OBJECTIFS, PROGRAMMES ET INSTRUCTIONS DU CYCLE MOYEN.

(B.O. n° 31 du 11.9.80)

I – OBJECTIFS.

Au cycle moyen comme aux cycles précédents, les activités mathématiques doivent permettre aux enfants :

– de réorganiser et d'approfondir des connaissances antérieures (*dans le domaine des nombres naturels, par exemple*) ;

– d'acquérir de nouvelles connaissances (*dans le domaine des nombres décimaux, de la division, par exemple*) ;

– d'accumuler des expériences qui serviront de support à des formalisations ultérieures (*dans le domaine de la géométrie, des nombres décimaux, par exemple*);

– de développer des savoir-faire et des comportements *(procédures de recherche, de preuve .....)* dans tous les domaines.

L'ordre dans lequel sont présentés les objectifs qui suivent ne constitue ni un ordre chronologique pour le travail dans les classes, ni une progression.Il appartient aux maîtres d'établir, pour chacune des rubriques mentionnées (qui comportent de nombreuses interférences), une programmation portant sur les deux années du cycle moyen, par référence à ces objectifs qui doivent être atteints à la fin de la scolarité primaire.

1 – Situations - problèmes.

Dans des situations, vécues ou décrites, savoir :

– associer une question qu'on se pose, ou qui est posée, et l'information pertinente qui lui correspond ;

– organiser et exploiter cette information ;

– communiquer les résultats obtenus et la démarche suivie, et en établir la validité.

2 – Ecrire, nommer et comparer les nombres naturels.

2-1 – Maîtriser l'usage et le fonctionnement des règles de la numération écrite et de celles de la numération orale.

2-2 – Savoir :

– comparer les nombres naturels désignés sous les diverses formes utilisées au cycle élémentaire ;

– les situer les uns par rapport aux autres (en particulier sur une ligne en respectant l'ordre).

3 – Ecrire, nommer et comparer les nombres décimaux.

3-1 – Prendre conscience, dans des situations appropriées, de la nécessité d'étendre le domaine du calcul par l'introduction de nouveaux nombres : nombres décimaux et nombres qui s'écrivent sous la forme de fractions simples.

3-2 – Savoir :

– utiliser correctement les règles usuelles d'écritures des nombres décimaux ;

– désigner un nombre décimal par des écritures additives, multiplicatives, soustractives et fractionnaires et passer d'une écriture à une autre ;

– reconnaître sous des écritures différentes le même nombre décimal.

3-3 – Savoir comparer les nombres décimaux :

– les situer les uns par rapport aux autres (en particulier sur une ligne en respectant l'ordre),

– intercaler un décimal entre deux décimaux,

– encadrer un décimal par deux décimaux et, en particulier, par deux naturels consécutifs.

N.B. : L'étude des nombres décimaux et de leurs structure n'est pas achevée à la fin du cycle moyen. Elle devra se prolonger tout au long de la scolarité au Collège.

4 – Calculer sur les nombres.

4-1 – Savoir :

– reconnaître, analyser et résoudre des situations relevant des diverses opérations sur les nombres ; donner un sens aux opérations sur les nombres décimaux ;

– organiser et effectuer un calcul mettant en jeu l'addition, la multiplication, la soustraction des nombres naturels et décimaux ; élaborer et mettre en œuvre des techniques de calcul correcpondant à ces opérations sur les décimaux ;

– dégager, à partir de situations relevant de la division des nombres naturels, les notions de quotient entier et de reste :

* évaluer l'ordre de grandeur du quotient, par encadrement,

* élaborer une technique de calcul (en organisant les méthodes empiriques utilisées dès le cycle élémentaire) et la mettre en œuvre ;

– élaborer et mettre en œuvre une technique de calcul des quotients décimaux approchés de deux naturels.

N.B.: Les techniques de calcul des quotients de nombres décimaux ne constituent pas un objectif du cycle moyen.

4-2 – Savoir élaborer et mettre en œuvre des procédures mentales de calcul sur les nombres naturels et décimaux.

4-3 – Elaborer des procédures de calcul approché sur les naturels et les décimaux et savoir :

– évaluer l'ordre de grandeur et trouver des encadrements du résultat d'un calcul,

– s'assurer de la vraisemblance d'un résultat.

4-4 – Savoir expliciter et comparer des procédures de résolution (raisonnement et modalités de calcul).

5 – Représenter et utiliser des fonctions numériques.

5-1 – Dans des situations variées, savoir élaborer et/ou interpréter des descriptions (orales, écrites ou graphiques, - conventionnelles ou non) de relations numériques.

5-2 – Savoir :

– reconnaître, utiliser et représenter les fonctions qui, à un nombre n (naturel ou décimal), associent $n + a$ ou $n \times a$ (a étant un naturel ou un décimal) et leurs réciproques ;

– utiliser leurs propriétés (sans formalisation).

5-3 – Savoir reconnaître, organiser et traiter des situations relevant des fonctions numériques, celles citées ci-dessus (en particulier, celles qui relèvent de la proportionnalité) et d'autres.

6 – Mesurer.

Savoir :

6-1 – Construire et utiliser des systèmes de mesure pour les grandeurs étudiées (cf. par. 6-2, 6-3 et 6-5 ci-après) :

* exprimer par un nombre ou par un encadrement le résultat d'un mesurage,

* utiliser les unités usuelles du système légal.

6-2 – Utiliser correctement divers instruments de mesure de longueur ou de masse :

* exprimer les résultats à l'aide des unités adaptées aux objets mesurés ;

* reconnaître ou construire un objet de longueur ou de masse donnée ;

* calculer sur des nombres exprimant des mesures de longueur ou de masse.

6-3 – Mesurer un intervalle de temps et calculer sur les nombres exprimant des durées.

6-4 – Comparer des angles.

6-5 – Classer et ranger, par comparaison directe ou indirecte, des objets selon leur aire,
" leur volume,

– Utiliser les relations qu'entretiennent entre elles les unités du système légal pour longueur, aire, volume ;

– déterminer :

* l'aire d'un rectangle, d'un triangle ;

* le volume d'un pavé droit ;

* l'aire ou le volume d'un objet donné en utilisant un formulaire.

6-6 – Traiter quelques problèmes simples liés à la pratique de la mesure.

7 – Activités géométriques.

7-1 – Savoir :

– pour différents objets géométriques (solides, surfaces ou lignes),

* les reproduire,

* les décrire et les représenter,

* les construire à partir d'une description ou d'une représentation ;

– pour quelques objets géométriques, construire les transformés par des transformations ponctuelles simples (par exemple : *la figure symétrique, par rapport à une droite, d'une figure donnée*).

7-2 – A cet effet :

– choisir et utiliser un instrument,

– mettre au point ou utiliser des techniques de reproduction,

– mettre en œuvre des procédés permettant d'identifier et de construire des parallèles, des perpendiculaires,

– reporter une distance, un angle.

II – INSTRUCTIONS PEDAGOGIQUES.

D'une façon générale, on continuera à privilégier les démarches pédagogiques qui placent les élèves dans des situations où les notions et techniques à introduire ou à réinvestir leur apparaissent comme réponses à des problèmes, sans jamais perdre de vue qu'au cycle moyen, comme plus tard, toute nouvelle notion ou technique se construit sur des acquisitions antérieures (éventuellement remises en question) et sur les expériences dont disposent les élèves.

1 – Situations-problèmes.

Les problèmes peuvent être envisagés selon trois points de vue :

– situations-problèmes utilisées pour l'approche et la construction de nouveaux outils mathématiques,

– situations-problèmes permettant aux enfants de réinvestir des acquis antérieurs, d'en percevoir les limites d'utilisation (situation contre-exemple) et au maître d'en contrôler le degré de maîtrise,

– situations-problèmes plus complexes, plus globales dans lesquelles l'enfant devrait pouvoir mettre en œuvre son pouvoir créatif et affirmer la rigueur et la sûreté de son raisonnement.

Ces trois aspects doivent être exploités pour tous les thèmes du programme. Cependant, le cycle moyen se prête particulièrement à des activités de type "réinvestissement" ou "situations-complexes", la qualité d'outils mathématiques disponibles étant plus étendue qu'au cycle précédent. Ces activités peuvent ou non s'appuyer sur des données numériques.

Il ne suffit pas de demander aux élèves de résoudre des problèmes (même en multipliant les exemples) pour qu'ils progressent dans leur capacité à le faire. *Un apprentissage spécifique, d'ordre méthodologique, est nécessaire*. Les objectifs de cet apprentissage sont le plus souvent présents, simultanément, dans les situations proposées aux enfants. Il y a néanmoins intérêt à travailler plus particulièrement tel ou tel d'entre eux dans certaines séquences, selon les perspectives suggérées ci-dessous.

1-1 – Rechercher, sélectionner et organiser l'information.

Les enfants éprouvent souvent des difficultés pour analyser une situation où des informations sont données et une question posée (les informations fournies sont-elles toutes nécessaires ? Sont-elles suffisantes ? Comment les coordonner et les réorganiser ? etc.). Aussi, les maîtres proposeront-ils aux enfants des situations impliquant de leur part la collecte, la constitution et l'organisation des données grâce auxquelles ils pourront répondre à la question. Ce peut être :

– une question posée à partir d'une situation effectivement rencontrée ou en projet (par exemple: *l'organisation d'une sortie ; la construction d'une maquette ;* etc.). Les enfants doivent réunir et choisir les informations dont ils estiment avoir besoin et rechercher les valeurs numériques correspondantes ;

– une question posée à partir d'une documentation (*textes écrits, dépliants d'information, films, photos, graphiques* .....) fournissant en général une information surabondante par rapport à la question. Les enfants doivent alors sélectionner, organiser et exploiter les informations pertinentes.

Dans ces deux cas, le choix des informations se fait, en fonction du type de résolution envisagée, en traduisant la question posée en un ensemble de sous-questions. Les premières informations collectées peuvent se révéler insuffisantes ou non pertinentes au cours de la résolution : une nouvelle collecte ou un nouveau tri sont alors nécessaires.

1-2 – Résoudre des problèmes.

Dans la résolution d'un problème, un grand nombre d'enfants procèdent au hasard, effectuent n'importe quelle opération, ou choisissent le résultat qui leur semble le mieux adapté après plusieurs essais, ou encore traitent une petite partie du problème sans se préoccuper de l'enchaînement avec le reste.

Le maître favorisera la recherche d'*une démarche raisonnée.* Il pourra par exemple :

- dissocier, dans certaines activités, les démarches et les calculs : un groupe d'enfants joue le rôle de centre de calcul en effectuant (éventuellement à l'aide d'une calculatrice) tous les calculs demandés par les autres groupes qui se consacrent alors exclusivement à la recherche des procédures de résolution ;
- proposer des problèmes dont le contexte, la formulation, les nombres sont très différents, mais qui – sans qu'il s'agisse de familles de problèmes-types – relèvent d'une même procédure générale de résolution ; alors celle-ci s'élucidera plus facilement et pourra, éventuellement, se traduire sous la forme d'un organigramme simple, élaboré par les élèves.

Pour un même problème, les procédures de résolution peuvent être diverses, notamment en fonction des outils mathématiques disponibles selon les élèves. On s'appuiera sur cette diversité pour confronter les différentes propositions des enfants : les étapes du raisonnement ; la possibilité d'effectuer mentalement certains calculs ; la technique écrite nécessitée pour d'autres calculs ; le caractère suffisant, dans certains cas, d'une estimation approchée du résultat.

1-3 – Valider les solutions.

Quand les enfants proposent une solution, ils sont souvent très peu sûrs de sa validité. Il est très important de développer chez eux l'aptitude à prouver ce qu'ils avancent : selon les cas, par une argumentation de type mathématique, par la mise en évidence d'un contre-exemple, ou par la confrontation avec la réalité. On s'efforcera de développer ces différents types de validation, celle-ci devant toujours rester objective, c'est-à-dire ne pas reposer uniquement sur l'approbation ou la parole du maître.

1-4 – Communiquer les démarches et les résultats.

Dans une activité de résolution de problème, il est important que les enfants s'expriment à différents moments du travail et pas seulement lors de la présentation des résultats.

Le travail par groupes est particulièrement propice aux échanges : à l'intérieur du groupe (recherche des informations, choix de la procédure, de la présentation, etc.) ; entre les groupes (communication de pistes de recherche, demande ou apport d'aide) ; au niveau de la classe (explication, confrontation et validation des démarches et des résultats). Ces échanges permettent de faire évoluer l'analyse que les enfants font de la situation et les procédures de résolution qu'ils envisagent de mettre en œuvre. Lors d'un travail individuel, l'échange peut prendre la forme d'un dialogue (entre deux élèves qui confrontent leurs démarches ; entre un élève et le maître, à des fins d'évaluation).

Cette communication (avec ses diverses modalités) est un élément important de l'activité de résolution de problèmes. Elle peut même constituer l'objectif majeur de certaines séquences.

Le maître évitera de stéréotyper la mise en forme de la démarche ou des résultats. La forme doit, au contraire, s'adapter à la situation et à l'interlocuteur, selon les moments ou les activités : part de l'oral et de l'écrit, du langage courant et du langage mathématique ; détail de l'explication ; présentation ; etc.

2 – Ecrire, nommer et comparer les nombres naturels.

L'étude de la numération, entreprise au cycle préparatoire et continuée au cycle élémentaire, a pour objectif au cycle moyen de consolider et d'étendre les connaissances acquises en numération écrite et orale. On pourra faire avec profit le parallèle avec la désignation des durées (numération complexe) qui relève de règles de construction analogues.

2-1 – Systèmes de désignation orale et écrite des nombres.

2-1-1- *Désignations orales.*

Travailler sur un domaine numérique plus vaste ("grands nombres") permet une réflexion qui n'a guère été possible jusqu'alors, sur les règles de construction des noms des nombres, différentes de celles de la numération écrite.

Il suffit de 10 chiffres pour écrire les nombres si grands soient-ils ; il faut beaucoup plus de mots pour les désigner (oralement ou par écrit). On fera observer les différences et les relations entre les deux modes de désignation. Par exemple :

– il y a des mots-clés qui renseignent sur la longueur de l'écriture chiffrée *(le mot "million" rappelle que le nombre écrit en chiffres comporte au moins 7 chiffres)* ;

– traduire le nom des nombres qu'on entend par leur écriture chiffrée (et vice versa) permet de mieux comprendre les correspondances entre les deux systèmes :

Treize millions cinq cent sept mille quatre-vingt douze correspond à :

$(13 \times 1\,000\,000) + ([(5 \times 100) + 7] \times 1\,000) + (4 \times 20) + 12$

ou :

$(13 \times 1\,000\,000) + (507 \times 1\,000) + 92$

ou :

$(13 \times 10^6) + (507 \times 10^3) + 92$,

c'est-à-dire :

$(13 \times 1\,000^2) + (507 \times 1\,000) + 92$

ce qui met en évidence le rôle joué par mille et ses puissances pour l'écriture et la lecture des "grands nombres".

2-1-2- *Désignations écrites.*

L'objectif du cycle moyen est d'assurer chez les enfants une bonne maîtrise du fonctionnement de notre système de numération (positionnel, à base dix). Pour cela le maître proposera :

– des exercices fréquents de changements et d'utilisation de différentes écritures liées :

* au codage décimal des nombres. Exemple :

$$257\,024 = 200\,000 + 50\,000 + 7\,000 + 20 + 4$$
$$= (2 \times 100\,000) + (5 \times 10\,000) + (7 \times 1\,000) + (2 \times 10) + 4$$
$$= (2 \times 10^5) + (5 \times 10^4) + (7 \times 10^3) + (2 \times 10) + 4$$

* à des questions du type : *"combien de dizaines, de centaines, dans un nombre donné ?"*
Exemple : *dans 7 024, il y a 70 centaines car* $7\,024 = (70 \times 100) + 24$.

– des activités conduisant à confronter notre système de numération à d'autres systèmes (numération romaine, numérations complexes, etc.).

2-1-3- *Numérations complexes.*

Cette étude sera conduite avec profit en parallèle avec l'étude de notre numération décimale aussi bien orale qu'écrite.

En numération sexagésimale, la lecture est cohérente avec l'écriture (ex : *3 heures, 24 minutes, 45 secondes est codé 03 24 45 sur les horloges digitales),* ce qui n'est pas toujours le cas dans notre numération. (Exemple : *"3 cent 4 vingt 7" pour 387.).*

Par analogie, on pourra associer à la lecture d'un nombre une écriture telle que :

million	mille	
$\boxed{013}$	$\boxed{507}$	$\boxed{092}$

Les exercices de conversion consolident le rôle joué par la base dans notre système de numération :

Exemple : *2 jours 3 h 8 mn* $\rightarrow (2 \times 24 \times 60) + (3 \times 60) + 8$
2 m 3 dm 8 cm $\rightarrow (2 \times 10 \times 10) + (3 \times 10) + 8$

Il en va de même pour des exercices oraux ou écrits consistant par exemple à :

– *donner la suite des nombres à partir d'un nombre donné, ou la suite des instants de seconde en seconde (minute en minute) à partir d'un instant donné,*

– *compter de 2 en 2, de 5 en 5, ou de 5 secondes en 5 secondes, de 5 minutes en 5 minutes, de 15 secondes en 15 secondes, de 30 minutes en 30 minutes, etc.*

– *compter ou décompter de 10 en 10, de 100 en 100, ou de 60 secondes en 60 secondes, 60 minutes en 60 minutes.*

La reprise de techniques opératoires (addition, soustraction, multiplication : cf. par. 4-1-1-) et les calculs sur les durées, effectués de manière empirique (cf. par. 6-3), seront une nouvelle occasion d'expliciter la structure de notre système de numération.

2-2 – Comparaison de nombres.

En prolongement d'activités abordées au cycle élémentaire, le maître proposera des exercices de comparaison mettant en jeu des écritures additives, soustractives, multiplicatives, portant aussi bien sur les désignations écrites qu'orales et confrontées à la comparaison des désignations complexes. Par exemple :

– *situer des instants, ou des nombres, sur une ligne graduée ou non ;*

– *intercaler un instant, un nombre ;*

– *encadrer un instant, un nombre (en particulier encadrer un nombre naturel par des multiples consécutifs ou des puissances consécutives de dix) ; rechercher la borne la plus proche.*

La comparaison de grands nombres peut s'appuyer sur un rapprochement entre la numération orale et la numération complexe. Exemple :

– *pour comparer 5 h 22 mn 45 s et 3 h 59 s, il suffit de comparer 5 et 3,*

– *pour comparer 18 422 et 5 769 (lorsque ces nombres sont donnés oralement0, il suffit de comparer 18 (mille) et 5 (mille).*

3 – Ecrire, nommer, comparer les nombres décimaux.

3-1 – De nouveaux nombres.

3-1-1- A l'issue du cycle élémentaire, les seuls nombres connus sont les nombres naturels. Diverses situations permettront aux enfants de prendre conscience de la nécessité de disposer d'autres nombres. Ainsi :

3-1-1-1- Certaines relations numériques précédemment étudiées ne sont pas partout définies. Ainsi, la fonction "retrancher 15" dans $\mathbb{N}$ n'est pas définie pour 0, 1, 2 ... 14 ; la fonction "diviser par 100" dans $\mathbb{N}$ n'est pas définie pour 22, pour 1 110, etc.

Pour étendre la définition de ces fonctions, on sera amené à introduire,au collège, de nouveaux nombres (selon le cas : entiers négatifs ou nombres rationnels).

L'ensemble des nombres décimaux, étudié au cycle moyen, est tel que les fonctions "diviser par 10", "diviser par 100", "diviser par 1 000", etc., y sont partout définies.

3-1-1-2- Lorsqu'on veut exprimer la mesure de la longueur d'un objet avec une unité choisie, l'ensemble des nombres naturels est peu satisfaisant, ne permettant pas de transmettre une information précise dans la plupart des cas. (Des objets de longueur nettement différente risquent d'avoir la même mesure : "entre 7 et 8" par exemple).

3-1-1-3- Il est utile de représenter l'ensemble des nombres naturels à l'aide de points d'une droite graduée. Mais de nombreux points ne correspondent à aucun nombre naturel. On peut chercher à affecter un nombre à d'autres points de la droite ; par exemple : *au milieu du segment défini par le "point 102" et le "point 103".*

3-1-1-4- Certaines situations de partage amènent à prendre conscience de l'insuffisance des nombres naturels *(exemple : partager 8 en 5 ou 1 en 3)* ce qui conduit à introduire des fractions. L'étude des nombres décimaux apparaît alors comme celle des nombres qui :

– peuvent s'écrire sous la forme de fractions décimales $\left(\frac{8}{5} = \frac{16}{10} = 1{,}6\right)$

– permettront, ultérieurement, d'approcher par encadrement d'autres fractions

$$\left(0{,}3 < \frac{1}{3} < 0{,}4 \quad \text{ou} \quad 0{,}33 < \frac{1}{3} < 0{,}34, \text{ etc.}\right).$$

3-1-2- Les maîtres choisiront celle (ou celles) de ces situations qui leur paraissent aider le mieux à prendre conscience de la nécessité d'introduire de nouveaux nombres. Ces situations ne sont pas équivalentes car elles privilégient plus ou moins tel ou tel aspect de l'étude des nombres décimaux : il conviendra de s'assurer qu'aucun des objectifs n'a finalement été négligé.

Certes, l'ensemble des décimaux ne permet pas de décrire ou traduire toutes les situations auxquelles les enfants sont susceptibles d'être confrontés. Il permet cependant d'approcher d'aussi près qu'on le veut les nombres (non décimaux) qui interviennent alors.

3-1-3- En même temps que de nouveaux nombres sont introduits, il faut les désigner, par écrit et oralement, les organiser en prolongeant l'ordre et les opérations connues dans l'ensemble des nombres naturels : ainsi $3{,}23 < 4{,}4$; $8{,}06 < 9$; $1{,}07 + 23{,}4$; $18{,}2 - 13{,}05$; $3{,}2 \times 7$; $4{,}5 \times 0{,}13$ ont alors un sens.

Le mode d'introduction retenu pour les nombres décimaux détermine en grande partie le choix des situations conduisant à ces prolongements. Les différentes rubliques (désignation, ordre, opérations) ne peuvent être séparées dans la progression pédagogique. (Par exemple, les désignations des nombres décimaux évoluent au fur et à mesure que la connaissance de l'ordre et des opérations s'enrichit.).

3-1-4- L'objectif assigné au cycle moyen concerne essentiellement les nombres décimaux. Cependant, à l'issue de l'école élémentaire, les enfants doivent connaître un certain nombre de fractions simples :

– celles-ci ont pu être rencontrées lors de l'introduction de nouveaux nombres (cf. par. 3-1-4-4-) ;

– une phrase telle que *"j'ai pris les trois-quarts des quantités indiquées"*, acquerra sa signification grâce à l'utilisation des fonctions numériques et de leurs composés (cf. par. 5) ;

– les indications $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{10}$ portées sur un verre mesureur ont le même statut que l'indication 1 (écritures de nombres qui permettent d'exprimer la mesure d'une quantité de liquide, le litre étant pris pour unité).

Les enfants doivent connaître la signification de ces fractions simples et savoir les situer par rapport aux nombres décimaux. Les désignations usuelles de "l'heure" fourniront à ce sujet un champ d'investigation important.

3-2 – Ecrire et lire les nombres décimaux.

Il est important que les enfants connaissent de nombreuses écritures des nombres décimaux. Par exemple :

7,23 ; 7,230 ; 07,23 ; 7 + 0,23 ; 7 + 0,2 + 0,03 ;

7 + (2 X 0,1) + (3 X 0,01) ;

éventuellement :

$$8 - 0{,}77 \ ; \ 10 - 2{,}77 \ ; \ 7 + \frac{2}{10} + \frac{3}{100} \ ; \ 7 + \frac{23}{100} \ ; \ \frac{723}{100}$$

ces écritures désignant toujours le même nombre.

Elles évoquent des aspects particuliers de la connaissance de ces nombres, ce qui prolonge les activités du cycle élémentaire concernant les nombres naturels. L'écriture 7 + 0,23 qui isole la partie entière de la partie décimale est particulièrement importante dans les calculs.

De la même façon, plusieurs lectures sont possibles. On peut dire tout simplement : *"sept virgule vingt-trois" ; "zéro virgule zéro douze" ; "cinq virgule zéro, zéro, zéro trois".* On peut aussi se servir de la numération décimale pour nommer les nombres : *"7 unités 23 centièmes" ou "7 unités 2 dixièmes 3 centièmes" ; "zéro unité douze millièmes"* ou simplement *"douze millièmes" ; "5 unités 3 dix millièmes".* (Ces dernières lectures vont de pair avec une bonne compréhension des décimaux et de leurs écritures, elles diminuent les risques d'erreur.).

3-3 – Comparer les nombres décimaux.

L'un des aspects le plus neuf et le plus important de cet ensemble de nombres est la façon dont il est ordonné.

Entre deux nombres décimaux, il y en a toujours une infinité d'autres. Les réflexes acquis à propos des nombres naturels ne conviennent plus :

– *7,013 a une écriture plus longue que 7,3 et désigne néanmoins un nombre plus petit ;*

– *on peut trouver le nombre qui est juste avant 109 dans l'ensemble des nombres naturels tandis que ce problème n'a plus de signification dans l'ensemble des nombres décimaux.*

– les lectures usuelles aussi peuvent être sources d'erreurs : *"dix-sept virgule trois" est un nombre plus grand que "dix-sept virgule douze".*

Un travail approfondi doit donc être fait sur l'ordre de grandeurs des nombres décimaux. Ainsi :

7,013 est entre 7,01 et 7,02 ;

entre 7 et 7,1 mais beaucoup plus près de 7 ;
un tout petit peu plus grand que 7.

7,3 est entre 7 et 7 et demi, plus près de 7,5 que de 7.

Ces commentaires peuvent s'accompagner d'une représentation par les points d'une droite graduée où des graduations de plus en plus fines permettent de localiser des nombres très divers. Pour intercaler des nombres entre *7,05 et 7,06* par exemple, les enfants doivent passer sur une graduation plus fine, ce qui se traduit par un allongement des écritures.

3-4 – Utiliser les nombres décimaux.

Au-delà des situations d'introduction, les enfants devront savoir reconnaître et traduire des situations faisant intervenir des écritures telles que $a + b$, $a \times b$, $a - b$ et des phrases telles que $a < b$ lorsque a et b désignent des nombres décimaux.

L'étude de telles situations, très diverses, est l'occasion de mettre en œuvre l'ensemble des connaissances concernant les nombres décimaux, mais aussi d'en renforcer, voire d'en élargir, la signification.

Dès le cycle élémentaire, avant l'étude des décimaux, les enfants ont fréquenté des écritures à virgule, notamment dans des situations problèmes *(3,50 F ; 12,50 m)*. Ils les interprètent initialement comme des écritures complexes *(3 francs et 50 centimes ; 12 mètres et 50 centimètres)*. Il convient d'assurer la liaison entre ces écritures et les nombres décimaux.

Connaître les nombres décimaux n'interdit pas, dans certaines situations, d'utiliser des désignations complexes qui renvoient à un sens pratique : *"deux kilogrammes quatre cent cinquante"* plutôt que *"deux kilogrammes quarante-cinq"*. Cependant, s'il s'agit d'effectuer un calcul, on travaillera avec l'écriture *2,45* (de même que pour facturer un temps de réparation, un garagiste remplace *2 h 45 mn par 2,75)*.

4 – Calculer sur les nombres.

Calculer sur les nombres, ce n'est pas seulement obtenir un résultat exact ou approché. Ce peut être aussi remplacer un calcul par un autre. *Par exemple, pour calculer* 157×49, *on peut déterminer 7 693, par écrit ou mentalement, en posant l'opération ou en remplaçant* 157×49 *par* $(157 \times 50) - 157$ *ou encore, prévoir que ce produit est proche de* $160 \times 50 = 8\,000$.

Les diverses procédures sont le plus souvent intimement liées. Par exemple, lorsqu'on effectue par écrit une division posée, calcul approché (estimation du nombre de chiffres du quotient,recherche de chacun de ces chiffres, etc.) et calcul exact interviennent alternativement. De même tout calcul mental peut s'accompagner de traces écrites et tout calcul écrit utilise des phases de calcul mental. Il convient donc de ne pas donner un sens restrictif à ces expressions bien qu'il soit nécessaire d'envisager des exercices spécifiques de calcul mental ou de calcul écrit.

Pour le calcul écrit comme pour le calcul mental, les séquences pédagogiques viseront suivant les cas, l'élaboration ou l'explication de techniques, l'entretien systématique de techniques déjà mises en place ou leur réinvestissement.

4-1 – Calcul écrit.

4-1-1- *Addition, multiplication, soustraction des nombres naturels ou décimaux.*

Au cycle élémentaire, des techniques ont été mises en place pour les nombres naturels. Au cycle moyen, il convient de faire réfléchir sur ces techniques et de prévoir des exercices d'entretien. (La technique mise en jeu n'est pas nécessairement la même pour tous les enfants.). D'autre part, il est nécessaire d'assurer et de consolider, pour ces opérations, la mémorisation des résultats élémentaires (que les enfants peuvent organiser, par exemple, en tables de Pythagore).

– Pour l'addition et la soustraction, l'extension du sens de ces opérations au cas des nombres décimaux, ainsi que les aménagements correspondants des techniques ne posent pas de gros problèmes. Il en est de même pour la multiplication d'un décimal par un naturel, qui peut être interprétée comme une addition particulière.

– L'étude de la multiplication de deux nombres décimaux débutera par la recherche de situations où, a et b étant décimaux, l'expression $a \times b$ ait une signification (la vie courante, les achats de matériaux divers en fournissent à volonté). Ce travail précédera dans tous les cas l'étude du prolongement de la technique de la multiplication qui en est directement dépendante et ne doit surtout pas se limiter à la mise en place d'un mécanisme aveugle.

– Certains calculs écrits doivent pouvoir être effectués en ligne. Par exemple : *347 + 1 271 ; 585 × 7 000 ; 286 × 0,3 ; 44 – 7,2.* Il convient de ne pas négliger la pratique des procédures de calcul mental mises ainsi en jeu.

4-1-2- *Division.*

L'étude de la division est l'occasion d'une réorganisation des acquis sur l'addition, la multiplication, la soustraction et l'ordre des nombres : la mise en place des techniques nécessite l'utilisation combinée de ces acquis.

C'est en faisant évoluer des techniques intermédiaires, dont certaines ont déjà été découvertes au CE 2, que l'on accédera à des techniques codifiées qui devront être ensuite parfaitement maîtrisées par les enfants. La progression ne repose pas alors sur un allongement progressif des écritures des diviseurs (d'abord à un chiffre, puis à deux chiffres, etc.), mais sur une recherche de procédures de plus en plus économiques.

On étudiera d'abord la division euclidienne (détermination du quotient à une unité près et du reste) dans l'ensemble des nombres naturels, puis on prolongera cette étude à l'ensemble des nombres décimaux.

4-1-2-1- *Division euclidienne dans $\mathbb{N}$.*

Dans l'étude de situations appropriées, les enfants mettent en œuvre des techniques empiriques variées :

– recherche d'encadrements du dividende par deux multiples du diviseur, encadrements de plus en plus fins jusqu'à trouver l'encadrement minimum
(exemple : $70 \times 8 < 623 < 80 \times 8$ ...... $77 \times 8 < 623 < 78 \times 8$) ;

– recherche de multiples du diviseur, de plus en plus grands jusqu'à atteindre celui qui est immédiatement inférieur au dividende ;
– recherche du reste en retranchant successivement du dividende le diviseur ou des multiples du diviseur.

Ces diverses procédures, souvent utilisées simultanément par les enfants d'une même classe, conduiront à la mise en place de techniques mentales de calcul du quotient et du reste, à des techniques écrites en ligne et à la technique habituelle dès lors que l'on souhaite économiser les calculs et les disposer efficacement.

Pour la division comme pour les autres opérations, on n'est pas toujours tenu de poser l'opération. Par exemple, *pour diviser 948 par 70, on peut écrire :*

$$948 = 700 + 248 = 700 + 210 + 38$$
$$= (70 \times 10) + (70 \times 3) + 38$$

d'où l'on déduit, par simple lecture, que *le quotient est 10 + 3 = 13 et le reste 38.*

Ce calcul en ligne exige, outre la compréhension de ce que veut dire "diviser", que l'on sache trouver mentalement des multiples d'un nombre, et la différence entre deux nombres. Cette technique permet de déterminer rapidement le reste de la division d'un nombre quel qu'il soit par un nombre tel que *8 ; 70 ; 300.* Les élèves seront invités à l'utiliser toutes les fois que la situation le permet.

Remarque : Il est d'usage d'exiger des enfants qu'ils ne posent pas les soustractions successives. Or cette pratique nécessite un entraînement spécifique important sans apporter d'économie de temps : elle surcharge inutilement la mémoire, risque de masquer le processus de soustractions successives et rend plus difficile la localisation d'une erreur éventuelle. Il apparaît donc souhaitable de laisser poser les soustractions aux enfants tant que la nécessité s'en fait sentir.

4-1-2-2- *Prolongement à ID de la division.*

Ce prolongement suppose différentes étapes.

L'une d'entre elles consiste à obtenir un quotient décimal dans la division de deux entiers naturels. Nombreuses sont les situations qui requièrent un résultat de cette nature et à partir desquelles engager la recherche de procédures appropriées. Il doit s'agir essentiellement de prolongements – qui doivent être justifiés – des techniques antérieurement maîtrisées.

La division de deux nombres décimaux ne fera pas l'objet d'un travail systématique au cycle moyen. Cependant dans des situations où elle est rendue nécessaire, il sera demandé aux élèves de tenter de construire et de justifier des procédures conduisant à l'obtention d'un résultat. Une activité préalable, pour faciliter l'élaboration d'un certain type de procédure, consiste (notamment en liaison avec certaines des activités proposées au par. 5) en la recherche de couples dividende-diviseur conduisant au même quotient. Par exemple, *les quotients de 12 par 5, de 24 par 10, de 36 par 15, de 3,6 par 1,5 sont égaux.*

4-2 – Calcul mental.

4-2-1- L'objectif du calcul mental est que les enfants soient capables d'effectuer toute une gamme de calculs, sans pour autant qu'ils aient appris à associer de façon stéréotypée une méthode donnée à un type de calcul donné.

4-2-2- Les *séances quotidiennes* de calcul mental prendront des formes variées ; la consigne peut être écrite ou orale ; l'exercice peut, ou non, se référer à des situations (vécues ou évoquées) ; les enfants peuvent avoir le droit d'écrire des résultats intermédiaires, ou pas.

Selon la forme adoptée, les exercices sollicitent des types d'attention et de mémoire différents dont il convient de ne négliger aucun.

L'explicitation des différentes démarches sera plus ou moins développée suivant l'objectif assigné à la séance : élaboration ou entretien. Un enfant doit pouvoir rendre compte de sa démarche, la communication étant éventuellement facilitée par diverses représentations, par des écritures avec parenthèses, par des arbres de calcul, etc.

La discussion des diverses méthodes employées n'a pas pour but de valoriser l'une d'entre elles : il n'y a pas *une* bonne méthode pour un exercice donné, l'appréciation variant en fonction de l'exemple précis et, pour chaque enfant, des outils mathématiques disponibles au moment où l'exercice est proposé. Dans cette phase d'explication et de confrontation, chaque enfant pourra choisir les procédures qui lui paraissent les plus adaptées pour lui.

4-3 – Calcul approché.

Le calcul approché doit faire l'objet d'un apprentissage spécifique, quels que soient les objectifs qu'on lui assigne : estimation d'un résultat avant, après ou sans avoir effectué une opération ; évaluation d'une dépense ou d'une consommation en situation vécue ou évoquée, etc.

4-3-1- Sa mise en œuvre requiert des aptitudes particulières : entre autres, savoir choisir les nombres à substituer à ceux qui interviennent dans le calcul. Ce choix s'appuie sur une bonne connaissance, notamment du lien entre opérations et ordre, qui permet d'apprécier, en anticipant, la simplicité des calculs à effectuer sur les nouveaux nombres retenus : le choix d'un "voisin" d'un nombre n'est pas seulement lié à ce nombre, mais aussi au calcul à effectuer.

Par exemple, le nombre qu'on substituera à 1 258 ne sera pas le même selon que l'on veut estimer :

– la somme de 1 258 et 27 812 ;

– celle de 1 258 et 37 ;

– ou le produit de 1 258 par 12, etc.

4-3-2- Les exercices systématiques de calcul approché seront l'occasion de faire expliciter oralement ou par écrit, comparer et apprécier, par les enfants eux-mêmes, les différentes procédures qu'ils ont utilisées et les solutions qu'ils proposent, cela dans le même esprit que pour les problèmes (cf. par. 1-4-) et le calcul mental (cf. par. 4-2-2-).

4-3-3- *Calcul approché et calcul exact.*

Il ne suffit pas de savoir effectuer un calcul, il est essentiel de pouvoir en contrôler la vraisemblance. Les "preuves" habituellement utilisées ne permettent pas d'atteindre cet objectif. Contrôler la vraisemblance du résultat d'une opération, c'est surtout évaluer l'ordre de grandeur de ce résultat. Cette évaluation est l'occasion de mettre en œuvre des procédures mentales de calcul approché.

En particulier, pour les calculs portant sur les nombres décimaux, cette évaluation se ramène le plus souvent à un calcul sur des nombres naturels choisis convenablement. Par exemple :

731,42 + 58,07 devra avoir un résultat voisin de 790 (730 + 60) ou de 800 (700 + 100),

8,37 × 21,2 aura un résultat voisin de 168 (8 × 21) ou de 160 (8 × 20),

0,072 × 3,8 aura un résultat voisin de 0,28 (0,07 × 4 = 28 × 0,01)
ou plus petit que 0,38 (0,1 × 3,8).

4-4 – Calcul numérique et problèmes.

Dans la résolution d'un problème, chaque enfant ayant déterminé les calculs à effectuer choisira, pour ce faire, la ou les procédures – mentales et/ou écrites – en rapport avec ses connaissances. Les différentes procédures employées – en ce qui concerne les démarches de résolution et les modalités de calcul – pourront être explicitées et confrontées (cf. par. 1-4- – 4-1-2- et 4-3-2-).

5 – Représenter et utiliser des fonctions numériques.

5-1 – De nombreuses situations rencontrées en classe ou hors de la classe, et en particulier au cours des activités d'éveil, conduisent à constater et à expliciter une correspondance entre deux ensembles de données numériques (par exemple : *achat d'articles à l'unité, à la longueur, au poids, etc. ; masse et volume ; compteur de pompe à essence ; tarif d'une course en taxi ; affranchissement postal, etc.).*

L'analyse de telles situations et la résolution des problèmes qu'elles posent (qui appelle le plus souvent la détermination de nouvelles données numériques) peuvent être conduites grâce à l'utilisation de représentations et/ou de propriétés de certaines fonctions numériques. On se contentera, avec les élèves du cycle moyen, de faire découvrir et exploiter, sur des exemples variés et adaptés, de telles représentations et propriétés : il ne peut, certes, s'agir que d'une première approche de la notion de fonction numérique dont l'étude théorique plus formelle relève en effet de l'enseignement du second degré.

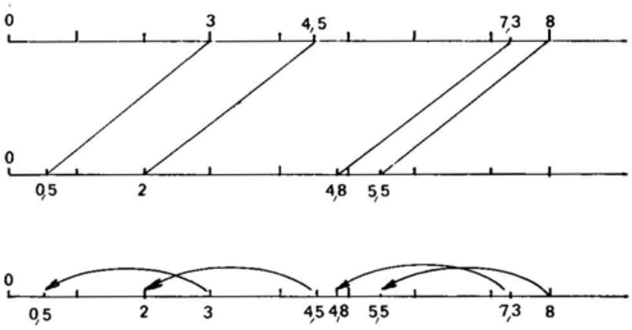
5-2 – Ainsi, à partir de situations aussi variées que possible, les élèves seront amenés à :

5-2-1- Représenter ces situations sous différentes formes (tableaux de nombres, graphiques, etc.) ou, à l'inverse, interpréter et exploiter de telles représentations, et, pour ce faire, identifier les couples d'éléments associés, la fonction numérique étant ainsi perçue comme une famille de tels couples.

Par exemple :

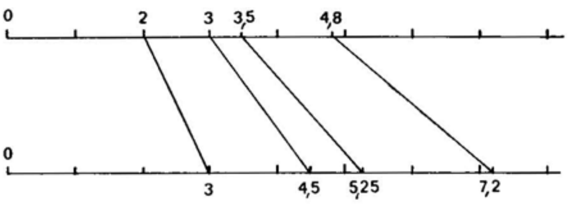
3	4,5	7,3	8
0,5	2	4,8	5,5

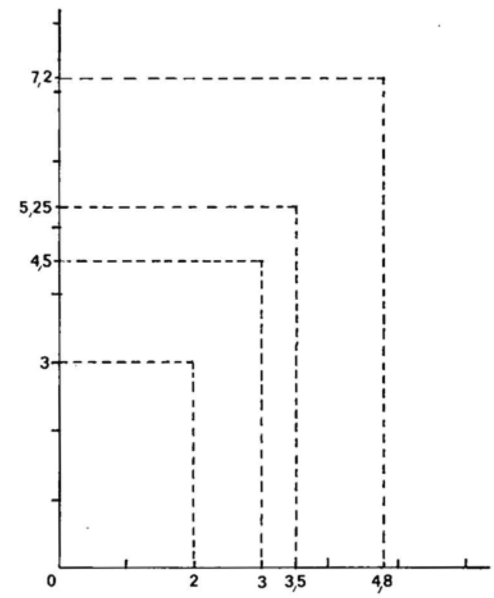
(3;0,5) (4,5;2) (7,3;4,8) (8;5,5)



2	3	3,5	4,8
3	4,5	5,25	7,2

(2;3) (3;4,5) (3,5;5,25) (4,8;7,2)





Si certaines représentations sont privilégiées dans l'enseignement des mathématiques (tableaux, diagrammes, graphiques ...), il est important que les élèves aient interprété et élaboré d'autres modes de représentations rencontrées en activités d'éveil et dans l'environnement (histogrammes, portions de disques, formulaires, etc.).

5-2-2- Reconnaître, à propos d'une situation donnée, la fonction mise en jeu et l'exploiter pour résoudre certains des problèmes posés par cette situation.

5-2-3- Désigner certaines des fonctions rencontrées. On pourra utiliser des notations du type :

aj. 3		$n \rightarrow n + 3$
mult. 15		$n \rightarrow n \times 1{,}5$
ret. 2,5	*ou*	$n \rightarrow n - 2{,}5$
div. 4		$n \rightarrow n : 4$

le dernier type étant finalement privilégié, et pouvant même donner lieu à une notation telle que :

$$n \rightarrow (n \times 1{,}35) + 5$$

pour désigner par exemple, la fonction qui correspond au tarif d'une course en taxi (compte-tenu de la valeur constante de la prise en charge), ou encore au poids total d'un récipient contenant un volume variable de liquide.

5-3 – Dans des situations constituant des exemples et des contre-exemples :

5-3-1- On retrouvera les propriétés liées à l'ordre ou celles liées aux écarts, déjà rencontrées au cycle élémentaire à propos des nombres naturels ;

5-3-2- On s'attachera à mettre en évidence et à utiliser *la proportionnalité*, propriété caractéristiques des fonctions $n \rightarrow n \times a$, a étant un naturel ou un décimal, voire une fraction simple.

Ainsi, dans le tableau suivant, résultant par exemple de l'analyse d'une situation, la proportionnalité est vérifiée :

2	2,5	4	4,5	7	8	9
5	6,25	10	11,25	17,5	20	22,5

On remarque en effet que :

– *si à 2 correspond 5*
et à 2,5 correspond 6,25 $\Big\}$ *alors à (2 + 2,5) correspond (5 + 6,25)*

– *si à 4,5 correspond 11,25 , alors à (2 × 4,5) correspond (2 × 11,25)*

Dès lors, en utilisant ces propriétés, on peut trouver le nombre :

– qui correspond à 5 : *2 × 6,25 correspondant à 2 × 2,5*
ou 17,5 – 5, correspondant à 7 – 2

– qui correspond à 14 : *2 × 17,5 correspondant à 2 × 7,*
ou (3 × 10) + 5, correspondant à (3 × 4) + 2,

etc.

De telles propriétés seront utilisées, par exemple pour compléter un tableau, sans qu'il soit nécessaire de déterminer, ni de désigner la fonction mise en jeu (ou encore le coefficient de proportionnalité). Elles ne sauraient être étudiées pour elles-mêmes : elles seront découvertes et utilisées, sans formalisation, lors de l'étude de situations appropriées. Elles interviennent dans l'analyse et la résolution de problèmes d'échelle, de conversion, de pourcentage, etc ... et plus généralement des problèmes résolus autrefois par la règle de trois.

5-3-3- Il importe toutefois que les élèves sachent reconnaître l'existence de la proportionnalité, et ceci bien qu'en général un seul couple de nombres leur soit fourni. *Par exemple : "2 cm sur la carte représentent 2,5 km sur le terrain. Quelle est la distance qui, sur le terrain, correspond à 6 cm sur la carte ?".*

Des expériences préalables ont dû permettre de constater que les distances sur le terrain et sur la carte sont proportionnelles. Les élèves peuvent alors déterminer que :

– *le correspondant de* $6 = 2 \times 3$ *(en cm) est de* $2,5 \times 3$ *(en km)*

sans qu'il soit nécessaire d'expliciter le coefficient de proportionnalité (en l'occurrence "l'échelle").

Ainsi, c'est le plus souvent l'analyse de la situation qui permet à l'élève de reconnaître l'existence ou non de la proportionnalité.

5-4 – La composition des fonctions numériques ne fera pas non plus l'objet d'une étude systématique.

Elle pourra être envisagée à l'occasion de certaines résolutions de problèmes. (Exemple : *"prendre les* $\frac{3}{15}$ *").* On devra alors constater que les résultats ne sont pas toujours indépendants de l'ordre des calculs : *tous les nombres qui ont une image par "mult. 3 suivi de div. 15" n'en ont pas nécessairement par "div. 15 suivi de mult. 3".*

Elle peut également permettre d'enrichir ou d'expliciter certaines procédures de calcul mental *(par exemple, pour multiplier par 2,5 on peut multiplier par 10 puis diviser par 4),* ou favoriser l'explication de certains calculs sur les nombres décimaux *(ainsi, "mult. 3,761" revient à composer "mult. 3 761" et "div. 1 000").*

6 – Mesurer.

6-1 – Les activités de mesurage à l'école élémentaire ont pour objectif essentiel de développer chez les élèves la capacité à résoudre des problèmes pratiques liés à la mesure, tels que de nombreuses situations de la vie courante, en classe ou hors de la classe, en offrent l'occasion. Les activités d'éveil, plus spécialement celles relevant des sciences expérimentales et des activités manuelles, constituent à ce propos un domaine privilégié à exploiter très largement.

Elles se développent selon deux directions conjointes :

– dégager les notions de grandeur et de mesure d'une grandeur,
– utiliser les instruments de mesure (ou de repérage).

D'une façon générale, et quelle que soit la grandeur considérée, trois types d'activités sont à envisager à cet effet :

– des comparaisons conduisant à des classements (constitution de classes d'objets ayant même longueur, ou même masse, etc.) et à des rangements (réalisation de séries ordonnées). Ces comparaisons, qui peuvent être antérieures à l'utilisation d'instruments de mesure seront, selon les situations et/ou la grandeur concernée, directes *(superposition de baguettes, par exemple, pour les longueurs)*, ou indirectes, (recours à un intermédiaire : *réglette graduée pour les longueurs ou allongement d'un ressort pour les masses, par exemple).*

– la désignation de différentes mesures de cette grandeur (c'est-à-dire l'expression des résultats de ces mesures). A partir des classements et rangements précédents, les élèves sont conduits à définir un "étalon" (unité d'abord choisie arbitrairement, puis unité du système légal), et, ainsi, à faire correspondre un nombre à chacune des différentes classes d'objets constituées. Les activités de codage et de décodage, à propos de multiples situations variées, familiarisent alors progressivement les élèves avec l'utilisation et la structure du système légal de mesure relatif à la grandeur considérée.

– "l'addition" de grandeurs. Il s'agit d'activités opératoires consistant, *par exemple, à mettre bout à bout des réglettes,* ce qui conduit à définir une nouvelle longueur dont la désignation est la somme des nombres exprimant respectivement la longueur de chacune des réglettes. De même on peut *regrouper des objets sur le plateau d'une balance, juxtaposer des surfaces, accoler des volumes ou transvaser les contenus de plusieurs récipients dans un seul, etc.*

L'ordre dans lequel sont présentés les trois points ci-dessus, à travailler pour chaque grandeur étudiée, ne définit pas strictement une progression pédagogique : les activités correspondant à chacun d'eux, ainsi que les connaissances qu'elles visent à promouvoir, s'appuient et s'enrichissent mutuellement. Elles doivent permettre une première prise de conscience de la notion de grandeurs mesurables, celles pour lesquelles on sait définir sur les objets une opération induisant une addition sur les nombres qui expriment leur mesure. (Les grandeurs pour lesquelles on ne sait pas définir une telle opération sont des grandeurs "repérables" ; exemple : *les températures.).*

Au cycle élémentaire, on a classé et rangé des objets selon la longueur ou la masse. Le passage à la désignation n'a été que partiel et les activités "d'addition" sont restées limitées.

Au cycle moyen, on introduit des grandeurs nouvelles (durées, angles, aires, volumes) ; les désignations s'enrichissent par la pratique des nouvelles unités correspondantes et par l'usage des nombres décimaux, ce qui permet d'effectuer de multiples calculs.

Les situations de mesure constituent l'un des moyens d'introduire les nombres décimaux au cycle moyen (cf. par. 3-1-1-2-) : passage de 2 m 5 dm 3 cm à 2 m 53 cm puis à 2,53 m, la place de la virgule correspondant à l'unité choisie. On souhaite parvenir à donner une signification globale à 2,53 (du genre : *"un peu plus de deux et demi"*), de telle façon que 2,53 m^3 ait une signification aussi accessible que 2,53 m, bien que ni le 5, ni le 3 ne correspondent à une unité du système légal des mesures de volume.

Ainsi, les activités de mesure constituent, au confluent des activités d'éveil et des mathématiques, un domaine privilégié pour munir les enfants d'outils mathématiques efficaces.

6-2 – Longueurs et masses.

Les longueurs et les masses, déjà étudiées au cycle élémentaire, sont, surtout les longueurs, les grandeurs mesurables les plus familières aux élèves. En s'appuyant sur la connaissance que ceux-ci en ont, qui reste à consolider et à enrichir, on abordera notamment trois types de problèmes qui offrent, en outre, l'occasion d'un premier niveau de réflexion sur l'application des mathématiques au domaine expérimental :

– problème de la construction du système légal de mesure et prise de conscience des caractéristiques liées à la numération décimale (rôle des puissances de dix);
– problème de la possibilité de mesurer ce qui dépasse le champ d'expérience des enfants : en s'appuyant sur les propriétés du système décimal et à partir d'exemples significatifs (dont divers documents ou les mass media se font l'écho), on pourra tenter une approche de l'idée de la mesure du "très petit" ou du "très grand" ;
– problème de la précision d'une mesure ; il se pose par rapport à l'instrument utilisé et à la manipulation (*mesure au centimètre près, par exemple*, – ce qui peut conduire à retrouver des démarches d'encadrement pratiquées à propos de l'étude des nombres; il se pose aussi par rapport à la signification du résultat d'un calcul (*par exemple, dans 33 : 8 = 4,125, si le résultat exprime une mesure, les décimales risquent, selon la situation considérée et l'unité utilisée, de n'avoir guère de signification pratique*).

6-3 – Durée.

La comparaison directe des durées (par exemple de deux événements) n'est possible que dans des cas particuliers (événements simultanés, intervalles de temps emboîtés).

Pour la comparaison indirecte, on est amené à utiliser les instruments de mesure (montre, horloge, compte-minutes, sablier, métronome ...).

Pour désigner une durée, on utilise le plus souvent un système à unités multiples et donc on n'emploie pas les nombres décimaux. Cependant l'utilisation des décimaux peut intervenir dans la désignation de durées très courtes (1/10 ou 1/100 de seconde), dans les tarifications horaires (1,75 h pour 1 h 45 mn), ou dans des situations qui requièrent l'usage de calculatrices.

La réflexion sur le système de désignation des durées et les opérations correspondantes permettent ainsi un approfondissement des connaissances sur la numération et sur les techniques opératoires. (cf. par. 2.).

6-4 – Angles.

Comme pour les longueurs de segments, la comparaison globale perceptive des angles est facile. Les élèves seront appelés à utiliser des techniques comme la superposition, le calque, le report de figures obtenues par découpage ou pliage, l'utilisation de gabarit, etc.

On se contentera d'activités de comparaison pour les angles : l'usage du rapporteur ne correspond donc pas à un objectif du cycle moyen.

6-5 – Aires et volumes.

Pour accéder au concept d'aire, les enfants devront avoir des occasions de vérifier que le découpage et le recollage d'une surface en une surface d'une autre forme laissent une grandeur invariante. De même, pour accéder au concept de volume, ils devront avoir des occasions de constater la conservation des quantités continues par déformation.

La comparaison directe de surfaces par superposition est rarement possible. Il faudra souvent recourir soit à des découpages et recollages, soit à des pavages (sans se limiter à l'utilisation de quadrillages à mailles carrées). Pour les volumes, la comparaison directe est, là encore, difficile, sauf le cas du volume intérieur d'un récipient (capacité) pour lequel on peut procéder par transvasement. Cette opération n'est d'ailleurs probante qu'à condition de maîtriser la conservation de la quantité par modification de la forme. La comparaison indirecte peut s'effectuer notamment par pavage spatial (à l'aide de cubes, de pavés) ou par l'intermédiaire d'une autre grandeur liée au volume *(exemple : masse pour des objets homogènes constitués du même matériau ; hauteur de liquide après immersion pour des objets insolubles).*

Dans les situations les plus usuelles, une aire ou un volume se déterminent par calcul, ce qui suppose une connaissance suffisante des systèmes de désignation propres à ces grandeurs.

Pour désigner les aires et les volumes, on pourra avoir recours à des unités conventionnelles (par exemple : *un verre, une cuillère à soupe ...*), avant de recourir aux unités du système légal. L'étude de ces dernières sera conduite en faisant apparaître les liens qu'entretiennent entre elles les unités de longueur, d'aire et de volume, ce qui souligne l'intérêt du système métrique.

Plus que la connaissance d'un certain nombre de formules permettant de déterminer l'aire ou le volume d'objets particuliers, le maître cherchera à développer chez les élèves la capacité de relier entre elles ces formules, ou d'en extraire des informations qui ne sont pas directement perceptibles sur les objets eux-mêmes. Ainsi les enfants seront amenés à construire les formules correspondant au rectangle, au triangle et au pavé droit ; ils devront savoir les utiliser pour résoudre des problèmes portant sur d'autres figures (aire du parallélogramme, par exemple). D'autres types d'exercices consisteront, par exemple, à demander aux élèves de construire, à partir de la formule d'aire du triangle, des triangles ayant la même aire qu'un triangle donné.

Par ailleurs, les enfants devront savoir se servir d'un formulaire et utiliser ainsi des formules qu'ils n'ont pas élaborées et *qu'ils n'ont pas à mémoriser.*

7 – Activités géométriques.

Au cycle moyen, les activités géométriques visent à atteindre différents objectifs, chaque activité relevant en général de plusieurs de ces objectifs. Par ailleurs, ceux-ci ne sont pas hiérarchisés ; leur ordre de présentation ne constitue, en aucun cas, une progression.

7-1 — Objectifs des activités géométriques.

Grâce à ces activités, il s'agit :

– d'abord, comme au cycle élémentaire, de permettre aux enfants d'accumuler des expériences conduisant à la maîtrise de certains "savoir-faire" ;

– en outre, par une réflexion sur ces expériences, de conduire à un premier niveau d'abstraction, c'est-à-dire à la production de "langages" qui permettent, sans recourir à des définitions formelles, de communiquer et de justifier une action ou une suite d'actions incluses dans une activité géométrique.

7-1-1- Ces activités seront menées à propos *d'objets géométriques* variés. On ne partira pas d'objets géométriques "simples" (point, ligne, surface) mais d'objets physiques : c'est le point de vue sous lequel on les considère qui leur donne un statut d'objet géométrique, lequel peut varier pour un même objet.

Ainsi, une porte est :

– *un objet physique auquel on peut s'intéresser du point de vue de matériau, du sens de l'ouverture, etc.*

– *un objet géométrique :*
  * *rectangle si l'on s'intéresse à sa forme (longueur et parallélisme des côtés, angles droits) ou à son aire (pour le peindre par exemple).*
  * *parallélépipède si l'on s'intéresse au volume du matériau, etc.*

Les activités géométriques peuvent concerner la reproduction, la description, la représentation ou la construction d'un objet :

– *reproduire* un objet dont les élèves disposent, c'est en réaliser une copie conforme.

– *décrire* un objet, (sous l'angle géométrique) c'est communiquer des formulations de nature géométrique permettant de l'identifier, de le reproduire ou de le représenter.

– *représenter* un objet, c'est le décrire, mais à l'aide de procédés conventionnels (oraux, écrits ou graphiques). Ces procédés évoluent avec le niveau des élèves et peuvent être divers, chacun prenant en compte certaines prorpiétés et en négligeant d'autres.

– *construire* un objet est différent de le reproduire car les élèves partent alors d'une représentation ou d'une description et non de l'objet lui-même.

Dans tous les cas, une phase importante du travail est sa validation. Une description ou une représentation sont valides quand elles permettent de construire l'objet, la représentation devant en outre respecter les conventions établies. Valider une construction, à partir d'une description ou d'une représentation, suppose qu'on vérifie que l'objet construit répond aux caractéristiques décrites ou représentées. L'utilisation et/ou l'élaboration de moyens conventionnels de communication doivent viser à réduire la part de subjectivité que risque de présenter la validation.

7-1-2- Ces activités peuvent également concerner *des actions sur des objets géométriques.* Il ne s'agit pas ici de faire une étude formelle de quelques transformations ponctuelles "simples" (translation, homothétie, symétrie, rotation ...) mais de pratiquer, sur des objets géométriques divers des déplacements, des agrandissements, des réductions, des déformations ... A partir d'une réflexion sur ces actions et leurs effets, on caractérisera quelques transformations par leurs invariants et leurs propriétés, ce qui les rendra susceptibles d'une utilisation plus générale.

Par exemple, les élèves peuvent d'abord réaliser les figures symétriques de figures données (par pliage, décalquage, etc.). La comparaison de la figure initiale et de la figure symétrique associée les conduit à découvrir la conservation de toutes les mesures (côtés, angles, aire) et le changement d'orientation. Ils peuvent alors s'aider de ces découvertes pour trouver un procédé de construction point par point (c'est-à-dire réaliser une "transformation ponctuelle").

7-1-3- *Exemple d'activités.*

L'exemple ci-après n'est pas un modèle : il n'est développé que pour mieux expliciter certains des objectifs définis ci-dessus. D'autres types d'activités, dont le déroulement peut prendre diverses formes, seraient tout aussi justifiés, pourvu qu'ils mettent en jeu des savoir-faire répondant aux objectifs cités aux paragraphes précédents (cf. par. 7-1-1- et 7-1-2-) et qu'elles comportent la communication qui permet de valider ou d'invalider les productions.

Des élèves travaillant en groupes pourront être invités à achever un plan incomplet (de la cour d'école, par exemple), les ébauches de plans proposés étant éventuellement différentes, – par l'échelle, par l'orientation ... – selon les groupes. Il s'agira alors successivement, pour chaque groupe :

- *d'identifier, par un codage collectif, différents éléments de l'espace réel à partir de leur représentation sur le plan, et de préciser la tâche à réaliser ;*
- *d'anticiper l'action de représentation à effectuer pour juger des informations à recueillir sur le terrain et, à cet effet, choisir et utiliser à bon escient, parmi celui qui est disponible, le matériel le mieux approprié pour le mesurage (lié ou non au système métrique : telle distance est de 12 m ou de 3 longueurs de banc ...) et le repérage ;*
- *de compléter le plan en recourant aux outils mathématiques (alignements, angles, distances, proportionnalité ...) et aux instruments de tracé géométrique qui permettent de procéder au transfert des informations recueillies.*

L'exposition et la comparaison des productions obtenues, sous forme de travail collectif, doivent ensuite, par la description orale des réalisations et par les justifications apportées, permettre la mise en évidence de différences liées aux niveaux d'exigence, de compréhension ou de compétence des membres des groupes.

Enfin, les élèves peuvent être appelés à déterminer sur le terrain l'emplacement de repères indiqués après coup sur le plan (par exemple : placer un objet dans la cour, à l'endroit correspondant à une croix portée sur le plan). Si, de surcroît, chaque groupe opère avec un plan précédemment complété par un autre groupe, c'est, pour les élèves, l'occasion de décoder une *production de leurs camarades, de la critiquer éventuellement, d'agir à partir de leur interprétation et, le cas échéant, d'être à leur tour critiqués par les auteurs du plan.*

Discussions et arbitrages contribuent ainsi à la validation des réalisations des uns et des autres. L'instauration de cette communication fonctionnelle qui, en outre, aide à l'acquisition des langages appropriés, justifie ici le travail en groupes.

Cela n'exclut pas, à d'autres moments, un travail individuel portant aussi bien sur le recueil d'informations et leur traitement que sur la justification des actions effectuées.

7-2 – Indications complémentaires.

7-2-1- Les activités géométriques à ce niveau doivent permettre une réorganisation des connaissances acquises antérieurement et l'acquisition d'outils de construction exploitant les propriétés de certains objets géométriques : plus que de savoirs, ce sont encore des savoir-faire que l'on vise, mais en organisant des savoir-faire élémentaires en savoir-faire plus complexes et plus conscients.

Ainsi, un élève du cycle moyen doit être capable de justifier la procédure qu'il a utilisée pour construire un carré en faisant référence à certaines des propriétés du carré. Mais on n'exigera pas qu'il dispose d'une "définition du carré" (ensemble de propriétés nécessaires et suffisantes), ni qu'il soit capable d'énoncer les articulations logiques entre les différentes propriétés. Cependant, à l'occasion d'une activité de construction, il pourra être confronté au problème de savoir si une propriété utilisée lui permet bien d'obtenir à coup sûr un carré et seulement un carré, ou si elle peut conduire aussi à d'autres figures.

7-2-2- L'acquisition du vocabulaire prend plus d'importance qu'au cycle élémentaire, car on met davantage l'accent sur l'explicitation des procédures, et on commence à faire intervenir ponctuellement des raisonnements qui impliquent un langage fonctionnel. On peut distinguer deux niveaux d'utilisation :

– les termes qui servent à l'occasion d'une activité, mais pour lesquels on n'exige pas une connaissance générale ; *par exemple, le mot "bissectrice"* est utilisé pour désigner la ligne de pliage qui partage un secteur angulaire en deux secteurs superposables, sans se référer à une définition rigoureuse, ni à une connaissance formelle des propriétés ;
– les termes qui désignent les objets ou des relations que l'on rencontre souvent ; *par exemple, le mot "triangle"* intervient pour désigner des parties de polygones, *les mots "perpendiculaires", "parallèles"* désignent des relations utilisées dans de nombreuses constructions. Il en est de même des mots : *carré, rectangle, losange, quadrilatère, parallélogramme, côté, cercle, cube, pavé, arête, sommet, face, sphère.*

L'assimilation de ce vocabulaire requiert des activités nombreuses et répétées. Connaître un mot ce n'est pas être capable de réciter toutes les propriétés de l'objet désigné, c'est savoir l'utiliser de façon pertinente. Cette pertinence évolue naturellement avec le champ d'utilisation du mot avec l'âge des enfants.

7-2-3- Toutes les activités géométriques développées au cycle moyen font appel à l'utilisation d'instruments qui ne vise pas seulement la réalisation correcte de certains tracés, mais développe aussi la capacité à choisir un ou des instruments adéquats à la tâche envisagée, ce qui suppose l'analyse de l'instrument et de l'objet d'étude (démarche analogue à celle de l'étude technologique).

Certaines activités conduisent éventuellement à la fabrication d'instruments (*gabarit pour reporter un angle ; feuille de papier pliée pour l'angle droit, etc.).* Des activités de reproduction conduisent à l'utilisation de certaines techniques et procédures générales, relativement fiables et rapides (*exemples : calque, quadrillage, patron, gabarit pour un pavage*).

7-2-4- Les activités géométriques entretiennent, souvent, des liens étroits avec les autres apprentissages mathématiques ; elles peuvent ainsi :

– utiliser des notions introduites par ailleurs (proportionnalité, mesurage ...) ;
– permettre d'introduire de nouvelles notions (nombres décimaux, proportionnalité ...) ;
– servir de support à une situation-problème (dénombrement des diagonales de polygones, par exemple).

Ainsi, au terme de la scolarité élémentaire, les enfants auront une fréquentation du domaine mathématique dont le "calcul" n'est qu'une des composantes, sans qu'on puisse considérer que ces apprentissages mathématiques sont achevés : ils devront être entretenus, consolidés, réinvestis et surtout prolongés et approfondis tout au long du premier cycle du collège, dont les enfants doivent pouvoir aborder, sans rupture, le programme.