INVITATION A UNE REFLEXION SUR LE ROLE DU LANGAGE DANS L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

François CONNE
Professeur invité à l'Université de Montréal
Laurent PAULI
Professeur honoraire, Université de Genève

I - PERFORMANCE ET LANGAGE DANS L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

Faire des mathématiques, ce n'est pas parler ni écrire. Et cependant le langage intervient à tous les niveaux. Le langage est, bien sûr, un mode privilégié de désignation des objets ou des traitements qu'on leur applique, mais c'est plus qu'un support à la pensée. Le langage rattache les mathématiques à l'expérience (sensible ou consciente) et par ce biais permet de communiquer.

Si, culturellement, nous voyons dans les performances des élèves la manifestation de leurs compétences mathématiques et de leurs progrès, on ne peut pas réduire la description de l'enseignement à la seule suite de défis auxquels les élèves sont astreints. D'un côté, cette suite de défis est l'expression d'une stratégie d'enseignement codifiée, organisée et justifiée. Tout cela transite par le langage. D'un autre côté, le défi et l'attente de la performance sont à eux seuls trop cassants pour qu'ils puissent se passer de commentaires. Le langage vient supporter l'incertitude des défis, qui, il faut le dire, affecte l'enseignement tout entier et non pas l'élève seulement. Il faut qu'après un échec, comme après une réussite aussi, l'élève puisse se reprendre et soit à même de relever les défis qu'on lui prépare. Les commentaires viennent alors tout naturellement assurer (assumer) cette continuité, et le langage est donc présent ici aussi. Ce faisant, il articule la performance sur ce système de codes, de repères, de justifications d'explications que j'ai évoqué comme étant sous-jacent à la stratégie d'enseignement et la suite de défis qui la caractérise.

On le voit donc, s'institue un double régime. Un régime factuel, d'actions, discontinu, celui auquel est inscrit la suite des défis-performances, autant d'échéances (petites ou grandes) du programme d'enseignement. Parallèlement, un autre régime, continu, dont la trame est parcourue de fils de langage. La parole est répétable, mémorisable, l'écrit est lisible, relisible, et recopiable, quelque chose s'y maintient . Ce que j'ai expliqué ci-dessus rend compte des rapports entre ces deux régimes. Je l'ai fait alors selon une perspective d'extériorité.

Bien sûr le tissu langagier est extrêmement vaste, et une perspective trop large ne nous permet pas de dépasser les constatations triviales. Mais en centrant suffisamment

«petit» x n° 20 pp. 67 à 83, 1989

l'analyse, on trouve déjà quelques considérations intéressantes. Par exemple, en classe de mathématiques, un doublage est inévitable. On ne se contente pas de faire des mathématiques, on est amené à parler de ce qu'on fait, à défaut trop souvent de parler de mathématiques. Malgré tout, un peu de métamathématique s'infiltre ainsi dans l'enseignement. Ceci sera d'autant plus important que le langage d'enseignement (de cette discipline) sera pensé, construit avec rigueur, voire tout simplement cultivé. Ce point n'est pas reconnu par tous. Nombreux sont ceux qui croient ou rêvent d'une mathématique si transparente qu'il serait inutile et vain de vouloir l'interpréter par un habillage de commentaires. La rigueur mathématique déteindrait sur celle du langage qui l'exprime. Comme je l'ai déjà dit, en classe, on ne peut pas se passer de commenter les événements. Pourrait-on réserver les commentaires à parler de celui qui fait des mathématiques plutôt que des mathématiques qu'il fait ? Un tel vœu vient à réduire l'analyse des rapports entre langage et enseignement des mathématiques à une perspective d'intériorité. Examinons cela maintenant.

Il y a bien là un noyau irréductible. En effet, avant même toute considération sur les nécessités de l'échange didactique, évoquées ci-dessus, il nous faut bien admettre comme irréfutable que la communication est possible. Partons de ce point irréductible. Il s'en suit que nous devons considérer qu'il y a une adéquation certaine entre la performance d'un sujet et les expressions spontanées qu'il utilise à ce moment. Celui qui considère la performance de l'élève ou ses expressions propres comme la manifestation d'une même pensée à l'œuvre sur deux registres distincts, tient la clé de cette adéquation et peut aussi en comprendre les limites. Car elle se réalise à des degrés divers et n'existe que globalement. Une analyse des phénomènes d'enseignement qui veut s'en tenir à ce niveau global doit tabler sur cette adéquation. C'est ce que font quotidiennement les enseignants qui n'ont pas le loisir de prendre les précautions des psychologues expérimentalistes. Mais c'est la pensée de l'élève et non pas ses performances ou expressions toujours partielles qui se situe à ce niveau de globalité. S'intéresser à cette adéquation, la traiter comme un objet d'investigation, ou un levier pour une action didactique, nécessite un recul par rapport aux petits événements de la classe.

Comment concilier alors cette adéquation avec cette donnée de la psychologie qui veut que l'opératif précède toujours le figuratif, et que l'action réussie précède la compréhension et l'explication par le sujet lui-même de sa réussite ? Précisons quelques points. D'abord la réussite à une tâche de psychologie expérimentale n'est pas tout à fait une performance scolaire. En effet celle-ci est une réussite interprétée et inscrite dans le projet didactique. Donc, en classe, performance et expression sont tout autant interprétées, même si la seconde est plus difficile à cerner. En d'autres termes, la distinction opératif/figuratif n'est pas aussi nette en didactique qu'elle peut l'être en psychologie expérimentale.

Pourtant, à l'école, il y a aussi très nettement préséance de la performance sur l'expression. Les expressions spontanées des élèves ne sont retenues - et par là reconnues dans l'échange didactique - que pour autant que la performance qu'elles accompagnent soient identifiées.

C'est avant tout le succès, et éventuellement les quelques erreurs dont on a l'habitude en tant que maître, qui sont en pratique identifiés. Si en cas de succès on est frappé par l'adéquation d'une expression avec la performance on le relève et on parle alors «d'expression heureuse». Par contre il est très peu fréquent qu'une réussite soit mise en doute par ce que son auteur exprime. Ainsi donc l'adéquation entre performance et expression est-elle prise en compte de manière sélective, selon les buts assignés par le projet didactique. Elle a un caractère subjectif car elle souligne les mérites de l'élève qui sait allier réussite et bonne expression. On la veut spontanée, c'est-à-dire ni préméditée, ni ânonnée.

Mais cette adéquation se prolonge aussi dans une autre direction. Elle est généralisée, extrapolée à une adéquation entre le savoir visé et les termes qu'on utilise pour le désigner ou le décrire, ou plus prosaïquement encore sur les expressions toujours - déjà - heureuses - de - celui - qui - sait, en l'occurrence le maître ou son manuel. Il s'agit de termes objectifs du savoir et non plus de l'expression subjective d'un sujet. Il s'agit aussi de termes dans l'échange didactique, qui peuvent être échangés, repris, répétés par les partenaires.

Cette nouvelle extrapolation, lorsqu'on la replace dans la perspective d'un projet didactique, permet une anticipation. L'apprentissage des termes adéquats par l'élève anticipe sur sa réussite. Il y aurait ainsi des formules à savoir, j'en donnerai un exemple un peu plus loin. Réciproquement, le maître est appelé à reprendre à son compte une réussite observée chez les élèves mais en utilisant le terme adéquat. C'est exactement la signification de cette recommandation que l'on trouve dans le livre du maître officiel (et obligatoire) en Suisse Romande (pour les élève de C.P.) : «La maîtresse utilise la terminologie correcte (...) mais ne l'impose pas aux enfants. Il est en effet primordial que ceux-ci expriment leurs idées dans un langage qui leur est propre pour autant qu'il n'y ait pas d'erreur mathématique». Dans ces conditions, comment s'assurer que maître et élèves parlent bien de la même chose ? Cette recommandation est généreuse pourtant, ou plutôt part de bonnes (mais vaines) intentions :

a) valoriser l'expression spontanée de l'enfant (on ne dit d'ailleurs pas élève) et

b) le préparer aux termes des initiés (qu'ils vont devenir tout au long de leur scolarité).

L'enseignant est donc appelé à fournir des expressions-types, véritables termes de l'échange, d'emblée adéquats pour le niveau de performance visé. Ce qui l'intéresse alors ce n'est pas plus que 1° la réussite, 2° la bonne expression, quitte à ne pas considérer (méconnaître, méprendre, mépriser) l'adéquation entre les deux. Mais ceci attribue à ces termes le pouvoir de rendre l'élève savant. Nous avons affaire à des formules un peu magiques, comme cet exemple exprimant tout ce qu'il faut savoir sur la loi des leviers pour réussir les exercices (c'est exactement en ces termes que cette formule m'a été rapportée par un adulte ému au souvenir de son excellent maître de math/physique) : «La force fois le levier de la force égale la charge fois le levier de la charge». Soit, très jolie formule ! Mais qui donc s'exprimerait ainsi ? Remarquons aussi que cette formule présente tout un programme. A l'élève d'identifier, parmi un répertoire de telles formules, laquelle appliquer, à quel moment et comment. Remarquons aussi que peu importe l'artificialité de la formule, toutes ne sont pas aussi réussies que celle-là, peu importe aussi sa bêtise éventuelle, puisque la réussite prime, il suffira que la formule soit efficace.

Ainsi donc deux systèmes de référence président dans l'enseignement des mathématiques à la prise en compte des expressions spontanées des élèves. Soit on les ramène aux performances qui les accompagnent et on les sanctionne en fonction de celles-ci. On adopte alors dans l'examen des rapports entre mathématique et langage la perspective d'intériorité. Mais étant dans le registre discontinu défi/performance on ne peut pas en tirer grand chose de plus que des anecdotes. C'est-à-dire des événement bien circonstanciés et attribués à un élève particulier. Dépasser ceci est possible si on cherche, derrière la performance et les expressions qui l'accompagnent, la pensée actuelle de l'élève. Mais s'intéresser à la pensée c'est le rôle du psychologue, l'enseignant peut-il se le permettre, ne va-t-il pas perdre de vue le projet didactique ?

Le second système de référence ramène les expressions des élèves aux termes appropriés au savoir visé (final). Trop souvent ces expressions sont fournies par anticipation. On y perd l'adéquation entre performances et expression. Ceci nous ramène finalement à considérer les rapports entre mathématique et langage dans une perspective d'extériorité.

Le projet didactique, l'avènement au savoir qu'il promet, l'anticipation qu'il est amené à faire à force de le promouvoir, la préparation des élèves aux exigences futures, la mise en évidence (pour l'exemple) des «expressions heureuses» des bons élèves, ainsi que la réduction à l'anecdote des performances, des expressions ou de leur adéquation lorsqu'elles sont inattendues (voire non souhaitées), tout cela contribue à renvoyer l'enseignement à cette perspective d'extériorité.

Ce déplacement porte en lui le danger de dévaloriser les expressions spontanées des élèves, dérobant ainsi aux partenaires l'accès aux processus de pensée mis en branle par leurs échanges. Ainsi les formules, si élégamment tournées soient-elles, deviennent des normes dont l'appropriation se fera sur le mode de l'imitation conformiste. Fatalement certains élèves n'arriveront pas à les retenir, ou ne voudront pas faire cet effort. Ce n'est pas bien grave puisqu'un tel apprentissage ne saurait modifier grand chose à la pensée et aux connaissances des élèves.

Il serait naïf de croire que ceci n'affecte que l'élève. Le maître s'en trouve autrement plus astreint. Le voilà tenu à parler dans les termes, toujours clairs, du savoir. Mais le voilà aussi son propre juge. Le poids de la norme pèsera d'autant plus sur lui. Il lui reste une esquive, lui permettant de garder la prérogative, c'est de se prendre à ce jeu esthétique consistant à trouver d'élégantes formules, et construire des énoncés intrigants.

II - LE PARCOURS DU DEBUTANT OU COMMENT ANIMER UN SEMINAIRE

J'ai écrit l'introduction qui précède à la suite d'un séminaire donné lors du Xème forum de mathématique organisé par la «Conférence suisse des chefs de département de l'Instruction publique», forum qui s'est tenu à Fribourg en 1985.

En Suisse, ce que les français désignent par le terme «Education Nationale», s'appelle «Instruction Publique». La responsabilité d'accomplir cette tâche n'incombe pas à l'état confédéral mais est confiée aux cantons. Ce que les français appellent «le ministre de l'Education Nationale» se nomme chez nous, «le chef de département de l'Instruction Publique», voir, à Genève la pompeuse, «le Président». Il y a autant de chefs que de départements, à savoir un par canton. Les chefs sont élus au suffrage direct par les citoyens. L'état confédéral joue un rôle de coordinateur, rôle très restreint. La conférence suisse des chefs de département de l'instruction publique est l'organe chargé de cette coordination.

Ce conseil organise à date régulière un «forum mathématique» où sont réunis, sur invitation, des enseignants de tous les cantons suisses et de tous les niveaux scolaires. Le forum est trilingue. Pour son Xème forum, le conseil avait proposé le thème suivant : **Mathématiques et langue maternelle**. J'ai été invité à y animer un séminaire. Parmi mes préoccupations, celles qui se rapprochaient alors le plus de ce thème, concernaient mes études à propos de la résolution de problèmes d'arithmétique, le passage à un traitement algébrique de ces problèmes, et aussi quelques expériences isolées faites avec mes étudiants à propos de la formulation d'énoncés de problèmes d'arithmétique. J'ai donc proposé comme titre à ce séminaire : **Formulation de problèmes et de leur résolution**. C'est la description de ce que nous avons traité dans ce séminaire que je vous propose de lire ci-dessous. J'ai animé ces séances de façon à laisser une grande liberté aux discussions et débats. J'ai opté aussi pour une série de centrations sur des aspects différents, de manière à éviter tout enlisement de la discussion sur des divergences d'opinion. En annexe à ce document, j'ai rédigé un texte proposant quelques points de méthode dans l'analyse de protocoles d'entretiens d'élèves et illustrant ces points sur l'exemple de protocoles récoltés par M.C. Escarabajal de Paris. Les lecteurs intéressés peuvent obtenir ce document manuscrit auprès de la rédaction de «petit x».

Il me reste à expliciter le lien qu'il y a entre le texte introductif et la description qui suit.

Dans notre séminaire (3 demi-journées), il n'a jamais été question de ce que j'appelle «défi». D'où vient donc que je mette cette notion au départ de mon propos ? En abordant la question du langage par le biais des problèmes d'arithmétique, je jouais sur la facilité. Voilà un thème classique bien que rabâché. Les problèmes d'arithmétique sont des archétypes dans «l'épistémologie commune». Voilà des siècles que l'on propose aux apprentis ces petits défis, appelant à leurs astuces de raisonnements. Un énoncé intrigue, et la solution est un dénouement. Cet aspect primordial pour l'échange didactique va tellement de soi, qu'il reste implicite. Or il n'est pas secondaire, à moins de croire que l'échange didactique lui-même le soit. Mais voyez combien nous n'en sommes pas libérés, voyez les énoncés que nous avons rédigés nous-mêmes au cours de notre étude (Cf. § III). Voyez comme nous avons alors oublié les équations comme si nous considérions que tout était consommé, dans un problème d'arithmétique, une fois les x apposés.

Mais il y a une forme langagière pour rendre le défi. Avec des normes : pas de redondance, envoi conclusif réalisé par une question etc. Premier jeu de langage.

Par contre cette forme n'a pas d'autre fonction que d'habiller. Il faut un autre fondement aux problèmes pour les faire admettre comme outil d'enseignement. C'est l'entreprise d'exercer le raisonnement, d'en apprendre le maniement qui est en cause ici. En matière d'enseignement, la gratuité ne peut être qu'exceptionnelle. L'enseignant doit attester de l'intérêt du problème par le raisonnement qu'il appelle. L'élève doit, lui aussi, de son côté, attester de la non gratuité de sa réponse. Il doit montrer qu'il n'a pas deviné seulement, mais est bel et bien entré dans le problème et en a déduit sa solution. Dans tout cela le langage intervient bien sûr. Il établit aussi le passage de l'expression -

subjective des relations que le sujet fait à l'expression de la nécessité - objective - des calculs qu'il entreprend pour trouver la solution. Nous avons là le passage des expressions aux termes : un second jeu de langage. Mais ce sont aussi des termes pour l'échange didactique : termes dans lesquels l'élève valide son travail auprès du maître ; termes dans lesquels le maître explique à l'élève la solution, ou lui indique ses erreurs.

Le second moment du débat fait suite à l'expérience du lien (adéquation) entre performance et expression, sous la forme dans le cas présent du lien entre énoncé et solution. Deux fois le même texte d'énoncé. Dans un cas un problème facile, l'énoncé paraît clair. Dans le second cas, à cause d'une question de signe, un problème bien plus difficile, le même énoncé semble ambigu et ne pas être complet.

Le troisième moment du débat, c'est l'examen de protocoles d'élèves résolvant des problèmes d'arithmétique dans le cadre d'une étude de psychologie. Les participants au séminaire ont admis un énoncé comme bon. Confronté aux protocoles, à l'échec de l'élève, un peu inattendu, il y a réduction à l'anecdote. On cherche les circonstances de la contre performance.

Personnellement, je ne pouvais pas laisser le débat ainsi ; cela nous menait à parler de ce qui aurait dû ou pu être fait plutôt que de ce qui a été relaté dans le protocole. En fait, il s'agit de convaincre les enseignants de deux choses :

1) qu'il est possible et pertinent d'étudier du point de vue de la didactique les performances des élèves, leurs expressions et de s'en remettre à leur adéquation pour retrouver ce qu'il ont mis en œuvre dans leur tâche ;
2) que ce n'est pas un travail réservé à la seule perspective psychologique.

Il n'y a pas à «psychologiser» l'école, ni, en particulier, les échecs dont elle est le théâtre. Le but étant clair pour moi, je n'ai pas tenu à enferrer le débat dans un combat d'opinions. J'ai fait par écrit une analyse des protocoles en mettant en évidence quelques points de méthode. Par contre j'ai voulu montrer combien le psychologue, dans cette expérience, s'assimilait à un enseignant par le fait de travailler sur des problèmes d'arithmétique ayant de grandes connotations didactiques dont il n'avait manifestement pas pu s'abstraire. Cet argument me paraissait important car je sens que le maître se défend, avec raison, d'être assimilé au psychologue (mais il le désire souvent aussi).

Le lien entre énoncé et solution - qui reprend celui entre expression et performance - est alors étudié de deux autres façons. La plus fructueuse aura été celle de faire rédiger, à partir d'un système simple d'équations, un énoncé. Nous sommes alors dans un système complexe de contraintes, et l'énoncé est la solution de celui-ci : clarté, concision, précision, élégance, naturel, réalisme, intrigue etc. etc. Cela a trop bien marché. Un effet indésirable en a résulté : momentanément, les participants ont oublié de prendre en compte le fondement didactique du problème à construire.

On voit combien il est difficile de tenir à la fois tous les éléments en jeu : savoir à enseigner, objets d'enseignement, productions des acteurs du système didactique lorsqu'ils y sont confrontés. De cette difficulté naissent tant de débats pédagogiques qui tournent en rond comme si on était continûment amené à lâcher quelqu'aspect dès qu'on voulait en saisir un autre.

Ainsi, l'évolution même de nos débats, plus que les débats eux-mêmes, esquisse les contours d'une problématique, celle que j'ai explicitée en introduction.

On notera une dernière analogie. Le style d'animation du séminaire passe d'un débat à un autre, et procède en centrations (décentrations) successives et discontinues, celles que nous devons mettre en œuvre dès le moment où une tâche nous est fixée. Parallèlement, une discussion continue qui dérive, bien soutenue par le langage et les glissements qu'il permet : un régime de continuité et de connexité.

On retrouve le double régime action-langage décrit ci-dessus.

III - COMPTE RENDU DU SEMINAIRE : Formulation de problèmes et de leur résolution ; une entrée en matière sur la question des formulations verbales

Projet pour le forum

La résolution des problèmes d'arithmétique s'accompagne de tout un travail sur les formulations tant de la part de l'élève que du maître. Nous aimerions étudier de plus près cette activité. Partant de l'étude des termes utilisés et de leur impact, nous chercherons à repérer comment cette activité se manifeste et quels sont ses liens avec la résolution du problème proprement dit. Puis nous nous mettrons à composer quelques problèmes d'arithmétique pour pouvoir l'observer à chaud, sur nous même. La perspective générale du travail est de se créer quelques surprises. Le plan que nous avions prévu était le suivant :

1. Comparaison de 2 énoncés proches. Une petite expérience montrera le lien entre l'activité de résolution et l'interprétation de l'énoncé.

2. A propos de ces problèmes, présentation et analyse de quelques productions d'élèves (protocoles).

3. Examen d'énoncés composés par ces mêmes élèves sur le modèle des problèmes ci-dessus.

4. Construction puis étude d'énoncés de problèmes construits à partir de la donnée d'un système d'équations algébriques.

5. Etude d'un problème de géométrie. Recherche de formulation de ce problème. Quelle importance, dans ce cas, accorder au langage ?[1]

Voici maintenant le compte rendu de notre travail et plus particulièrement la description de nos débats.

---

1 Nous n'avons pas eu le temps d'aborder ce point 5.

1. Comparaison d'énoncés

J'écris au tableau l'énoncé suivant :

Jacques joue 2 parties de billes.
A la première partie il perd 5 billes.
Il joue une 2ème partie.
En tout il a perdu 8 billes.
Que s'est-il passé à la 2ème partie ?

Je propose aux participants de chercher la réponse. Je laisse un temps de réflexion. Qui a trouvé la bonne réponse ? Sourires, tout le monde (semble-t-il).
J'écris alors un second énoncé.

Olivier joue 2 parties de billes.
A la première partie il gagne 2 billes.
Il joue une 2ème partie.
En tout il a perdu 7 billes.
Que s'est-il passé à la 2ème partie ?

Très vite cet énoncé est qualifié d'ambigu. La formule «en tout il a perdu 7 billes» est critiquée, elle ne paraît pas claire. Puis s'enchaînent d'autres critiques. La phrase «il joue une 2ème partie» est superflue. L'énoncé n'est pas écrit de manière à ce qu'on puisse facilement retrouver 2 + [ ] = -7.

Je fais alors remarquer la similitude de deux énoncés. La seule différence ne tient pas aux termes utiles mais à ce que le premier présente deux pertes tandis que le second présente une perte et un gain.

Conclusion de l'expérience

La clarté d'un énoncé ne tient pas seulement au langage utilisé. L'ambiguïté provient des tentatives de résolution du sujet et non pas des mots de l'énoncé. Si le sujet a un doute, il retourne à l'énoncé pour y chercher plus d'information, quelque chose qui par exemple lui permettrait de choisir entre deux interprétations. Alors dans le cas où il ne trouve pas ceci, c'est l'énoncé lui-même qui ne paraîtra pas clair. Mais c'est *dans son esprit* que cela n'est pas clair.

Discussion

Une discussion plus large s'ensuit. J'amène quelques informations supplémentaires les élèves n'ont aucune peine à résoudre «Jacques». Pour «Olivier», la grande majorité trouve qu'il s'agit d'une perte. Mais la tentation est grande de répondre P5 (Perdre 5 billes). Les réponses les plus fréquentes sont P5, P7 et P9. Quelqu'un évoque le fait que bien souvent les élèves engagent leur calcul avant même d'avoir lu entièrement la donnée. Un autre revient sur le fait que les énoncés ci-dessus ne sont pas très bien tournés. Il faut que l'énoncé soit le plus clair possible pour que ne viennent pas s'ajouter aux difficultés mathématiques proprement dites des difficultés langagières. On se demande alors si, lorsque l'énoncé paraît tout à fait clair, il y a encore problème. Puis quelqu'un évoque le travail de résolution qui met en œuvre un va et vient constant entre la donnée et les représentations que s'en fait le sujet, une sorte de traduction continue. Ceci suggère à un participant l'idée de faire jouer les élèves aux billes et que ceci les aiderait peut-être à comprendre ces énoncés.

Cet échange n'aboutit pas, bien sûr, à des certitudes. Chacun amène des idées. Mais il faut relever un élément important : le point de vue adopté ne place pas la compréhension de l'énoncé comme une activité préalable à la résolution mais au contraire comme une activité qui accompagne celle-ci tout au long de son déroulement.

2. Présentation de protocoles d'élèves

J'avais choisi d'utiliser les protocoles d'une recherche française. L'intérêt de cette recherche tient à ce que dans un premier temps des élèves sont interrogés, on leur demande de résoudre un problème ; puis, dans un second temps, on demande à ces mêmes élèves de rédiger un énoncé sur le modèle de problèmes qu'on leur présente. Les protocoles étudiés sont donc tous tirés d'un article à paraître de M.C Escarabajal : **Compréhension, quel problème l'enfant résout-il ?**

Pour la résolution de problèmes, M.C. Escarabajal avait présenté 3 types d'énoncés.

1. A la récréation, Pierre a joué deux parties de billes. A la première partie il a perdu 6 billes. A la fin des deux parties il a 4 billes de plus qu'avant de jouer. Que s'est-il passé durant la deuxième partie ?

2. Marc rend visite à sa marraine, il lui apporte un bouquet de roses qu'il a acheté avec ses économies et qui coûte 18 F. Quand il s'en va, pour le remercier de sa visite, sa marraine lui donne de l'argent. Il fait alors ses comptes et constate que ses économies ont augmenté de 7 F. Combien d'argent lui a donné sa marraine ?

3. A l'arrêt de l'autobus, 5 personnes montent. Quand l'autobus repart, il y a 3 personnes de moins qu'avant l'arrêt. Combien de personnes sont descendues à l'arrêt ?

Bien que quelques participants s'engagent déjà sur une comparaison des énoncés, par exemple en critiquant l'énoncé 3 : on ne sait pas où doit être placé l'observateur qui compte les échanges de passagers, dans ou hors du bus ? Je les engage à se limiter au problème 1 qui ressemble à ceux que nous venons d'étudier. En première réaction, tous les participants estiment que sa formulation est plus heureuse que les précédentes. Maintenant le problème est clairement posé. Nous passons alors à la lecture des protocoles.

Les enfants interrogés ont 10 - 11 ans, ils sont en 4ème ou 5ème primaire (CM1 - CM2). Ceux-ci ont de réelles difficultés à résoudre ces problèmes. Ceci étonne, interpelle. A un tel point même que la discussion se focalise sur la lecture d'un seul protocole (le premier donné). Citons-le :

«Sujet : *Il a regagné seulement 2 billes.*
Expérimentateur : *Oui, pourquoi ?*

Sujet : *Pour rattraper ses 6 billes... avant il avait 4 billes pour rattraper ses 6 billes il a gagné 2 billes.*

Expérimentateur : *Alors, explique-moi comment cela s'est passé... avant il avait 4 billes...*

Sujet : *Non, avant il avait 6 billes, après il en a gagné 4 de plus et pour arriver à 6, il faut qu'il en gagne ?*

Expérimentateur : *D'accord, alors à la fin, quand il s'en va, il a combien de billes ?*

Sujet : *Bien 2 puisqu'il en a gagné 2.*

Expérimentateur : *Alors, s'il a 2 billes à la fin est-ce que ça va avec ce qu'on te dit, est-ce que ça fait 4 de plus qu'avant de jouer ?*

Sujet : *...*

Expérimentateur : *Tu comprends le problème ?*

Sujet : *Un peu.*

Expérimentateur : *Il a des billes, il en perd 6, il joue une deuxième partie.*

Sujet : *Il en gagne 4... il a 2 billes de plus.*

Expérimentateur : *Il a 2 billes de plus à la fin... comment tu as trouvé qu'il a 2 billes de plus ?*

Sujet : *de 4 pour aller à 6 ça fait 2».*

Un participant estime que l'élève ci-dessus arrange ses données comme il l'entend, en fonction d'un calcul qu'il croit être pertinent : de 4 pour aller à 6 il manque 2. Un second commentaire manifeste son étonnement à voir un élève de 10 ans aux prises avec tant de difficultés pour reconstituer le déroulement temporel de la partie. Il évoque alors la psychologie et demande à quel stade se trouvent les enfants de cet âge par rapport aux notions temporelles.

A ces deux interventions je réponds en mettant en avant ce que je vois dans ce protocole, par une analyse détaillée : «l'expression temporelle de l'élève reste partielle laissant implicite les points de repère temporels. L'expérimentateur essaye de faire expliciter ceci. Mais l'élève réussit à adapter son raisonnement aux objections qu'on lui présente. Le déroulement que l'élève semble concevoir est le suivant

$$6 \xrightarrow{P6} 0 \xrightarrow{G4} 4 \xrightarrow{G2} 6.$$

J'essaye de montrer que l'élève ne dit pas n'importe quoi, ses déclarations sont interprétables et plus consistantes qu'on se l'imagine de prime abord. Je vois dans le protocole une convergence nette entre l'opération effectuée et la mise dans un ordre chronologique. Les difficultés dans la reconstitution temporelle sont déclenchées par la demande d'explication venant de la part de l'expérimentateur.

Ces réponses ne semblent pas convaincre totalement l'assistance. Le recours à l'interprétation laisse peut-être une impression de flou, ou de sophistication inutile. Un participant déclare même que ces analyses psychologiques des élèves ne l'intéressent pas. La psychologie est évoquée dans ses aspects les plus négatifs : ces explications ne sont-elles pas finalement vaines, voire dangereuses pour l'élève lui-même qui se voit enfermé, étiqueté ?

A cela nous tentons de répondre par des arguments de deux types. Tout d'abord pour ce qui concerne l'analyse, il ne s'agit pas de caractériser tel ou tel individu ni d'analyser l'élève en personne. De toutes façons ce dernier, tel que nous le présente ce protocole, n'existe plus, il a grandi. Et nous ne le voyons qu'au travers d'une situation toute particulière. Non, l'objet d'étude est bien plutôt l'échange expérimentateur-sujet ainsi que les termes utilisés par chacun. Le second type d'argument est plus précis. Des problèmes d'arithmétique tels que celui-ci sont couramment utilisés à fin d'évaluation. Dans certains cantons il s'agit même d'évaluation *cruciale* pour l'avenir scolaire de l'élève. Il convient donc de se poser quelques questions quant à la signification d'une réussite, d'un échec à un problème d'arithmétique. Nous avons quelques exemples dans ces protocoles où le sujet aboutit à la réponse correcte mais ne manifeste pourtant pas une très bonne compréhension du problème, il a passablement d'hésitations et il ne répond pas toujours à la question posée.

L'intervention suivante est cependant encore plus cassante. L'intervenant pense que les problèmes d'arithmétique sont nécessaires pour un bon enseignement des mathématiques. Partant de ce point de vue, il se pose quelques questions se rapportant au langage et plus particulièrement à la rédaction de sa réponse par l'élève. Voici quelques questions qu'il aurait aimées, non traitées ici.

• Quelles sont les difficultés langagières des élèves face à la résolution de problèmes d'arithmétique et comment y remédier ? Dans le cas présenté, il est étonné de voir tant d'échecs. Etait-il si prématuré de poser de tels problèmes à ces élèves ? Faut-il attendre encore une année ?

• Comment intervenir avec un élève qui rencontre des difficultés spécifiques à rédiger sa réponse et qui, sommé de faire une telle rédaction reste, devant sa feuille blanche ? Comment évaluer son travail compte tenu qu'il aurait peut-être su raisonner et répondre oralement ? Mais d'autre part comment lui faire comprendre l'importance de cet aspect rédactionnel ? D'une façon générale qu'est-il judicieux d'exiger des élèves sur le plan de l'expression ou de la rédaction d'une réponse ?

Cette intervention amène une rupture dans le débat. Certains participants l'approuvent, d'autres restent plus sceptiques sur le rôle attribué aux problèmes. Mais la discussion s'éloigne de plus en plus du thème que nous avions prévu de traiter. Viennent se greffer les thèmes classiques des discussions d'enseignants ou de pédagogues. En fait je ressens une divergence profonde portant sur l'objet même de notre travail. D'un côté il y a l'analyse de petits faits scolaires qui nous paraissent amener des éléments de compréhension des phénomènes en cours. D'un autre côté il y a quelques participants orientés vers l'efficacité de leur enseignement, soucieux de ne pas gaspiller leur temps et qui demeurent, apparemment du moins, très réticents à ce genre de recherche présentant des situations d'échec trop manifestes.

Dès ce moment s'installe un flou dans notre travail. Je tente de le recentrer en analysant rapidement un troisième protocole où on voit un élève être amené par son raisonnement à postuler qu'une troisième partie a eu lieu. (Avoir initial 15 billes, perte de 6 billes, gain de 4 billes, gain de 6 billes, avoir final 19 billes soit 4 de plus qu'avant de jouer). Généralement on pense que les élèves ne lisent pas complètement les données et qu'ils omettent de tenir compte de toutes les informations fournies. Nous avons là un contre-exemple.

Mais le fossé est désormais trop vaste et je sens le groupe éclaté : certains m'écoutent intéressés, d'autres restent polis, enfin d'autres encore sont plongés dans la lecture de documents fournis. Il faut aller de l'avant et s'ouvrir à d'autres expériences.

3. Intermède

A ce moment, nous donnons un système d'équation.

$x + 3,5 = y$
$2x + 0,4 = 8/7y.$

La consigne est donc de construire un ou plusieurs énoncés arithmétiques correspondant à ce système. Nous justifions l'apparente complexité, à savoir la donnée d'un «système d'équations à 2 inconnues», par l'argument suivant : les soi-disant problèmes d'arithmétique à une inconnue sont en général des problèmes à deux inconnues où une première substitution peut se faire immédiatement. Ceci ne soulève pas de discussion. Donc cette recherche d'énoncé constitue le devoir pour le lendemain.

4. Analyse d'énoncés rédigés par les élèves

L'expérimentateur montrait un énoncé à l'élève puis il donnait la consigne suivante : «... vous allez essayer d'inventer un problème différent, mais qui lui ressemble, parce qu'il faut faire le même raisonnement pour trouver la solution».

Bien sûr, cette consigne est discutée. Nous ne savons pas très bien comment les mots «ressemble», «même raisonnement» seront compris (au regard de la mécompréhension manifeste pour les énoncés simples étudiés ci-dessus). J'invite à regarder les énoncés pour eux-mêmes et à laisser là le projet de la recherche de Mme Escarabajal. Par exemple l'énoncé suivant :

«Mon frère a 50 F dans sa poche. Il va s'acheter un puzzle à 35 F. Après sa mère lui donne de l'argent. Il les (sic) compte et voit qu'il a 30 F, il dit que son argent a augmenté. Combien sa mère lui a donné d'argent ?».

Je relève que l'élève dit «il dit que son argent a augmenté». Il faudrait éclaircir la fonction même de cette phrase. Formellement, c'est une information superflue. Mais c'est aussi un indicateur, donnant un point de repère : 30 F est moins que 50 F, l'avoir initial, donc 30 F est à mettre en rapport avec ce qui restait après l'achat, il restait de l'argent, la maman a donné, il y a maintenant plus.

Autre exemple frappant :
«ce matin, avant de partir à l'école, Jil compte ses billes. A la récréation il en perd 13, le soir en rentrant il s'achète un paquet de 10 billes. Combien de billes manque-t-il pour qu'il ait le même nombre qu'au départ ?».
Mais un fait étonne M.C. Escarabajal, citons ce qu'elle dit. On peut alors se demander quelle solution le sujet apporte à son problème : - je ne peux pas répondre car je n'ai pas le nombre de départ. - Cette réponse étonne car par la précision de la question il semble que le sujet ait bien saisi la situation». Mon interprétation est la suivante :
Si le sujet ne peut pas répondre, comment a-t-il pu savoir dans sa question qu'il allait manquer des billes ? Et s'il sait qu'il manque des billes, ne peut-il vraiment pas savoir

combien ? Ce cas illustre très nettement deux positions du sujet face à l'expression. Et ceci tient au rôle à faire jouer à la tournure : «pour qu'il ait le même nombre qu'au départ». Dans son énoncé, l'élève n'a pas une vue synthétique, figée, mais il déroule un traitement des informations. Dans cette perspective évolutrice, on voit l'élève partir d'une perte, compensée partiellement. L'élève a donc l'idée qu'il y aura manque. Mais **pour exprimer cette relation**, il en vient à expliciter le terme de la comparaison ci-dessus. C'est une exigence de rédaction. Le voilà ensuite dans la position de la résolution, centrée sur la question (qui n'était que l'aboutissement de l'histoire déployée dans la construction de l'énoncé). Le sujet ne comprend plus la tournure et son relativisme, il ne voit plus comment compléter (pour qu'il ait le même nombre de billes...) sans se référer au nombre de départ (... qu'au départ).

Mais au-delà de ces notes une étude comparative systématique des énoncés étudiés n'est guère possible. Ceux-ci s'avère trop peu nombreux. Mais je saisis, à l'heure où j'écris ces lignes, que nous achoppions à une difficulté plus profonde. A-t-on vraiment affaire à de véritables énoncés de problèmes ? Ou pour être plus exact, ces énoncés ressemblent-ils à ceux que nous adultes enseignants aurions produits ? Pour ma part je retiendrai l'idée défendue ci-dessus selon laquelle le sujet déroule un raisonnement (traité pas à pas des informations) jusqu'à aboutir à une question qui lui paraît opportune. Dans ce sens l'énoncé qu'il produit devrait fortement ressembler à sa façon de résoudre un problème, une résolution qu'il serait tenu d'expliciter (excepté la question) et décrire sous forme narrative. Tandis que nous, au contraire, partons d'une question, éventuellement même d'une technique de résolution que nous voudrions faire exercer. Pour aller plus loin une réflexion théorique doit être menée, et d'autres investigations s'avèrent nécessaires.

5. A nous d'énoncer

Les participants avaient fait leurs leçons. Nous nous sommes donc attelés à la présentation puis la comparaison des énoncés construits à partir du système d'équations suivantes :

$$x + 3{,}5 = y$$
$$2x + 0{,}4 = 8/7y.$$

Notons pour commencer que ce système n'a pas été imaginé par moi-même pour les besoins de l'expérience, mais qu'il correspond à un problème d'arithmétique (Cf. énoncé n° 8 ci-dessous) tiré d'un manuel du cycle d'orientation de Genève, et se rapportant au chapitre : résolution de problème par l'algèbre[2]. Tous les participants, sauf 3, ont présenté un énoncé. Un participant particulièrement intéressé en a même produit deux. Commençons la liste par ceux-ci.

1. Pierre a dans son porte-monnaie 3,50 F de plus que Bernard. En ajoutant 0,40 F au double de la somme que possède Bernard, on obtient une somme qui vaut les 8/7 de celle de Pierre. Calcule l'avoir de chacun. (Variante : calcule la somme que possède chacun).

2 Cours de Mathématique 9ème D.I.P. Genève 1968.
Chapitre IV : Equations du 1er degré à une inconnue. Ex. n° 96 p. 55.

2. 7 stylos coûtent 3,50F de plus qu'un porte-mine et 2 porte-mines coûtent 0,40F de moins que 8 stylos. Calcule le prix de 7 stylos et celui du porte-mine.

3. Duchgnu a 3,50 F de plus que Dufnu.
Si je double l'avoir de Dufnu et que je lui donne 0,40 F, il aura 8/7 de l'avoir de Duchgnu. Trouve l'avoir des deux compères.

4. Jean et Martine comparent leurs économies.
Jean constate : tu as 3,50 F de plus que moi.
Martine dit : si tu doubles tes économies et leur ajoutes 0,40 F
et si j'augmente les miennes de 1/7
alors nous aurons chacun la même somme.
Quelles sont les économies de Jean et Martine ?

5. Au temps où les animaux parlaient...
Le mulet dit à l'âne :
ta charge est 3,5 q plus lourde que la mienne.
L'âne rétorque :
si tu ajoutais 0,4 q au double de ta charge tu obtiendrais les 8/7 de la mienne.
Quelles sont les charges de chacun ?

6. La longueur d'un rectangle dépasse la largeur de 3,50 m. Les 8/7 de la largeur surpassent le double de la largeur de 0,40 m. Quelle est l'aire du rectangle ?

7. Je veux aussi jouer, et je propose un énoncé afin de marquer un autre ordre de complexité et de montrer comment le choix de l'habillage du problème peut mener à une adaptation des données numériques.

Toto et ses parents vont au chalet. Comme il fait beau, Toto décide d'aller à vélo. Ses parents vont en voiture. Ils partent en même temps. Au bout d'une heure, il a 40 km de retard sur ses parents. Il faudra 1 1/4 h aux parents pour arriver tandis qu'après 3 h de route, Toto avait encore 15 km à parcourir. Quelle est la distance de la maison au chalet ? (Ou, quelle est la vitesse de déplacement de chacun ?).

8. Enfin voici l'énoncé original.
Christine a 3,50 F de moins que Michel. Grâce à de bonne notes scolaires, Christine double son avoir. Michel, de son côté, augmente sa fortune de son 1/7. Michel possède alors 0,40 F de plus que Christine. Combien possédaient-ils primitivement ?

Remarques sur les énoncés

1. Beaucoup d'énoncés d'argent. Ceci tient à la donnée de nombres décimaux.

2. Tout le monde s'est strictement tenu aux données fournies. D'une part les nombres sont scrupuleusement repris dans leur écriture décimale. D'autre part, les équations traduites telles quelles (modulo un jeu sur «de plus», «de moins»).

3. Chacun joue à sa manière avec le réalisme (avec parfois quelques petits clins d'œil). A un participant qui lui reprochait le choix des unités de charge au problème 5 (quintaux !) l'auteur répondit du tac au tac «tu sais lorsque les animaux parlent, tout est possible !»).

4. Il y a des différences importantes entre les énoncés. Certains d'entre eux transcrivent les équations presque mot à mot, d'autres sont bien plus élaborés.

5. On notera alors la façon dont la seconde équation est rendue soit de manière actuelle (pb. 2, 6, 7 et 8), soit de manière potentielle (les autres). Ceci est à mettre en relation avec le point 3.

6. Finalement, ces énoncés répondent - à des degrés divers - à au moins 4 ordres de contraintes :

a. Une contrainte de «plausibilité» dans le choix de l'histoire, en fonction des nombres donnés, leur ordre de grandeur et la forme de leur écriture (nombres décimaux → unités de mesure). Même si quelques libertés sont prises quelquefois, cette contrainte reste très forte.

b. Une contrainte due aux relations données. A un premier niveau, il s'agit d'exprimer l'égalité que présente chaque équation «individuellement» et qui consiste à indiquer des comparaisons. A un second niveau, il s'agit d'exprimer le système lui-même (c'est-à-dire la véracité simultanée des deux équations). Ceci prend la forme d'une histoire «en deux temps». Le problème 2 joue sur la donnée de deux relations opposées. Cette formule fait penser à un problème de rapport (de relations additives bien entendu). Ceci suppose que le rédacteur prenne des libertés quant aux unités : on demande le prix d'un porte-mine mais de sept stylos.

Le problème 6 procède de même. Les problèmes 7 et 8 font référence, pour traduire la seconde relation, à une transformation temporelle. Les autres problèmes placent la deuxième équation au niveau d'une relation potentielle, c'est-à-dire ne répondant pas à un élément de l'histoire-prétexte mais se rapportant à des relations numériques, formelles et arbitraires.

Dans l'énoncé 3 c'est le récitant du problème qui fait cette transformation. Dans l'énoncé 1, c'est une transformation abstraite, objective, exprimée par «on». Les énoncés 4 et 5 font une petite mise en scène, inclue dans un dialogue. A l'énoncé 4 on notera que Martine propose à **Jean et à elle-même** d'opérer la transformation.

c. Vient ensuite la contrainte rhétorique de la forme du problème. L'énoncé doit être synthétique et organiser l'habillage d'une question prédéterminée. Ainsi pour reprendre l'exemple de l'énoncé 4, mais aussi 5, la forme de dialogue permet d'exprimer plus directement les relations (le langage oral est plus près de l'action).

d. Enfin, les contraintes langagières, qui imposent pour rendre compte des thèmes choisis, certains termes, certaines tournures de phrases. Par exemple dans l'énoncé 7 : «il faudra 1 1/4 h (mais oralement on disait 1 h 1/4) aux parents...».

Discussion

Bien sûr, la construction d'énoncés s'accompagne de l'intuition de ces contraintes, et tous nous envisagions les différentes formes d'énoncés comme autant de manières d'y répondre. Chacun les avait bien senties dans sa recherche d'un énoncé et savait dès lors comment apprécier le produit fini : le sien comme celui des autres. Ceci fait que la nécessité d'une analyse de ce genre ne s'est pas fait sentir. Les participants se sont plutôt tournés vers une comparaison des complexités respectives de ces énoncés pour exprimer leurs appréciations.

Et la conclusion qu'un des participants proposa au groupe traduit bien ceci : «un problème peut être mis en scène de plusieurs manières, témoignant de points de vue sensiblement différents

- point de vue de Sirius (impersonnel)
- un narrateur d'une histoire passée
- un personnage racontant une histoire qui lui arrive
- un dialogue
- etc.

(Cette liste n'est bien sûr pas exhaustive). Chacun des énoncés implique l'élève d'une manière différente. Le plus attrayant n'était pas le plus simple. Nous adoptâmes volontiers cette conclusion et c'est elle qui fut rapportée en séance plénière.

Remarquons que, suivant le thème propre du forum, nous n'abordons pas ici d'autres facteurs de complexité, comme par exemple les notions mises en jeu (ex. pb. n° 7 vitesse et temps).

La discussion revient alors vaguement sur la question des problèmes d'arithmétique. Le soin apporté à la fabrication d'un énoncé est fonction de la conviction que les participants ont pour ce type d'exercice jugé parfois trop scolaire. Pour défendre les problèmes, un argument ressort : ce sont des occasions, trop rares, de demander à des élèves de mathématiser une situation, jouant un rôle analogue aux problèmes en physique.

Puis la discussion prend une tournure un peu différente. Un des participants, qui jusque là n'avait pas présenté d'énoncés, se demande s'il était vraiment indispensable de s'en tenir strictement aux équations données. N'aurait-on pas pu, sans que cela ne change rien au problème de la traduction, partir d'un système équivalent mais préalablement simplifié : pas de nombres décimaux ni de coefficients ennuyeux comme 8/7 ? Et finalement n'aurait-on pas pu se passer d'une seconde équation, en présentant au travers de la donnée une substitution implicite ? Afin de mieux se faire comprendre, il propose le problème 4 en exemple. Mais il se trompe dans sa traduction algébrique et discute du système :

$$x + 3{,}50 = y$$
$$2y + 0{,}40 = x + 1/7x.$$

Ceci n'échappe pas à tout le monde, l'erreur est relevée et du coup toute l'intervention reste incomprise. Pour ma part, j'étais déjà prêt à poursuivre sa réflexion par une caractérisation générale du problème, et ceci m'amenait à penser l'énoncé en fonction d'une résolution donnée. C'est un problème qui présente deux quantités, transformées multiplicativement de sorte que l'on dispose de deux comparaisons additives différentes et simultanément vraies. La résolution mettra en jeu, d'une manière ou d'une autre **la distributivité**. Soit dans la substitution de x + 3,50 à y dans l'expression 8/7y, soit dans la résolution par algèbre linéaire, par l'amplification de l'équation entière

$$x + 3{,}50 = y \Rightarrow 2x + 7 = 2y.$$

Malheureusement le temps nous a manqué pour arriver jusque là.

Conclusion

Comme l'indique la conclusion générale qui, rappelons-le, a été rédigée par les participants, il s'est effectivement passé quelque chose au cours de ces séances. Un regard original a été porté sur les énoncés, leur lecture et les expressions des raisonnements, on a été sensible aux contraintes que certaines tournures de phrases imposaient.

Nous les animateurs, notons que les participants se seront finalement plus étonnés de leurs propres productions que de celles des élèves interviewés dans cette recherche. Ceci est un signe très encourageant quant au style d'animation du forum. Bien sûr, en tant que spécialistes nous aurions parfois voulu que le groupe entre plus en matière sur les analyses que nous proposions, mais qu'importe ! Nous aurons sans doute d'autres occasions de nous faire entendre, et en nous y prenant autrement.