau d'un problème. Les vérifications sont faites par rapport à la *notion d'ordre croissantt*. D'autre part, cette présentation du problème incite à un travail local sur les nombres sans lecture globale de la situation.

La facilité d'utilisation des procédures analogiques a nui à une recherche de sens d'où une remise en cause tardive de la proportionnalité (cette remise en cause, attendue à la question 3, n'arrive souvent que lors de la résolution de la 5ème question). D'autre part, ni le texte du problème, ni les différences d'écarts au niveau du temps n'ont suffi à faire prendre en compte l'arrêt.

Les deux nombres du couple (120, 48) sont dans le même rapport que les nombres des trois premiers couples. De ce fait, une mise en rapport de la dernière colonne avec les trois premières ne permet pas d'établir la non proportionnalité et peut au contraire induire chez les élèves un réinvestissement des procédures utilisées pour les deux premières questions. Cette caractéristique apparait donc comme une entrave à l'objectif fixé. Il devient alors nécessaire pour l'élève d'avoir une maîtrise suffisante de la notion pour ne pas se laisser prendre au piège.

L'absence du *nombre unité* dans le tableau a amené certains élèves à **calculer le coefficient en lui donnant le statut de valeur unitaire**. Le choix de grandeurs de natures différentes (temps, distance) a facilité cette procédure, car elle a permis d'établir une correspondance entre km et min. Il faut cependant signaler que les rapports des nombres d'une même colonne n'ont pas été perçus par les élèves comme des vitesses moyennes du cycliste : l'unité "km/min ne favorise pas cette reconnaissance.

Enfin, la cinquième question s'est révélée indispensable pour que les élèves analysent le tableau dans sa totalité, première étape pour la prise en compte globale du problème.

III. Conclusion

Ces situations problèmes avaient été élaborées pour amener les élèves à prendre conscience que les procédures de calcul dans un tableau ne sont pas indépendantes des relations entre les suites de nombres qui le composent et qu'elles sont liées à la notion de proportionnalité. En fait, telles qu'elles sont construites, ces deux situations ne permettent pas d'assurer qu'il y aura remise en question des procédures fausses attendues (voir, dans la situation du vase, groupe B, questions 3 et 4). Une des raisons est que, pour l'élève, un résultat est satisfaisant dès lors qu'il respecte une propriété de "terme moyen" entre deux nombres (par exemple, dans le problème du "cycliste", c'est seulement lorsque les élèves intègrent les nombres calculés dans le tableau qu'ils remetttent leurs calculs en question).

On constate que la prise en compte de la situation physique ne se fait que dans un deuxième temps (lorsque le nombre calculé est "trop grand" ou "trop petit"). En effet, dans ce cas, ni le tableau ni les questions posées ne peuvent fournir une réponse à l'interrogation "pourquoi ma procédure ne marche-t-elle plus?". Le recours au dessin fournit alors une **explication** sur laquelle les élèves vont s'appuyer (exemple, la forme du vase change, le vase s'élargit).

L'invalidation passe par la prise en compte de la situation physique qui leur permet de se persuader qu'il est "normal" que la procédure ne marche plus. Mais c'est le résultat qui est invalidé plutôt que la procédure (il n'y a aucun retour sur les procédures utilisées pour les premières questions). C'est que chaque question est résolue localement par l'élève : celui-ci sélectionne dans le tableau les colonnes qui lui semblent pertinentes et ne travaille que sur ces données. Dans de telles conditions, de nombreuses procédures fournissent un résultat cohérent et ne peuvent donc être remises en question. C'est le cas de plusieurs procédures analogiques, mais aussi le cas de la procédure consistant à faire une interpolation linéaire des rapports entre les termes correspondants des deux suites.

Bibliographie

Actes de la 4ème école d'été de Didactique des mathématiques et de l'informatique, 1986, ed. IREM de Paris VII.

Brousseau G., 1981, Problèmes de didactique des décimaux, RDM, 2.1. Ed. la pensée sauvage, Grenoble.

COPREM, 1986, La proportionnalité , le calcul numérique.

Douady R., Hypothèses pour la construction de séquences d'apprentissage, in Suivi Scientifique 6ème, pp. 239 - 244, Bulletin Inter-IREM premier cycle, ed. IREM de Lyon.

Morin Ch., 1987, La classe de Mathématique au jour le jour, bulletin APMEP, n°360.

Sokona S. B., 1989, Aspects analytiques at aspects analogiques de la proportionnalité dans une situation de formulation, petit x n°19, p.5-27. Ed IREM de Grenoble.

Annexe 1

Elève	Cases utilisées	Procédures	Prise en compte situation physique	Prise en compte tableau	Moyens de validation	Remarques
A1 A2 A3	40-27 pour tous les calculs	produits en croix	Pour 260 et 290 calculs effectués puis barrés "impossible car le vase n'a pas une forme régulière"		On ne sait pas si c'est le tableau ou la forme du vase qui permettent d'invalider les résultats	
B	40-27 -> 50 cl	40 : 4 = 10 40 + 10 = 50 27 : 4 = 6,75 27+6,75 = 33,75				
	160-108 -> 148 cl	148 = 160 - 12 10 cl -> 6,75 mm 10 : 5 = 2 6,75 : 5 = 1,35 12 cl -> 8,10 mm 108 - 8,10 = 99,9				
	240-150 -> 260 cl	240 : 12 = 20 240 + 20 = 260 150 : 20 = 7,5 150 + 7,5 = 157,5		aucun recours au tableau pour validité de la réponse	pas d'invalidation	n'utilise pas 10 cl -> 6,75 mm pour calculer 20 cl -> ?
	280-160 -> 290 cl	280 : 28 = 10 280 + 10 =290 160 : 28 = 5,71 160 + 5,75 = 165,71		aucun recours au tableau pour validité de la réponse	pas d'invalidation	
C	27-40	Hauteur pour 1 cl 27 : 40 = 0,675 0,675 x 50 = 33,75 0,675 x 148 = 99,9 Pour 260 cl 240 260 280 150 155 160			Non marqués mais ils →	ont sans doute conditionné changement de procédures.
D1	80-54 -> 50 cl	80 | 50 / 54 | = 33,73 240 | 260 / 150 | = impossible idem 290				

Elève	Cases utilisées	Procédures	Prise en compte situation physique	Prise en compte tableau	Moyens de validation	Remarques
D2	40-27	* 40 x 6,5 = 260 27 x 6,5 = 175,5 marqué sur * 40 x 7,25 = 290 le tableau 27 -> 195,75 a) $\frac{50 \times 27}{40}$ ou 40 + 10 = 50 ou 1cl -> 27:10=0,675 0,675 x 50 b) $\frac{148 \times 27}{40} = 99,9$	Vers la fin, plus on verse une grande quantité, moins la hauteur augmente (dessin)	200 | 240 | 280 | 320 132 | 150 | 160 | 165 grande différence petite différence	tableau et forme du vase.	
D3	80-54	puis les 4 produits en croix -> 33,75 | 99,9 | 175,5 | 195,75		Non, coeff. prop. indéfini, ce n'est pas un nombre rond		
D4	80-50 -> 50 cl	(50 x 54) : 80 (148 x 54) : 80 175,5 195,75		Non		
D5	80-54	Non mais calculs quand même 50 x 54 : 80 = 33,75 (même chose pour les 4 calculs)		Non, coefficient proportionnalité n'est pas un nombre entier.		
E1	40-27 -> 50 cl	* 10 cl 27 : 4 = 6,75 6,75 x 5 = 33,75 * 6,75 x 14,8 = 99,9	A partir de 200 cl sur 132 mm le tableau ne sera plus proportionnel, donc on ne pourra pas trouver le résultat parce que le vase s'agrandit.			
E2	40-27 -> 50 cl	* 27 : 4 = 6,75 6,75 + 27 = 33,75	x 6,75	40 80 120 160 27 54 81 108		
E3	40-27 -> 50	* Pour 10 cl : 40 : 10 = 4 40 + 10 = 50 27 : 4 = 6,75 Pour 50 cl : 6,75 x 5 = 33,75 * Pour 148 cl 6,75 x 14,8 * pour 260 cl impossible		x 14,8 10 | 148 6,75 | x 14,8		

Annexe 1 (suite)

Elève	Cases utilisées	Procédures	Prise en compte situation physique	Prise en compte tableau	Moyens de validation	Remarques
E4	20-27 -> 50					
F1	27-40			$\begin{array}{cc} 27 & 34 \\ \hline 40 & 50 \end{array}$ (F2)		
F2						
F3				$\begin{array}{cc} 27 & 34 \\ \hline 40 & 50 \end{array}$ 27 x 50 = 1350 1350 : 40 = 35		
F4		50 cl : 160-108 148 cl : 40-27				
F5		260 cl : 240 : 150 = 1,6 280 : 160 = 1,75 milieu entre 1,6 et 1,75 est 1,675 260 : x = 1,675 260 : 1,675 = x = 155,22388 290 cl : changement de procédure 290 = 280 + 10	F5 : oui	oui		

groupe B B2

1°) Oui car :

40 : 4 = 10

40 + 10 = 50

donc on cherche la hauteur d'eau pour 10 cl.

27 : 4 = 6,75 mm

6,75 mm = 10 cl

40 cl = 27 mm

40 cl + 10 cl = 50 cl

27 mm + 6,75 mm = 33,75 mm

$\boxed{50\ cl \rightarrow 33,75\ mm}$.

2°) Oui car : 160 - 148 = 12 cl

40 : 4 = 10

40 + 10 = 50

donc on cherche la hauteur d'eau pour 10 cl

27 : 4 = 6,75 mm

6,75 mm = 10 cl

on cherche la hauteur d'eau pour 2 cl

6,75 mm = 10 cl

10 cl : 5 = 2 cl

6,75 : 5 = 1,35 mm

2 = 1,35 mm

12 cl = 10 + 2

donc 6,75 + 1,35 = 8,10 mm

12 cl = 8,10 mm

comme 1) 160 cl = 108 mm

2) 160 cl - 12 cl = 148 cl

3) 12 cl = 8,10 mm

donc 108 - 8,10 = 99,9 mm .

$\boxed{148\ cl \rightarrow 99,9\ mm}$

Oui car :

3°) 240 : 12 = 20

240 + 20 = 260

donc on cherche la hauteur d'eau pour 20 cl.

150 : 20 = 7,5 mm.

7,5 mm = 20 cl.

240 cl = 150 mm.

240 cl + 20 mm = 260 cl.

7,5 + 150 = 157,5 mm

260 cl = $\boxed{157,5\ mm.}$

4°) Oui car :

280 : 28 = 10

280 + 10 = 290

160 : 28 = 5,71

5,71 mm = 10 mm

280 cl = 160 mm.

280 + 10 = 290 cl

160 mm + 5,71 mm = $\boxed{165,71\ mm}$

Annexe 2

Annexe 3

P2

D

1c) On peut trouver la Hauteur d'eau en procédant les [illegible]

Volume d'eau en cl	40	50	148	260	290
Hauteur d'eau (en mm)	27	33,75	~~99,9~~	175,5	195,75

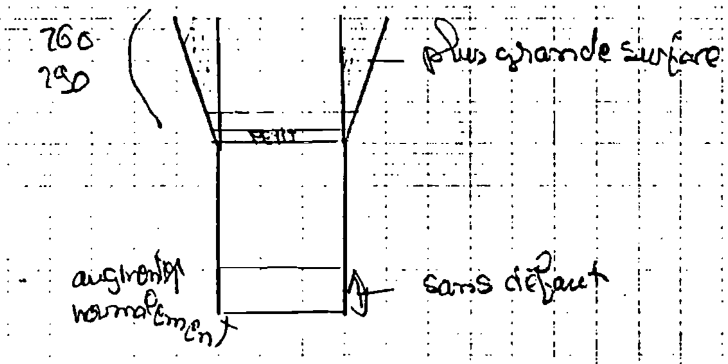
6,5

[illegible]

problème

forme du vase

Vers la fin plus on verse une grande quantité moins la Hauteur augmente.



200	240	280	320
132	150	160	165

grande différence

petite différence

D2 suite

Leur [illegible] à trouver [illegible] proportionnelles [illegible] pour les nouvelles,

a) $\frac{50 \times 27}{40} = 33,75$ ou

$40 : 4$

$40 + 10 = 50$

[illegible]

$27 : 4 = 6,75$ mm

$6,75$ mm $= 10$ cl

40 cl $= 27$ mm

$40 + 10 = 50$ cl

27 mm $+ 6,75 = 50$ cl $= 33,75$ mm

50 cl $= 33,75$ mm

ou

Hauteur pour 1 cl :

$27 : 40 = 0,675$

Hauteur pour 50 cl :

$0,675 \times 50 = 33,75$

b) Hauteur d'eau pour 148 cl

$\frac{148 \times 27}{40} = 99,9$ mm

c)

22