



Compte-rendu de la réunion LÉA du 2 mars 2022 et quelques apports à l'occasion des questions ou remarques - Groupe Annecy

9h-12h30 - Ecole du Parmelan, Annecy

Présents : Béatrice Danjou, Lilian Deronzier, Michèle Gandit, François Lathuraz, Catherine Mohn, Laurence Mossuz, Caroline Zavarise.

I - Un point sur l'avancement du travail de recherche

Les personnes présentes s'expriment sur les problèmes mis en œuvre en classe depuis la rentrée 2021 jusqu'à ce jour.

François (classe de CE1) a expérimenté une variante du problème des Tours¹ et le problème des Billets². Dans sa classe, les élèves travaillent sur un cahier réservé aux problèmes de la progression IREM³. Ce cahier s'intitule le Journal de la preuve (sous réserves).

Pour ce dernier problème des Billets, il a noté que les élèves avaient trouvé plusieurs solutions dès la phase initiale de recherche individuelle. Il avait envisagé la modalité de travail en groupe pour justifier les solutions trouvées individuellement et aussi que toutes les solutions avaient été trouvées. François a noté la difficulté, pour les groupes, à produire une trace écrite qui prouve que toutes les solutions avaient été trouvées.

¹ <https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/recherche-action/themes/resolution-de-problemes-aux-cycles-1-2-et-3/les-tours-979203.kjsp?RH=413148517470877>

² Pour le cycle 2 : <https://cloud.univ-grenoble-alpes.fr/index.php/s/WYJnWecZLWp28t7>
Pour le cycle 3 : <https://cloud.univ-grenoble-alpes.fr/index.php/s/iqWfy2i5B36gk2R>

³ <https://cloud.univ-grenoble-alpes.fr/index.php/s/iqWfy2i5B36gk2R>

A la suite de la recherche du problème des Tours, des variantes ont été proposées en classe, individuellement, sous la forme de rituels. Par exemple, « comment atteindre 23 avec 2 et 5 ? ». François a noté que tous les élèves étaient partis à faire des essais, il a noté que des élèves organisaient leurs recherches et qu'ils justifiaient.

Les contraintes des programmes font que les enseignants ont peu de temps à consacrer à la résolution de problèmes en cycle 2, mais le travail dans le cadre du projet IREM LéA encourage François à redonner sa place à la résolution de problèmes.

Une question posée par François : comment amener vers la justification certains élèves qui en restent aux essais ?

Caroline (classe de CM2) a une classe dont les élèves n'ont pas travaillé l'année dernière la résolution de problèmes dans le cadre du projet IREM. Cette année, les réactions des élèves face à la résolution de problèmes l'amène à considérer l'existence dans la classe de deux groupes, dont l'un est investi, voire très investi (groupe de « bons élèves ») dans la résolution des problèmes proposés et l'autre beaucoup moins. Les problèmes travaillés sont celui des Billets, et les variantes « Nombre cible » et « Somme des chiffres »⁴. Le groupe qui n'est pas motivé par la résolution de problèmes montre des difficultés dans l'organisation de la recherche : les élèves de ce groupe en restent aux essais et restent ensuite dans une position d'attente. Le groupe qui s'investit dans la résolution de problèmes montre une capacité à s'organiser, certains arrivent à proposer des généralisations.

Pour les phases de travail de groupe, Caroline a alors constitué des groupes hétérogènes pour essayer d'aider les élèves en difficulté. Elle a ensuite proposé un travail individuel et a remarqué que le travail de groupe avait eu un impact. Puis à la suite d'un nouveau travail de recherche, elle a noté que certains élèves avaient émis des hypothèses. Lorsqu'il s'est agi d'invalider certaines de ces hypothèses, les élèves ont trouvé des contre-exemples. Ils emploient ce vocabulaire spécifique. Lorsqu'il s'agit de valider ou d'invalider des hypothèses, Caroline utilise ce que nous avons appelé « la fiche d'aide au débat ». Elle est jointe en annexe 1.

Il est proposé à Caroline que les élèves disposent d'un cahier spécifique à la résolution de problèmes. Ceci pourrait amener certains élèves un peu réfractaires à comprendre que la résolution de problèmes a toute sa place dans le cadre scolaire. Ce cahier pourrait contenir les traces écrites correspondant aux institutionnalisations à l'issue des séances de résolution de problèmes.

Catherine (classe de CM2) a expérimenté les problèmes des Tours, des Billets et des Diagonales⁵. Comme Caroline, elle note deux profils d'élèves dans sa classe, des élèves investis et d'autre peu investis lorsqu'il s'agit de résoudre des problèmes comme ceux de la progression.

⁴ <https://cloud.univ-grenoble-alpes.fr/index.php/s/iqWfy2i5B36gk2R>

⁵ <https://cloud.univ-grenoble-alpes.fr/index.php/s/J8cqteEbJ43zwn5>

Concernant le problème des Diagonales, Catherine a constaté que les élèves prenaient souvent des exemples de polygones complexes. Ceci est conforme à ce qui a été expérimenté lors de plusieurs autres expérimentations, comme le dit Gandit (2015, p. 72) : « [...] les stratégies initiales que vont utiliser les élèves ne sont justement pas de choisir des cas simples permettant d'induire une généralité. Ceci s'est vérifié dans de multiples expérimentations passées. Ils vont en effet choisir des polygones « complexes » [...] ou trop simples (triangle, rectangle). ». Comme le disent plusieurs mathématiciens ou philosophes, on ne reconnaît les solutions simples que lorsqu'on a mis en œuvre pleins d'idées et d'études complexes. Un élève ne peut pas savoir *a priori* ce qui est simple. Voir aussi la gestion de la complexité développée dans (Gueudet & al, p. 7). Voir la figure 1.

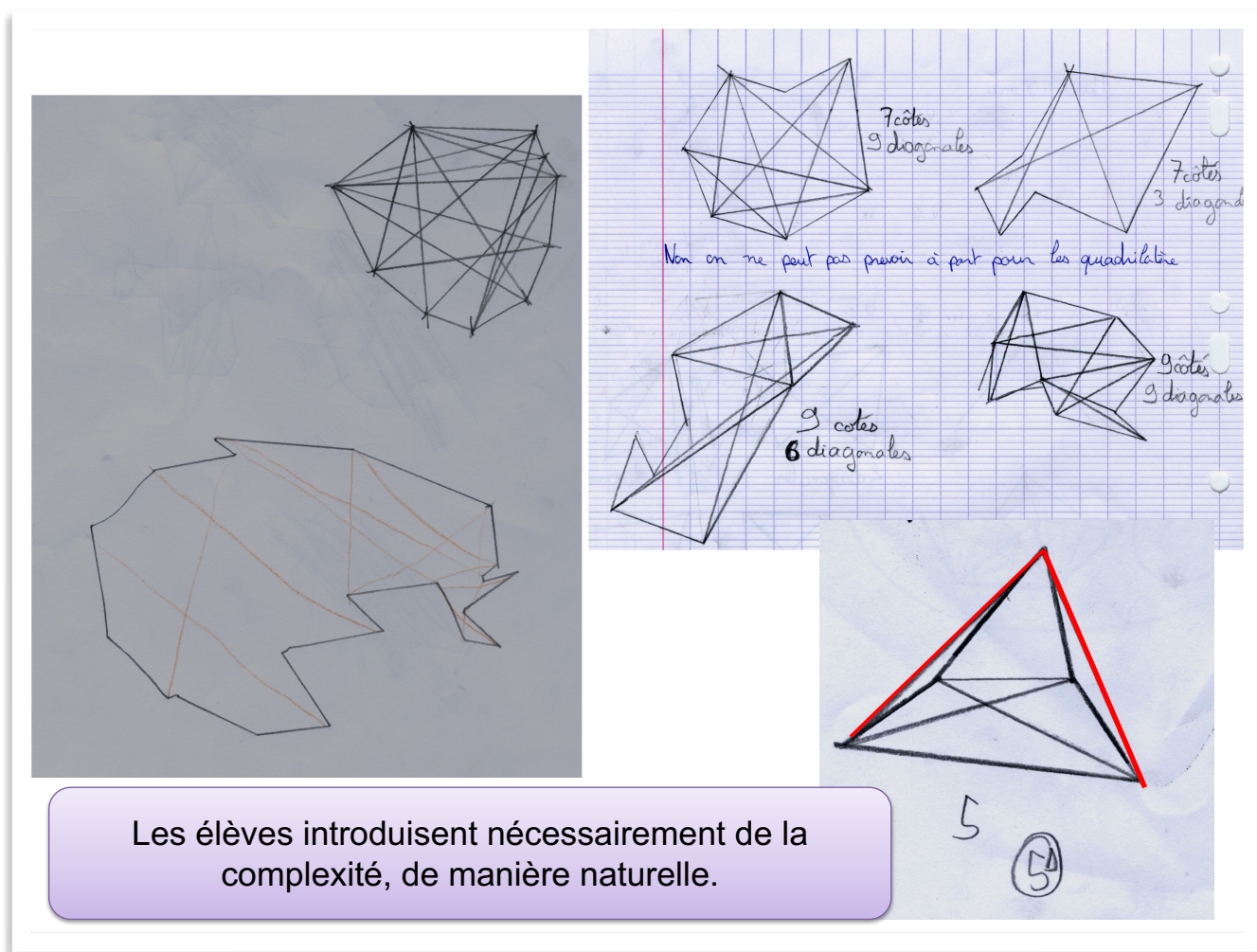


Figure 1 – Des productions d'élèves sur le problème des Diagonales

Comment l'enseignante peut-elle gérer cette complexité introduite par les élèves ? Il ne faut pas fermer le problème en guidant les élèves vers d'autres choix d'exemples et il faut tenir compte du fait que cette complexité est naturelle pour les élèves. Si elle bloque la possibilité de conjecture, il faut savoir interrompre la recherche pour organiser un débat ou faire un point pour toute la classe.

Balacheff⁶ (1988, p.102-153) distingue différents types de démarches, ordonnées dans le sens de l'entrée dans le processus de preuve, pour décrire les procédures des élèves au cours de la résolution d'un problème. Ce sont : 1) l'*empirisme naïf*, 2) l'*expérience cruciale*, 3) l'*exemple générique*, 4) l'*expérience mentale* et 5) le *calcul sur les énoncés*.

Même si Balacheff (ibid.) considère que les trois premiers types révèlent des démarches qui restent extérieures à l'entrée dans un processus de preuve – il les nomme *preuves pragmatiques* –, nous considérons que c'est à partir du troisième type, l'exemple générique, que l'on peut dire que les élèves entrent dans un processus de preuve.

Voici plus explicitement les différents types :

1. L'**empirisme naïf** : c'est une démarche où l'on s'appuie sur l'examen de quelques exemples et en tire une conjecture de portée générale ; on peut noter que ce type de raisonnement est extrêmement courant dans la vie de tous les jours.

François, Caroline ont parlé des élèves qui en restent aux essais. Ce sont des élèves qui sont dans cette démarche d'empirisme naïf.

2. L'**expérience cruciale** : c'est une démarche où l'on met à l'épreuve une conjecture ou une idée en l'appliquant à un nouvel exemple, parfois plus complexe ; dans cette démarche, la question de la généralisation est prise en charge, mais en reste au stade empirique. On pourrait la résumer par cette phrase : « Si ce que j'ai remarqué sur les quelques cas que j'ai étudiés marche aussi pour cet exemple – par exemple, un polygone à 12 côtés – alors cela marche pour tous les cas. ».

Le fait que Caroline et Catherine aient parlé du choix d'élèves de partir de polygones complexes peut s'interpréter en terme d'expérience cruciale. Il faudrait savoir si, auparavant, les élèves avaient fait des constatations sur des cas plus simples. Un autre exemple (figure 2). A partir de cet exemple, l'élève confirme son idée : « Un polygone peut avoir autant de coté qu'on veut »

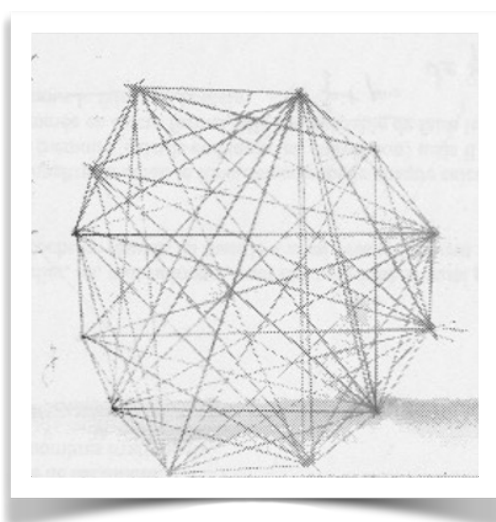


Figure 2 – Une expérience cruciale

⁶<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00326426/document>

3. L'**exemple générique** : c'est une démarche où l'on s'applique à dégager les raisons de la validité d'une conjecture, en s'appuyant sur la représentation d'un cas particulier.

Lorsque Caroline propose aux élèves de choisir un polygone à 26 côtés pour expliquer la démarche, elle incite ces élèves à entrer dans le processus de preuve par un exemple générique.

Voici un autre exemple (figure 3) dans la classe de Catherine (CM2) en 2019-2020 (sous réserves).

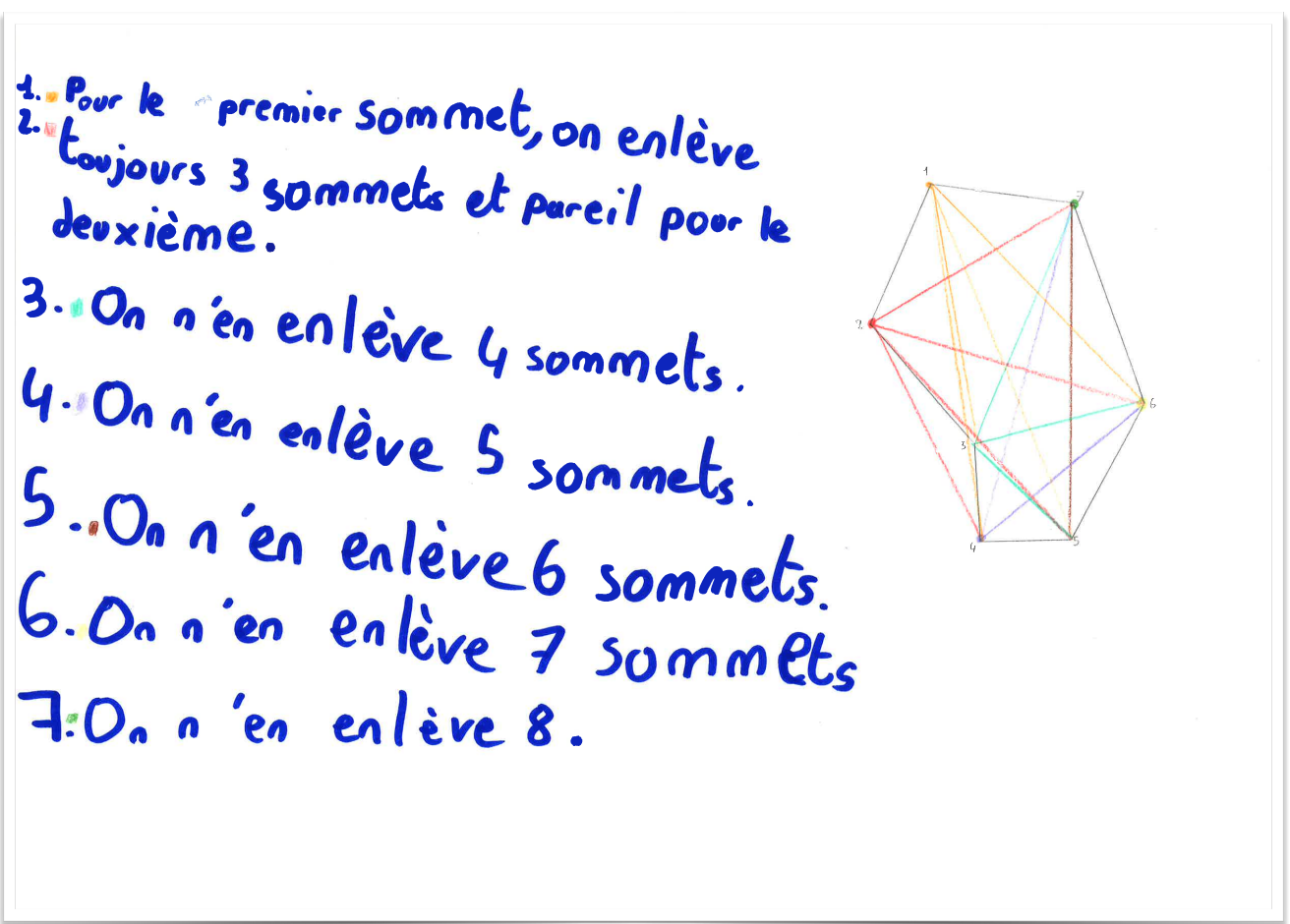


Figure 3 – Un exemple générique qui montre l'entrée dans le processus de preuve

Pour répondre à la question de François et faire avancer la recherche en classe vers l'entrée dans le processus de preuve, il pourrait être pertinent de reprendre les différentes démarches utilisées par les élèves et montrer en quoi certaines d'entre elles sont valides et d'autres ne le sont pas.

Nous avons en effet proposé d'institutionnaliser certains éléments, mais on pourrait envisager d'institutionnaliser aussi, par exemple, qu'un raisonnement qui consiste prendre quelques exemples et à en tirer un résultat n'est pas acceptable en

mathématiques ou que l'étude seule de quelques exemples ne permet pas d'obtenir de conclusion générale.

Dans tous les cas, il est utile de valoriser les différentes démarches utilisées par les élèves pour montrer que des démarches différentes – par exemple dans le cas de la résolution du problème des Diagonales – peuvent être valides toutes les deux, et qu'elles sont bien plus importantes que le résultat auquel elles permettent d'aboutir.

4. L'**expérience mentale** : c'est une démarche où « l'explication des raisons, qui fondent la validité de la proposition, repose sur l'analyse des propriétés des objets en jeu. Ces propriétés ne sont plus attestées sur des représentants, mais formulées dans leur généralité. L'action est intériorisée, invoquée dans le discours qui explicite les arguments [...]. » (ibid., p. 131). Dans cette démarche, les arguments donnés se détachent des cas particuliers et sont liés à des actions.

Nous en avons des exemples dans les productions des élèves sur le problème des Diagonales. Il suffit de les retrouver.

5. Le **calcul sur les énoncés** : c'est une démarche qui ne mentionne pas du tout l'expérience ; les arguments s'appuient sur les définitions, propriétés et théorèmes déjà rencontrés.

Caroline et **Catherine** consacrent davantage de séances à la résolution d'un même problème. Dans les années antérieures, elles y consacraient deux séances, maintenant elles en sont à quatre séances. Elles sentent en effet tout le bénéfice concernant l'apprentissage, qu'elles peuvent retirer en allant plus loin avec les élèves sur le plan de l'argumentation et de la validation. Caroline va jusqu'à dire aux élèves que l'objectif n'est pas d'aller jusqu'au bout de la résolution du problème, mais de travailler l'argumentation.

François a fait évoluer ses objectifs : il vise à amener les élèves à argumenter, justifier, valider.

L'argumentation est utilisée dans d'autres domaines que les mathématiques : arts plastiques, histoires...

Béatrice (cycle 1) commente le travail qu'elle propose aux élèves de maternelle dans le cadre des « espaces à scénario » qu'elle met en place. Elle développe⁷ (le document contenant des photos est assez lourd, je propose un lien) l'expérimentation qu'elle a menée et donne des variantes du problème en fonction des sections de maternelle. Elle utilise deux types de représentations analogiques du nombre : le matériel Numicon et le matériel des pièces et billets factices. La conjugaison de ces deux types de matériel est très intéressante. Béatrice recense les difficultés des élèves. Elle développe le travail préparatoire à faire en amont, sur le plan de la mise en place d'un scénario, dans lequel répondre au problème des billets prend tout son sens pour les élèves, et également le plan de la construction du nombre avec ce qu'elle appelle la pochette à compter⁸.

⁷ <https://cloud.univ-grenoble-alpes.fr/index.php/s/e6JxrMxdTcQ847b>

⁸ <https://cloud.univ-grenoble-alpes.fr/index.php/s/cjmeBspsQkPFwwz>

Lilian (classe de CM2) dit que sa classe est assez difficile, il consacre une séance par semaine à la résolution de problèmes. Il a constaté des élèves peu engagés dans la tâche proposée, qui ne développent pas d'organisation dans leurs recherches.

II - Travail sur la carte mentale : de nouvelles modalités pour la mise en œuvre de la résolution de problème

Il s'agit de reprendre la carte mentale (en annexe 2), dont une première version a déjà été diffusée, en insistant davantage sur la place du débat scientifique (Legrand, 1990). Nous avons conscience que nous avons encore peu trouvé le temps de développer les stratégies d'évaluation formative, qui apparaissent en rose sur la carte mentale. Il faudra y revenir. Les changements concernent la trame du déroulement de la mise en œuvre de la résolution d'un problème. Les étiquettes en caractères bleus sont différentes par rapport à la première version de la carte mentale. L'idée est de rendre plus efficace la recherche en groupes, de faire des binômes plutôt que des groupes de quatre, de laisser moins de temps aux élèves en groupes avant de partager les premières idées avec toute la classe et de mettre en place un débat, avec toute la classe, pour valider ou invalider les premiers résultats, plutôt que de faire une mise en commun.

Dans la carte mentale, en dessous de « Résolution du problème » (sur fond rouge), les trois premières étapes n'ont pas changé : présentation du problème, recherche individuelle des élèves et mise au point collective.

Le premier changement concerne l'étiquette « Recherche individuelle des élèves (phase 2) : production de solutions ». Cette étiquette est remplacée par « Recherche en binôme des élèves (phase 2) : production des premières idées ». Nous envisageons ainsi d'écourter cette phase de recherche, c'est-à-dire de ne pas attendre que les premiers résultats sur le problème soient produits par une majorité d'élèves, pour éviter de creuser le décalage entre les élèves qui auront des idées et ceux qui n'en auront pas. Ce qui est attendu à l'issue de cette phase, c'est la production d'idées qui peuvent faire progresser toute la classe. Le rôle d'observateur de l'enseignant est primordial pour recueillir ces premières idées. Ces idées seront partagées entre tous les élèves. Ce sont des idées de méthodes, des idées pour démarrer..., pas encore des résultats à discuter.

Le deuxième changement est relatif à l'étiquette « Recherche en groupe (phase 4) - facultative ». Nous remplaçons cette étiquette par « Débat mathématique (Legrand, 1990 ». La date est à rajouter.

Cette phase de débat démarre d'abord sur une recherche des binômes à partir des premières idées partagées dans la phase précédente. Ici encore le rôle d'observateur de l'enseignant est essentiel.

Dès que l'enseignant sent que les premières conjectures sont formulées par les élèves, il arrête la recherche et demande l'attention de tous les élèves. Il ne faut pas attendre qu'une majorité d'élèves ait produit des conjectures. L'enseignant demande à un élève de donner une première conjecture. Elle est inscrite au tableau. L'enseignant demande aux élèves de voter s'ils sont d'accord ou s'ils ne sont pas d'accord ou s'ils sont dans une position « autre ». Le débat qui permet la validation ou l'invalidation de cette conjecture s'engage.

Cette partie du débat où les élèves doivent prendre position sur une conjecture peut être

préparée en amont par l'utilisation de la fiche d'aide au démarrage du débat. Cette fiche permet aux élèves de réfléchir par écrit. Elle n'est pas utilisable en maternelle, ni en début de CP. Dans le cas où l'enseignant utilise cette fiche d'aide au démarrage du débat, le débat s'engage lors de la séance suivante. Cette fiche d'aide de démarrage au débat était, à l'origine, destinée à préparer le débat dans le cas où, ni les élèves, ni l'enseignant, n'avaient eu l'occasion de débattre scientifiquement. Elle devait permettre à l'enseignant de faire comprendre aux élèves la nature des arguments acceptables dans un débat scientifique. Mais cette fiche peut tout à fait être utilisée en amont de chaque débat scientifique sur un problème, **à condition d'être aménagée (Figure 4 et annexe 3) par l'ajout d'une colonne où l'élève peut se positionner dans une position « autre »**. Cette position « autre » peut être prise parce qu'on ne sait pas si c'est vrai ou si c'est faux, parce qu'on n'a pas eu assez de temps, parce qu'on pense que c'est à la fois vrai et faux... Elle doit être expliquée aux élèves. Il est important que les élèves puissent avoir droit à cette position de ne pas savoir. Et il est bien évident que beaucoup d'élèves vont adopter cette position.

Recopie, par ligne, chacune des réponses qui figurent au tableau.	Réponds : VRAI si tu penses que c'est vrai ou FAUX si tu penses que c'est faux ou AUTRE si tu n'es pas sûr ou si tu n'as pas eu assez de temps ou...	Explique pourquoi. Ton argument doit être convaincant pour une personne qui ne partage pas ton idée.

Figure 4 – Nouvelle version de la fiche d'aide au démarrage du débat

Le troisième changement concerne l'étiquette « Mise en commun : validation ». Cette étiquette est remplacée par « Formulation et communication par les élèves des résultats sur le problème (et leurs preuves) - facultatif ». Il n'est pas nécessaire que les débats sur les conjectures ou réponses proposées par les élèves soient suivis par une séance de communication des résultats obtenus – un résultat sur un problème comporte nécessairement une preuve que ce résultat est valide –. Cela dépend du temps que l'enseignant a prévu de consacrer au problème. Il est bien évident que la phase de débat précédente va déjà amener les élèves à communiquer des conjectures et des preuves, oralement et par écrit. Elle peut être suivie directement par la phase décrite par l'étiquette « Conclusions sur le problème », avec ses trois parties, qui figurent dans la carte mentale.

Cette partie « Formulation et communication par les élèves... » peut être mise en œuvre, sur certains problèmes seulement, avec l'objectif de travailler la communication scientifique. Tous les élèves y participent, répartis en groupes, chaque groupe ayant à sa charge du communiquer sur un élément. Parmi ces éléments, figurent la présentation du problème, les différents résultats obtenus avec leur preuve, les questions que les élèves se sont posées et qui restent sans réponse... Si l'enseignant a la possibilité d'organiser la présentation par ses élèves, du problème lui-même et de tous les résultats trouvés, à une

autre classe, la motivation des élèves à communiquer et à argumenter le mieux possible sera évidemment plus forte.

III – Connaissances d'ordre I et d'ordre II

Nous avons explicité en référence à Sackur & al (2005) ce que nous appelons des connaissances d'ordre I et des connaissances d'ordre II. Les postulats que formulent ces auteurs sont que, d'une part, les connaissances d'ordre II sont constitutives des mathématiques, d'autre part, elles ne peuvent être enseignées comme le sont les définitions et les théorèmes : « [...] d'une part, ces connaissances sont acquises à travers « l'expérience vécue », d'autre part, *autrui* joue un rôle essentiel dans leur acquisition en classe. » (*ibid.* p 62).

Dans la partie droite supérieure de la carte mentale, nous avons noté que la liste des savoirs et savoir-faire que nous visions au travers des résolutions de problèmes étaient des connaissances d'ordre II (voir en annexe 3 les diapositives).

Le choix des différents problèmes de notre progression est orienté par l'objectif de viser des connaissances d'ordre II, avec une certaine progression. Ainsi le problème des Tours vise particulièrement qu'il est nécessaire de s'organiser pour avoir la certitude de trouver toutes les solutions, et suivant la façon dont est posée la question, il vise également la connaissance (d'ordre II) qu'un problème peut avoir plusieurs solutions. Si l'on pose la question, « Combien existe-t-il de tours de quatre étages à quatre couleurs », cette seconde connaissance d'ordre II n'est pas visée. Par contre, dans les versions qui ont été expérimentées en classe, le problème des Billets vise clairement l'apprentissage de ces deux connaissances d'ordre II : il est nécessaire d'organiser son raisonnement pour être sûr du nombre de solutions et un problème peut avoir plusieurs solutions. Le problème des Diagonales quant à lui vise l'apprentissage de la nouvelle connaissance (d'ordre II) selon laquelle faire des essais permet de dégager une généralité (une conjecture de portée générale), ainsi que, au cours du débat qui s'ensuit, pour prouver qu'une généralité est fausse, il suffit de trouver un cas où elle ne fonctionne pas (un contre-exemple). D'autres connaissances d'ordre II sont aussi en jeu dans ces trois problèmes comme, par exemple, la nécessité d'argumenter, ainsi que la reconnaissance que des éléments sont identiques ou différents, qui sont liées à l'énumération, mais aussi l'utilisation de différents registres pour représenter les éléments du problème.

Dans le problème des Tours, la connaissance d'ordre I en jeu est celle du dénombrement d'un ensemble. Dans le problème des Billets, les connaissances d'ordre I sont celles du champ additif et de la multiplication comme addition itérée. Dans le problème des Diagonales, les connaissances d'ordre I sont celles de la définition d'un polygone et d'une diagonale.

La liste des connaissances d'ordre II qui figure dans la carte mentale n'est pas exhaustive. Il faudrait la compléter, notamment par celles qui sont en jeu dans un débat scientifique.

Il reste également à répondre à la question : comment avoir des preuves des apprentissages par les élèves de ces connaissances d'ordre II ?

IV – La place de la verbalisation dans les situations didactiques en mathématiques

Ce point a été développé par Laurence, à partir d'un texte (distribué) de Thierry Dias (référence ?).

La place de la verbalisation dans les situations didactiques en mathématiques - Thierry Dias

- Faire puis dire, la langue au service des échanges a posteriori de l'action de recherche :
 - La mise en mots pour la maîtrise, le contrôle et l'explication des actions.
 - La mise en mots pour poursuivre des objectifs de preuve en raison de la diversité des procédures et des démarches des élèves.
 - La mise en mots pour argumenter les choix et les résultats dans un processus de débat contradictoire propre aux disciplines scientifiques.

La place de la verbalisation dans les situations didactiques en mathématiques - Thierry Dias

• La verbalisation, un acte de langage :

- Pour débattre et profiter du débat mathématique, des compétences langagières sont nécessaires sur le plan syntaxique et le répertoire lexical
- Provoquer des rencontres (travail en groupe) pour déclencher le partage de ressources nécessaires à la résolution du problème ==> connaissances co-construites avec les pairs
- Utiliser auprès des élèves des relances de type méta-cognitives pour favoriser la conscientisation progressive de leurs connaissances, un pas vers l'auto-régulation

V – Un nouveau problème : la course à 20

Brousseau (1998, p. 25-41) a expérimenté « La course à 20 » vers les années 1970.

La course à n

On désigne par n et p des nombres entiers naturels tels que $n > p$.

Il s'agit d'un jeu à deux joueurs, qui disent un nombre tour à tour.

On gagne si l'on dit n le premier.

Le premier qui joue a le droit de dire un nombre entier, sauf 0, inférieur à un nombre p .

On ne peut dire un nombre que s'il s'obtient en ajoutant un nombre entier non nul inférieur à p au nombre que l'adversaire vient de dire.

La course à n

→ Récréations mathématiques

De *Viribus Quantitatis* du mathématicien italien Fra Luca Bartolomeo de Pacioli (fin 15^{ème} siècle)

C'est un jeu combinatoire :

- à 2 joueurs
- à information complète
- dont le nombre de coups est fini
- pas de partie nulle, donc toujours un gagnant
- le gagnant est déterminé par le dernier coup joué de la partie

Chevalarias, N., Gandit, M., Morales, M. & Tournès, D. (dir.) (2019) *Mathématiques récréatives. Eclairages historiques et épistémologiques*, EDP Sciences & UGA Editions

Pour $n = 20$ et $p = 2$

Brousseau utilise la *course à 20* pour expliciter différents éléments de la théorie des situations didactiques

1. **La consigne** : le professeur montre comment jouer (3 min)

2. **Les élèves jouent 1 contre 1**. (10 min)

Au bout de quatre parties individuelles certains élèves pensent « il faut jouer 17 » (**situation d'action**). Il est temps alors d'arrêter cette phase.

3. **Les élèves jouent 1 équipe contre 1 équipe** (25 min)

Le jeu oppose au tableau un représentant de chacune des deux équipes qui doivent rester muettes pendant la partie.

Entre les parties les équipes discutent de leurs stratégies. (**situation de formulation**).

4. Le **Jeu de la découverte** concours de théorèmes équipes contre équipes (**situation de validation, de preuve**).

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. La Pensée sauvage

Le jeu est donc le suivant : Il s'agit, pour chacun des adversaires, de réussir à dire « 20 » en ajoutant 1 ou 2 au nombre dit par l'autre ; l'un commence, dit 1 ou 2 (exemple : 1), l'autre continue, ajoute 1 ou 2 à ce nombre (2 par exemple) et dit « 3 » ; à son tour le premier ajoute 1 ou 2 (1 par exemple), il dit 4, etc.

Dans ce problème de la Course à 20, la trame qui figure dans la carte mentale est un peu bousculée :

1. Les phases de recherche individuelle, de mise au point collective, de recherche en binôme et production des premières idées est remplacée par le « jeu 1 contre 1 ».

Les élèves jouent par groupes de 2, plusieurs parties. Ils marquent sur une feuille les nombres choisis de part et d'autre d'un trait. Cette phase doit comprendre environ 4 parties et durer au plus dix minutes.

Remarque : au cours de cette phase, les enfants appliquent la règle.

Certains, sans en avoir bien conscience, se rendent compte que répondre au hasard n'est pas la meilleure stratégie : ils éprouvent les contraintes du jeu au niveau de l'action et des décisions immédiates et se donnent une suite d'exemples. Certains découvrent implicitement un avantage à dire 17.

2. Les premières idées de stratégies gagnantes vont venir de la phase « Les élèves jouent 1 équipe contre 1 équipe ».
Ils jouent 6 à 8 parties (15 à 20 min).

Les élèves sont partagés en deux équipes. Dans chacune, le professeur désigne un champion pour chaque partie en l'appelant par une lettre, comme au jeu du bérêt. Chaque élève pourra être appelé à défendre son équipe au tableau dans une partie que tout le monde verra ; s'il gagne, il apportera un point à son équipe.

Les élèves se rendent très vite compte de la nécessité de se concerter et de discuter à l'intérieur de chaque équipe pour se communiquer des stratégies. Les premières apparaissent dès la première partie : « il faut dire 17 »...

3. Le débat va s'engager lors du « Jeu de la découverte » (20 à 25 min).
Le professeur demande aux élèves d'énoncer des propositions. Ce sont les découvertes qu'ils ont faites et qui leur ont permis de gagner. Ces découvertes énoncées, alternativement par l'équipe A, puis par l'équipe B, sont inscrites sur le tableau par le professeur et vérifiées aussitôt par l'autre équipe.
A ce moment-là, elles seront acceptées ou rejetées. Si elles sont acceptées, elles seront conservées sur le tableau.

Pour chaque proposition énoncée, l'élève devra venir prouver à un adversaire qu'elle est vraie ou fausse, soit en jouant, soit par une preuve intellectuelle.

Si le jeu de la découverte stagne (les élèves ne trouvent plus de propositions à énoncer), on rejoue à « qui dira 20 ? »

Les observations faites par Brousseau montrent que très vite, les propositions

suivantes sont faites : « si j'écris 17, je suis sûr de gagner », puis « si j'écris 14, je suis sûr aussi de gagner ». Puis les découvertes deviennent moins importantes, comme, par exemple, « si je dis 6, l'autre peut dire 17 et il gagne », « Si je dis 18, je perds » etc.

Nous avons vu que ce problème mettait en jeu des soustractions itérées de 3, à partir de 20. Si l'on choisit une valeur beaucoup plus grande à la place de 20, par exemple, 5928, il devient nécessaire de remplacer la soustraction itérée de 3 par une division euclidienne par 3. Ainsi, suivant les valeurs choisies, les connaissances en jeu d'ordre I ne sont pas les mêmes.

Quelles sont les connaissances d'ordre II visées par ce problème de la Course à 20 ?

VI – Retour sur le tableau de progression : une nouvelle version

Cette nouvelle version, qui figure en annexe 5, comporte du texte en couleur qui marque l'inclusion des différentes stratégies d'évaluation formative, qui figurent sur la carte mentale.

Ce tableau a été discuté comme suit :

- * Lilian a proposé « objectif : institutionnalisation propre (réussie) en niveau 3 voire 4 »,
- * Béatrice a proposé « objectif : observation des actions des élèves en niveau 3 »,
- * Francois a proposé « Objectif : débat mathématique pour la validation par les élèves en niveau 3 »,
- * Caroline : « Objectifs : débat mathématique pour la validation en niveau 4 et institutionnalisation avec une trace écrite. »

Ces propositions vont être intégrées à une nouvelle version.

VII – Pour votre prochaine séquence (plusieurs séances possibles) portant sur un nouveau problème

Nous vous proposons de :

- vous positionner, par rapport au tableau de progression, sur les niveaux d'action de l'enseignant, que vous vous fixez comme objectifs pour cette nouvelle séquence, en précisant également votre positionnement actuel ;
- de rédiger une préparation de cette séquence concernant le problème (reprenez un problème déjà mis en œuvre) ;
- de rédiger un bilan en lien avec les objectifs que vous vous êtes fixés.

Références bibliographiques

Balacheff, N. (1988). Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de Collège. [thèse de doctorat, Université Joseph Fourier], Grenoble. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00326426/document>

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. La Pensée sauvage.

Gandit, M. (2015). L'évaluation au cours de séances d'investigation en mathématiques. *Recherches en éducation*, 25, 67-80. <http://www.recherches-en-education.net/IMG/pdf/REE-no21.pdf> (cons. 27/04/2022).

Gueudet, G., Gandit, M., Grangeat, M., Guillaud, J.-C., Hammoud, R., Jameau, A. Triquet, E. (2012). *Pratiques enseignantes et démarches d'investigation en sciences*. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00720160/> (cons. 27/04/2022).

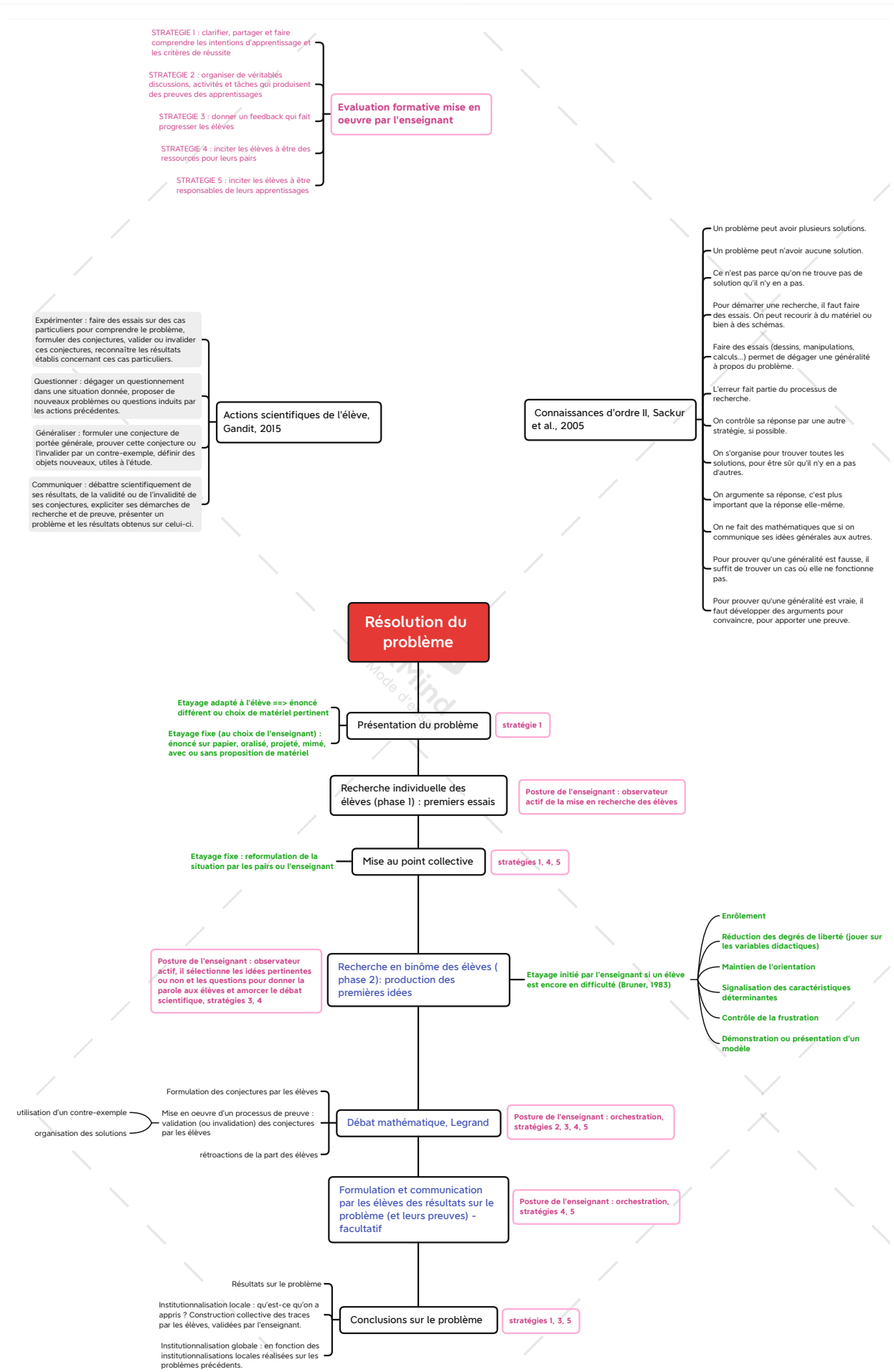
Legrand, M. (1990). Rationalité et démonstration mathématiques, le rapport de la classe à une communauté scientifique. *Recherches en didactique des mathématiques*, n°9/3, p.365-406.

Sackur, C., Assude, T., Maurel, M., Drouhard, J.-P., Paquelier, Y. (2005). L'expérience de la nécessité épistémique. *Recherches en didactique des mathématiques*, n°25/1, p.57-90.

Annexe 1 – Fiche-élève « Aide au démarrage du débat »

Recopie, par ligne, chacune des réponses qui figurent au tableau.	Réponds : *soit « je pense que c'est vrai », * soit « je pense que c'est faux ».	Explique pourquoi tu penses que c'est vrai ou pourquoi tu penses que c'est faux. Ton argument doit être convaincant pour une personne qui ne partage pas ton idée.

Annexe 2 – Carte mentale « résolution du problème »



Annexe 3 – Nouvelle version de la fiche d’aide au démarrage du débat

Recopie, par ligne, chacune des réponses qui figurent au tableau.	Réponds : VRAI si tu penses que c’est vrai ou FAUX si tu penses que c’est faux ou AUTRE si tu n’es pas sûr ou si tu n’as pas eu assez de temps ou...	Explique pourquoi. Ton argument doit être convaincant pour une personne qui ne partage pas ton idée.

Annexe 4 – Les diapositives liées aux connaissances d'ordre I et d'ordre II (2 pages)

Ordre des connaissances

Connaissances d'ordre I

Les objets définis
Les axiomes
Les « contenus » des énoncés mathématiques vrais

Classiquement enseignées

La nécessité s'éprouve dans la confrontation
→ Besoin d'autrui
→ Besoin d'une alternative pour éprouver

Connaissances d'ordre II

Les règles du jeu mathématique. Elles concernent :

Les éléments de logique (il y a des règles pour démontrer)
La sémosis (il faut savoir les exprimer correctement dans différents registres)
La validité des énoncés (il faut démontrer)

Doivent être expérimentées

(Sackur et al., 2005)

Ordre des connaissances

Connaissances d'ordre I

Les objets définis
Les axiomes
Les « contenus » des énoncés mathématiques vrais

Connaissances d'ordre II

Les règles du jeu mathématique. Elles concernent :

La sémosis (il faut savoir les exprimer correctement dans différents registres)
La validité des énoncés (il faut démontrer)

Les énoncés vrais sont **nécessairement** vrais

Dépersonnalisation...

Pour établir qu'un énoncé est vrai, il est nécessaire de le démontrer

Il est en mon pouvoir intellectuellement de m'assurer du vrai ... responsable

Ordre des connaissances

Connaissances d'ordre I

Les objets définis

Les axiomes

Les « contenus » des énoncés mathématiques vrais

Connaissances d'ordre II

Les règles du jeu mathématique. Elles concernent :

La sémiotique (il faut savoir les exprimer correctement dans différents registres)

« $3x + 2$ » signifie la somme du produit de 3 par x et du terme 2

Connaitre et comprendre les codes de codage sur une figure

Le dessin d'un repère

(Sackur et al., 2005)

Annexe 5 – Le tableau de progression : nouvelle version (2 pages)

Note : P représente l'enseignant-e

Indicateurs de niveau de chacune des actions de l'enseignant au cours de la mise en œuvre de la résolution du problème				
Définition et explicitation des objectifs Stratégie 1	P a pour seul objectif que le problème soit résolu.	P s'est fixé pour objectif un apprentissage en lien avec la preuve, mais qui n'est pas explicité au cours de la séance.	P s'est fixé pour objectif un apprentissage en lien avec la preuve. P conduit la séance en fonction de cet objectif et l'explique aux élèves à la fin.	P organise la séance selon l'objectif d'apprentissage visé, en lien avec la preuve, et, le formalise dans une trace écrite.
Observation des actions des élèves Stratégies 3, 4, 5	P observe les élèves individuellement ou en groupe et intervient dans leur recherche de solution : étayage individuel.	P observe les élèves individuellement ou en groupe en ayant recours à un étayage, fixe ou adapté, influençant la représentation qu'ont les élèves du problème.	P relève, dans les actions individuelles des élèves, des indicateurs pour anticiper une mise au point collective ou un étayage adapté ou le démarrage du débat. P incite les élèves à être responsables de leurs apprentissages en prévoyant un espace de dialogue.	P relève, dans les actions individuelles des élèves, des indicateurs pour anticiper le démarrage du débat. P incite les élèves à être des ressources pour leurs pairs : il renvoie le questionnement à l'élève ou au groupe classe. P incite les élèves à être responsables de leurs apprentissages en prévoyant un espace de dialogue.

Débat mathématique - validation Stratégies 2, 3, 4, 5	Tous les élèves présentent leurs conjectures. P (in)valide. Aucune rétroaction de la part des élèves.	P a anticipé la mise en commun : il a classé les productions des élèves selon les stratégies de résolution ou leur validité. Les élèves présentent leurs conjectures mais P (in)valide. Aucune rétroaction de la part des élèves.	P a sélectionné des productions ou conjectures d'élèves pour provoquer des discussions et leur permettre de les (in)valider. P favorise des rétroactions de la part des élèves (feedback) pour faire évoluer leurs stratégies. P incite les élèves à être des ressources pour leurs pairs. Mais c'est P, qui, à l'issue de la discussion, (in)valide.	P a sélectionné des productions ou conjectures d'élèves pour provoquer des discussions et leur permettre de les (in)valider. P favorise des rétroactions de la part des élèves (feedback) pour faire évoluer leurs stratégies. P incite les élèves à être des ressources pour leurs pairs. P incite les élèves à être responsables de leurs propositions. Les conjectures acquièrent le statut de résultats mathématiques.
--	---	---	--	---

Débat mathématique - validation Stratégies 2, 3, 4, 5	Tous les élèves présentent leurs conjectures. P (in)valide. Aucune rétroaction de la part des élèves.	P a anticipé la mise en commun : il a classé les productions des élèves selon les stratégies de résolution ou leur validité. Les élèves présentent leurs conjectures mais P (in)valide. Aucune rétroaction de la part des élèves.	P a sélectionné des productions ou conjectures d'élèves pour provoquer des discussions et leur permettre de les (in)valider. P favorise des rétroactions de la part des élèves (feedback) pour faire évoluer leurs stratégies. P incite les élèves à être des ressources pour leurs pairs. Mais c'est P, qui, à l'issue de la discussion, (in)valide.	P a sélectionné des productions ou conjectures d'élèves pour provoquer des discussions et leur permettre de les (in)valider. P favorise des rétroactions de la part des élèves (feedback) pour faire évoluer leurs stratégies. P incite les élèves à être des ressources pour leurs pairs. P incite les élèves à être responsables de leurs propositions. Les conjectures acquièrent le statut de résultats mathématiques.
---	--	--	---	---