RACINES CARREES : CONCEPTIONS ET MISES EN SITUATIONS D'ELEVES DE QUATRIEME ET TROISIEME

Teresa ASSUDE
I.R.E.M. d'Aix-Marseille

I - INTRODUCTION

1 - Cadre du travail

Ce travail a été fait dans le cadre du DEA de Didactique des Mathématiques à Grenoble. Les expérimentations ont été faites avec des élèves de 4ème et 3ème du Collège "Le Vergeron" de Moirans (Isère).

Du point de vue mathématique, ce travail s'inscrit dans le cadre des études sur les nombres réels, plus particulièrement sur les racines carrées. Du point de vue didactique, il s'efforce de cerner les conceptions de ces élèves de quatrième et troisième dans le domaine précité.

2 - Objectifs

Voici donc les questions auxquelles nous nous sommes proposé de répondre en entreprenant cette recherche :

a) Quelle signification les élèves donnent-ils au symbole $\sqrt{a}$, $a \geq 0$, et dans quel domaine (algébrique, géométrique...) se situent-ils lors de l'attribution de cette signification ?

b) Quelles sont les conceptions des élèves au sujet des nombres représentés par des racines carrées ?

c) Comment les élèves construisent-ils une procédure de calcul approché des racines carrées ?

d) Quelle est l'influence de la définition donnée en cours, compte tenu que certains des élèves (ceux de 3ème) la connaissent et d'autres (ceux de 4ème) non ?

e) Est-ce que les élèves, même lorsqu'ils ne connaissent pas d'algorithme pour calculer les racines carrées, arrivent à en construire un, ou au moins à construire une stratégie de résolution ?

«petit x» n° 20 pp. 5 à 33, 1989

f) Quel contrôle font-ils des résultats de la machine ? Comment résolvent-ils le décalage quand il n'y a pas de coïncidence entre le résultat que fait attendre la définition et celui que donne la machine ?

3 - Justification des choix.

Notre intérêt pour les nombres réels vient du fait que cette notion pose beaucoup de problèmes aux élèves et aussi aux enseignants: aux élèves, car la compréhension des nombres réels implique la connaissance d'autres notions, comme les limites, la convergence... qu'ils n'ont pas, au moment de l'introduction de R ; aux enseignants, car ce n'est pas facile de parler des nombres réels sans aborder leurs propriétés spécifiques qui peuvent ne pas être à la portée des élèves, et aussi parce qu'il n'est pas facile de trouver sur ce sujet des situations d'enseignement qui soient vraiment efficaces du point de vue de l'apprentissage. D'ailleurs, même si l'on trouvait de telles situations, cela ne veut pas dire que les élèves construiraient d'un coup le concept de nombre réel, car, "un concept se forme sur une longue période... Il ne s'élabore pas isolément mais en relation avec d'autres concepts" (Douady, 1980). Quant à notre travail, il n'avait pas pour but de construire une séquence d'enseignement, mais de mettre les élèves dans des situations qui nous permettent de mieux cerner les idées qu'ils ont dans leur tête et la façon dont ils résolvent les contradictions inhérentes à une situation nouvelle pour eux.

La racine carrée servait nos objectifs parce qu'elle occupe une situation privilégiée au sein des nombres réels. Tout d'abord, comme beaucoup de notions mathématiques, elle est au carrefour de plusieurs domaines : algèbre, géométrie, analyse. Ensuite la racine carrée a provoqué la première grande crise dans les mathématiques, du moins en Occident : la crise des irrationnels chez les Grecs. Elle est au centre de l'apparition de la problématique des réels. Avant la crise des irrationnels, cette notion déjà ancienne (on en trouve l'existence chez les Babyloniens) intéressait les mathématiciens à un double titre: numérique et géométrique. Elle apparaissait en effet quand on voulait "calculer le côté d'un carré d'aire donnée numériquement, ou construire le côté d'un carré d'aire donnée géométriquement" (Dedron et Itard, 1959, **Mathématiques et Mathématiciens**, Magnard, Paris). Ces deux types de problèmes étaient séparés, chacun avait sa propre sphère d'influence. C'est lorsque les Grecs veulent calculer le côté d'un carré d'aire donnée géométriquement et qu'ils n'y réussissent pas que le problème surgit. L'impossibilité de calculer ce côté existant géométriquement est l'origine d'un long débat au sein des mathématiques, celui des nombres réels, résolu seulement au XIX° siècle. Nous voyons que la notion de racine carrée ne posait pas particulièrement de problèmes quand elle était considérée séparément dans un cadre ou dans l'autre: c'est quand on rapproche le cadre numérique et celui de la géométrie que les problèmes surgissent. La racine carrée se trouve alors au coeur de la problématique des irrationnels.

Par ailleurs la racine carrée est la seule écriture exacte pour certains irrationnels à ce moment-là. Ce problème d'écriture se révèle pertinent dans la mesure où les élèves confondent souvent écriture et nombre. Cet aspect a déjà été traité dans d'autres travaux de recherche, nous avons tenu à le signaler car il nous semble important mais nous ne nous y attarderons pas.

La racine carrée est importante aussi car elle est à l'origine de l'apprentissage de nouveaux nombres: les imaginaires. Mais cet aspect ne sera pas abordé dans notre étude.

Cependant, il existe un autre aspect de la racine carrée auquel nous nous intéresserons dans notre travail et qui a retenu l'attention des mathématiciens depuis les Babyloniens jusqu'à nos jours, c'est celui du calcul approché de la valeur de certaines racines.

II - PRESENTATION DE L'EXPERIMENTATION

Nous avons présenté aux élèves les trois situations suivantes :

1. SITUATION 1

Les élèves devaient répondre individuellement et par écrit à la question suivante :
Une civilisation d'une autre galaxie est venue chez nous. Ils ne connaissent pas notre écriture. Ils ont demandé ce que signifiait $\sqrt{a}$. *Explique à ces visiteurs extra-terrestres la signification de* $\sqrt{a}$.

Nous avons demandé aux enseignants de poser cette question dans la classe. Nous avons eu les réponses de 32 élèves de 4ème et de 27 élèves de 3ème.

Cette situation a pour but de voir dans quel cadre les élèves se situent quand ils présentent une signification de la racine étant donné que celle-ci peut être vue dans plusieurs cadres : géométrique, des fonctions, algébrique, de l'analyse.

2. SITUATION 2

Dans cette situation les élèves devaient calculer, à l'aide d'un robot, $\sqrt{256}$ et $\sqrt{7}$.
Nous allons d'abord décrire la situation :

Vous représentez des hommes qui veulent calculer des racines carrées, plus précisément $\sqrt{256}$ et $\sqrt{7}$. *Vous n'avez pas de calculette mais il y aura un robot qui peut faire pour vous tous les calculs que vous voudriez faire.*

Le robot :

- il a une calculette avec des nombres et les quatre opérations : addition, soustraction, multiplication et division ;
- il ne connaît que ces quatre opérations, il ne connaît pas la racine carrée ;
- il comprend ce que l'homme demande mais les ordres doivent être très précis ;
- il donne un résultat par écrit quand il comprend le message sinon il dit qu'il ne comprend pas et les hommes doivent refaire le message ;
- quand les hommes lui demandent de faire quelque chose qu'il ne sait pas faire, il répond simplement qu'il ne peut pas le faire ;
- il ne peut pas donner d'opinions ni changer les messages ni faire de commentaires.

Les hommes :

- ils donnent les ordres par écrit au robot qui donne le résultat quand il comprend le message ; si le robot ne donne pas de réponse les hommes doivent refaire le message ;

- quand le robot donne le résultat, si les hommes sont satisfaits ils peuvent s'arrêter sinon ils peuvent continuer à rédiger des messages ;
- ils peuvent faire autant d'essais qu'ils veulent jusqu'à obtenir le résultat qu'ils pensent juste;
- chaque essai peut ou non contenir plusieurs ordres.

La consigne suivante était destinée à l'un des binômes constitués : *à partir d'un certain temps de travail vous n'aurez droit qu'à un nombre limité d'essais qui vous sera communiqué par l'observateur.*

Les élèves ont travaillé par binômes et il y avait un observateur pour chacun d'eux. Chaque binôme devait calculer $\sqrt{256}$ et $\sqrt{7}$ selon les consignes présentées dans la tâche.

Nous avons travaillé avec :
- 3 binômes d'élèves de 4ème
- 1 binôme d'élèves de 3ème
- 1 élève de 3ème qui a travaillé individuellement
- 1 élève de 4ème qui était le robot et qui a aussi travaillé individuellement.

Les binômes ont été formés en fonction des réponses aux questions de la première situation, c'est-à-dire que nous avons mis ensemble des élèves ayant présenté des définitions du type multiplicatives et des élèves ayant présenté des définitions du type de la division.

Nous avons travaillé avec les élèves pendant une heure et demie en moyenne mais nous les avons laissé prendre leur temps.

Les élèves de 4ème n'avaient pas eu encore d'enseignement sur les racines carrées ni sur les réels. Nous pouvons dire que dans le cours de mathématiques ils n'avaient vu aucun contenu en relation avec le sujet de cette expérience. Les élèves de 3ème avaient déjà suivi l'enseignement sur les réels et sur les racines carrées.

Les observateurs avaient comme consigne que si les élèves d'un binôme n'étaient pas d'accord sur les messages à envoyer au robot, ils pourraient envoyer des messages individuels.

Cette situation est une situation d'interaction entre deux élèves d'une part et entre eux et un robot d'autre part. Elle a été construite pour vérifier les objectifs b), c), d) et e).

3. SITUATION 3

Les élèves devaient lire les situations, discuter entre eux et ensuite présenter une position commune :

Situation 3A

Dans un exercice de calcul, Paul a calculé $\sqrt{3}$ avec sa calculette et il a obtenu 1,7320508. Louis, en utilisant la définition présentée dans le cours de mathématiques, a multiplié ce nombre par lui même et il a dit à Paul que la valeur que celui-ci a donnée n'est pas correcte.

Qu'en pensez-vous ? Argumentez pour défendre vos positions afin de vous mettre d'accord sur une position commune. (Vous pouvez utiliser la calculette, simples, avec les quatre opérations et la racine carrée).

L'observateur introduit les situations 3B et 3C quand les élèves pensent avoir fini les situations 3A et 3B respectivement, mais l'observateur peut aussi introduire les nouvelles situations si les élèves traînent sans rien apporter de plus.

Situation 3B

Maintenant vous changez la définition de votre cours au profit de la définition suivante présentée elle aussi dans d'autres cours :
La racine carrée de a positif, non nul, est le nombre x *tel que* $x = a \div x$.
Qu'est-ce que vous remarquez à propos de $\sqrt{3}$ *et de la valeur présentée par Paul ? Donnez des explications.*

Situation 3C

Maintenant, vous calculez $\sqrt{2}$ *en utilisant les deux définitions. Essayez d'expliquer ce que vous remarquez.*

Les élèves ont travaillé par binômes et ils devaient donner une réponse en prenant parti entre Paul et Louis. Nous avons travaillé avec deux binômes de 4ème, un binôme de 3ème et un binôme mixte comprenant un élève de chaque classe. Il y avait un observateur pour chaque binôme.

La situation permet la confrontation entre deux types de validations :
- validation par la définition
- validation par la machine.

La validation par la définition (VD) est celle présentée par les définitions de la racine carrée, c'est-à-dire la définition multiplicative et la définition par la division données antérieurement. La validation par la machine (VM) est donnée par le résultat, obtenu grâce à la machine, d'une certaine valeur de la racine carrée.

La confrontation entre ces deux types de validation, tous deux acceptés normalement par les élèves, peut permettre l'émergence d'une nouvelle explication relative à la nature des éléments présentés.Comment les élèves résolvent-ils ce décalage ? Cette situation nous permet de vérifier l'objectif f).

III - ANALYSE DES REPONSES

1. SITUATION 1

Le cadre théorique de l'analyse des réponses des élèves à cette situation peut être résumé par le schéma suivant :

- Désignations (Noms et Phrases).
- Définitions (Types, Langage et Domaine de validité).
- Exemples (Corrects et Incorrects).
- Remarques (Utilité et Opérations).

D'une façon générale, les élèves de 4ème, quand nous leur avons demandé la signification de $\sqrt{a}$, ont d'abord essayé de désigner le symbole ou de dire à quoi ça peut servir. Ensuite ils ont essayé de trouver une définition, parfois en utilisant la calculette ou en trouvant des exemples significatifs pour arriver à une définition. Il y a eu deux élèves qui ont dit qu'ils ne savaient rien à propos de $\sqrt{a}$, même pas son nom.

Les élèves de 3ème n'ont pas recouru à la désignation du symbole expressément, c'est-à-dire qu'ils n'ont pas dit "ce symbole désigne racine carrée de a" mais ils ont dit "la racine carrée de a......" en situant déjà les interlocuteurs comme des connaisseurs du symbole. Ils ont donné des définitions la plupart du temps appuyées sur des exemples. Il n'y a pas eu d'élève de 3ème qui n'ait pas donné au moins un exemple et/ou une définition. Tous ces élèves ont présenté une définition vraie ou fausse et trois quarts d'entre eux ont présenté des exemples corrects.

Même si l'échantillon des élèves n'est pas très représentatif nous pouvons remarquer une certaine différence dans les réponses des élèves de 3ème et de 4ème parce que les uns privilégient plus que les autres un certain type de signification de $\sqrt{a}$.

Nous allons voir plus particulièrement les réponses à chacune des catégories que nous avons considérées.

a. Observations relatives aux désignations

Les désignations sont toujours internes aux mathématiques et correctes: elles disent que $\sqrt{a}$ est la racine carrée de a. Il y a eu un élève qui a dit : "$\sqrt{a}$ est un signe. Il simplifie quelque chose".

Le fait que cette question soit posée dans le cadre du cours des mathématiques induit les élèves à situer leurs réponses à l'intérieur de cette discipline. Le nombre d'élèves qui a répondu à cette question nous amène à dire que les élèves connaissent ce symbole soit par l'enseignement (cas des élèves de 3ème) soit par d'autres moyens, par exemple les calculettes.

b. Observations relatives aux définitions

Nous avons distingué différentes parties :

◊ Les types

Nous avions prévu les dix types de définition suivants, mais les seules qui sont présentes dans les réponses des élèves sont les définitions A1, A3, A5, A7, A8, et A10.

Déf A1 : la racine carrée de a est le réel positif b tel que $b^2 = a$, (a positif), et on le note $b = \sqrt{a}$.

Déf A2 : la racine carrée est la fonction inverse de la fonction de R^+ dans R^+ définie par $y = a^2$, c'est-à-dire la fonction de R^+ dans R^+ définie par $y = \sqrt{a}$.

Déf A3 : la racine carrée de a est la mesure de la longueur du côté d'un carré dont l'aire vaut a.

Déf A4 : la racine carrée de a est la racine positive d'une équation du type $x^2 = a$, $a \geq 0$.

Déf A5 : la racine carrée de a positif non nul est le nombre x tel que $x = a \div x$, $x \neq 0$.

Les définitions A6 et A7 qui vont suivre même si elles ne correspondent pas exactement à la manière dont on donne la définition couramment présentent certaines caractéristiques d'une définition et/ou ne peuvent s'inscrire dans aucune des trois autres catégories de réponses que nous avons choisi d'inclure dans ce paragraphe.

Déf A6 : la racine carrée de a représente un nombre réel.

Déf A7 : Modification de la définition par la multiplication en disant que la définition de $\sqrt{a^2}$ est le nombre a tel que $\sqrt{a^2} = a$ au lieu de donner la définition de $\sqrt{a}$.

Définitions avec des incorrections :

Déf A8 : la racine carrée de a est le carré de a.

Déf A9 : nous plaçons dans cette catégorie les définitions de types A1 à A5 qui ne sont pas correctes.

Déf A10 : la racine carrée est une transformation dans le sens d'une diminution ou dans le sens d'une simplification.

Voici quelques exemples relativement aux types présents dans les réponses des élèves :

Exemple de A1 :
"$\sqrt{a}$ est le nombre qui multiplié par lui-même donne a".

Exemple de A3 :
"On pose cette opération lorsque l'on veut trouver la mesure du côté d'un carré en ayant l'aire".

Il n'y a qu'un élève de 4ème qui présente la racine carrée de cette façon.

Exemple de A5 :
"$\sqrt{a}$ signifie que l'on divise par le nombre qui multiplié par lui-même donne a"
ou alors
"$\sqrt{a}$, il faut trouver le diviseur qui au carré est égal à a".

Ces exemples sont présentés par des élèves de 4ème et il n'y a que trois élèves de 4ème qui parlent de la division par rapport à la racine carrée. Nous pouvons observer que la division ne suffit pas à elle seule pour définir la racine mais elle est en liaison avec la multiplication.

Exemple de A7 :
"on appelle racine carrée du réel positif a le réel positif unique a tel que $\sqrt{a^2} = a$".

Il y a sept élèves de 3ème qui présentent la définition de cette façon-là. Or, on peut penser qu'est présente l'idée du nombre multiplié par lui-même mais cette formulation efface toutes les difficultés inhérentes à la racine carrée. Nous en reparlerons dans la conclusion.

Exemple de A8 :
"la racine carrée est le carré d'un réel quelconque" (élève de 4ème).
"$\sqrt{a}$ signifie racine carrée de $a = a^2$" (élève de 3ème).

Exemple de A10 :
Il y a des élèves de 4ème qui ne connaissent pas la racine carrée et alors ils essaient de donner des éléments qui leur semblent pertinents, par exemple :
"cette opération va transformer et diminuer a".
"$\sqrt{a}$ = diminue le chiffre".

Il y a l'idée que la racine carrée diminue, transforme. Nous pensons que cette idée n'a pas de rapports explicites avec la racine carrée comme fonction mais implicitement il y aura chez les élèves la notion de transformation d'un état initial, dans ce cas un nombre, par l'intermédiaire d'un autre élément, ici la racine.

◊ - Le domaine de validité

Il n'y aucun élève de 4ème qui fasse référence au domaine de validité tandis qu'il y en a 8 sur 27 parmi les élèves de 3ème qui indiquent le domaine de validité même s'il n'est pas tout à fait correct. Nous considérons qu'il y a une référence au domaine quand on dit simplement que le "a ne peut pas être négatif".

Exemples :

"On appelle racine carrée du positif A, le réel positif a tel que $a^2 = A$, alors $\sqrt{A} = a$".
"il existe un entier x tel que $x.x = a$; si a est un entier négatif alors on ne peut pas t rouver sa racine carrée".

Dans ce cas, l'élève confond-il les entiers et les réels ou est-ce qu'il veut dire "carré parfait" là où il a mis "entier" ?

Nous pouvons remarquer qu'il n'y a pas beaucoup d'élèves de 3ème qui explicitent le domaine de validité si l'on tient compte qu'ils ont déjà vu les racines carrées en classe.

◊ - Le langage

Les élèves de 4ème présentent la définition dans le langage naturel.Il y a 4 élèves de 4ème et 18 élèves de 3ème qui utilisent le langage symbolique. Les élèves de 3ème essaient de présenter la définition en langage naturel et en langage mathématique même si ce n'est pas tout à fait réussi car il y a beaucoup d'erreurs dans l'utilisation des notations.

Exemples :

"$\sqrt{a} = \sqrt{b^2} = \sqrt{b}$"
"$a \times a = \sqrt{a}$"
"$a^2 = \sqrt{a}$"

Nous observons qu'ils n'ont peut-être pas une connaissance suffisante de la manipulation du symbolisme mathématique pour pouvoir représenter en langage mathématique ce qu'ils disent correctement en langage naturel.

Observations relatives aux exemples

Les élèves de 3ème qui ont présenté des exemples, sauf un, ont tous donné des exemples de carrés parfaits où la racine fonctionne très bien. Il y a quelques élèves de 3ème qui ont donné des définitions un peu confuses ou même fausses et ce sont les exemples qu'ils nous présentent qui nous permettent de voir qu'ils ont compris ce qu'est la racine carrée pour les carrés parfaits. Les élèves de 4ème, pour la plupart, ont aussi présenté des exemples de carrés parfaits sauf deux élèves qui ont présenté $\sqrt{5}$ et $\sqrt{8}$.

L'élève qui a donné l'exemple de $\sqrt{5}$ a dit qu'elle ne connaissait rien de la racine carrée mais "quand on calcule un nombre, par exemple 5, $\sqrt{5} = 2{,}5\ldots$ quand on calcule ça nous donne un chiffre à virgule".

L'autre élève de 4ème a présenté un nombre non carré parfait dans une autre optique. Voilà ce qu'il nous dit : "On pourrait penser que la racine carrée est égale au chiffre multiplié par lui même qui donne la racine carrée du chiffre ou nombre qu'on cherche, soit $9 = 3 \times 3$, $\sqrt{9} = 3$ ... mais quand un chiffre ne peut être multiplié par lui-même $\sqrt{8} = 2{,}\ldots$". Il laisse la réponse ouverte, on dirait qu'il se demande ce qui se passe dans les cas où la définition qu'on pourrait penser juste ne marche plus.

Il n'y a eu qu'un élève de 3ème qui ait présenté un exemple qui n'était pas un carré parfait, il a dit "avec 27 ça ne marche pas puisque $3 \times 9 = 27$; il faut que ce soit un nombre entier, exemple $\sqrt{4} = 2 \times 2$". Peut-être dit-il cela parce qu'il confond carré parfait et nombre entier.

Cette différence entre ces deux élèves nous paraît significative de leur façon de se représenter la situation : le deuxième élève de 4ème, qui n'a pas eu d'enseignement, s'interroge tandis que celui de 3ème affirme, en s'appuyant peut-être sur l'enseignement où les exemples présentés après la définition de la racine carrée, et dans les exercices, marchent le plus souvent très bien.

Nous pouvons nous demander quel est le rôle des exemples par rapport à la compréhension d'un concept, par rapport à une définition. Nous observons que les exemples ont une place très importante dans les réponses des élèves. Toutefois nous reconnaissons aussi que ce sont toujours des exemples qui fonctionnent très bien, qui ne posent pas de véritables problèmes.

d. Observations relatives aux remarques

Il y a des remarques que les élèves de 3ème ont faites par rapport aux opérations qu'on peut ou non faire avec les racines carrées, par exemple la non possibilité de l'addition et la façon de faire les multiplications et les divisions des racines carrées. Les élèves de 4ème ont surtout parlé de l'utilité, par exemple, "il [le signe] simplifie quelque chose" et "la racine, ça sert à calculer".

e. Quelques conclusions sur la situation 1

Les élèves de 3ème qui présentent des définitions correctes se situent tous dans le cadre multiplicatif et il y en a quelques-uns qui confondent la racine carrée et le carré.La plupart des élèves de 4ème se situent aussi dans le cadre multiplicatif mais quelques-uns d'entre eux font des essais relativement à d'autres cadres comme le cadre géométrique ou la division.

Il y a là une différence qui nous paraît significative par rapport aux effets éventuels de l'enseignement. Si dans le cours de mathématiques, les élèves ont vu une définition, il est normal que ce soit celle-là qui soit présente dans leurs réponses. Les élèves de 4ème qui n'ont pas eu d'enseignement ont essayé de découvrir un peu la définition à partir de la manipulation de la calculette. Deux élèves ont dit explicitement "j'ai trouvé grâce au signe de ma calculette". Ces élèves font des essais en mobilisant les connaissances antérieures (multiplication, division, géométrie) tandis que les élèves de 3ème se situent dans le cadre de la définition du cours.

Le fait qu'il y ait sept élèves de 3ème qui aient donné la définition de $\sqrt{a^2}$ au lieu de $\sqrt{a}$ et le fait qu'il n'y ait aucun élève de 3ème qui explicite la racine carrée de a comme un nombre réel nous posent des questions par rapport à des effets possibles de l'enseignement sur les conceptions des élèves. Est-ce qu'il y a dans les conceptions des élèves une partie qui est due à des conséquences de l'enseignement? Nous pouvons lancer des pistes qui nous semblent importantes à prendre en compte :

- peut-être ne distingue-t-on pas assez la définition de $\sqrt{a}$ et les conséquences de cette définition, entre autres, celle selon laquelle pour a positif on a $\sqrt{a^2} = a$. Alors, pour les élèves, il serait tout à fait naturel que pour trouver une certaine racine carrée, il faille trouver le nombre, le mettre au carré et après le mettre sous le signe de la racine carrée. C'est ce que nous comprenons quand un élève dit "la racine de a est a au carré avec le signe de la racine". Nous voyons là aussi une conviction qu'on peut toujours trouver le nombre a pour le mettre au carré : toutes les difficultés des racines et des réels seraient alors nécessairement écartées.

- peut-être la façon de présenter les racines carrées joue-t-elle aussi un rôle important dans le fait que les élèves de 3ème se situent surtout dans le cadre algébrique : on est habitué à traiter la racine carrée d'une façon purement algébrique sans rapport avec l'analyse et les réels. Peut-être l'enseignement ne permet-il pas la liaison entre cette écriture et les nombres réels. Racine carrée de a n'est pas vue comme un nombre réel mais comme une autre chose, par exemple une expression, une opération. On ne fait pas assez de liaisons entre les différents concepts d'un même champ conceptuel.
- peut-être aussi les conceptions des élèves n'ont-elles pas évolué avec l'introduction des nouveaux nombres soit les rationnels soit les irrationnels et les élèves gardent-ils l'idée que les seuls nombres acceptables sont les entiers.
- peut-être aussi les exemples présentés ne sont-ils pas assez significatifs.

2. SITUATION 2

La situation avait pour but de calculer $\sqrt{256}$ et $\sqrt{7}$. Comment les élèves ont-ils fait ?

Le tableau ci-dessous nous présente les différentes procédures utilisées par les élèves. Nous avons considéré cinq grands groupes de procédures et parfois quelques sous-groupes. Nous allons décrire à grands traits ces cinq groupes.

TABLEAU RECAPITULATIF DES PROCEDURES UTILISEES

ELEVES / PROCEDURES		Cathy Vincent (4ème)	Marie-Pierre Ivan (4ème)	Celebija Samia (4ème)	Mahfoud (4ème)	Valérie Christine (3ème)	Daniel (3ème)
	P_1	2 8			2		2
	P_2		2				
	P_3	1		2			
	P_4	4					
	P_5				1		
algébrique	P_6					1 3	1
	P_7	3					
	P_8	5					
décomposition décimale	P_9	6		1			
décomposition additive	P_{10}		1			2	
autres	P_{11}	7					

Les nombres dans les colonnes des binômes correspondent à l'ordre de l'apparition des procédures.

de P_1 à P_5 : procédures multiplicatives

de P_7 à P_8 : procédures de recherche calculatoire de a au lieu de $\sqrt{a}$

◊ Procédure Multiplicative

Nous voulons calculer $\sqrt{a}$, alors nous cherchons le nombre b tel que $b \times b = a$

$$\sqrt{a} = b \quad \Leftrightarrow \quad a = b \times b \qquad a,b \geq 0$$

Les sous-groupes considérés sont relatifs aux différentes manières de trouver ces deux nombres égaux. Par exemple, dans la **procédure 1***, par des encadrements explicites, on trouve des approximations successives où la différence entre le nombre visé et celui qu'on obtient est de plus en plus petite :

$2 \times 2 < 7 < 3 \times 3$
$2{,}5 \times 2{,}5 < 7 < 2{,}8 \times 2{,}8$
$2{,}6 \times 2{,}6 < 7 < 2{,}7 \times 2{,}7$
$2{,}61 \times 2{,}61 < 7 < 2{,}69 \times 2{,}69$
$2{,}62 \times 2{,}62 < 7 < 2{,}68 \times 2{,}68$

Il y a une logique dans le choix des nombres, on essaie tous les nombres quand on passe à l'ordre décimal suivant, et on arrive à la valeur présentée par la calculette.

Daniel (élève de 3ème) : "Au début on est parti d'un grand chiffre qui était vachement large et petit à petit on en trouve un de plus en plus grand, de plus en plus juste".

Il y a eu un autre binôme qui a procédé de la même façon mais quand les élèves passaient à l'ordre décimal suivant, ils n'ont pas essayé tous les nombres mais seulement ceux qui leur semblaient plus probables.

Dans la **procédure 3** on commence par diviser le nombre par deux pour trouver le nombre qui va être multiplié par lui-même.

Exemple : 256 (÷2) --- 128 (÷2) --- 64 (÷2) --- 32 (÷2) --- 16
et $16 \times 16 = 256$ alors $\sqrt{256} = 16$

Cathy (élève de 4ème) : "J'ai divisé par deux et j'ai vu qu'il y avait deux puissance huit et ça fait seize" (est-ce qu'elle a fait $2^8 = 2 \times 8 = 16$?) ; "et en multipliant par 16, ça donne racine carrée de 256".

On utilise la même procédure pour calculer $\sqrt{7}$; on divise 7 par 2 successivement et on obtient :

7 ---- 3,5 ---- 1,75 ---- 0,875 ---- 0,437 5

On fait des multiplications entre ces nombres mais on n'obtient rien de ce qu'on voudrait.

---

* Les numéros des procédures correspondent au tableau récapitulatif.

Exemples : $1{,}75 \times 1{,}75$
$3{,}062\,5 \times 2$
$0{,}875 \times 0{,}437\,5$

Dans la **procédure 5**, on utilise la division par quatre pour obtenir les nombres qu'on veut : $256 \div 4 = 64$ mais $64 \times 64 \neq 256$
$64 \div 4 = 16$ et $16 \times 16 = 256$
alors $\sqrt{256} = 16$

Mahfoud (élève de 4ème) : "je ne sais pas si ça marche tout le temps". Il a essayé avec 162 et, après quelques tentatives il a conclu que ça ne marchait pas.

◊ Procédure par la division

Nous considérons dans cette procédure que calculer $\sqrt{a}$ implique de chercher le nombre b tel que $a \div b = b$ avec $a, b > 0$

$$\sqrt{a} = b \iff a \div b = b \qquad a, b > 0$$

Nous avons prévu qu'il y aurait des élèves qui utiliseraient cette procédure, au moins les élèves qui ont donné une définition en utilisant la division. Or, aucun élève n'a utilisé de procédure de ce type. Nous avons constaté que la division était utilisée non comme procédure mais comme technique auxiliaire pour trouver les nombres à multiplier.

◊ Procédure Algébrique

Nous considérons dans cette catégorie toute procédure qui peut venir de l'utilisation des conséquences de la définition de la racine carrée ou des opérations des racines, comme :

$$\sqrt{a^2} = a \quad (a \geq 0) \qquad \sqrt{a^{2k}} = a^k \quad (a \geq 0) \qquad \sqrt{a.b} = \sqrt{a}.\sqrt{b}$$

Dans la **procédure 6** on divise le nombre par deux, ensuite on regroupe les nombres qu'on obtient par puissances de deux pour pouvoir simplifier avec le carré après l'utilisation de la propriété du produit de racines.

Exemples :

$$256 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$$
$$\sqrt{256} = \sqrt{\underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2}} = \sqrt{2^2 \times 2^2 \times 2^2 \times 2^2} =$$
$$= \sqrt{2^2} \times \sqrt{2^2} \times \sqrt{2^2} \times \sqrt{2^2} = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$$

Utilisation de la même procédure pour $\sqrt{7}$:
On commence à diviser par deux $7 = 3{,}5 \times 2$
alors $\sqrt{7} = \sqrt{3{,}5 \times 2}$

On cherche le nombre qui au carré est égal à 3,5 et on cherche aussi le nombre qui au carré est égal à 2. Comme on n'a pas trouvé ces nombres sur la calculette, on va utiliser des valeurs approchées de 3,5 et de 2 qui soient des carrés parfaits.

Par exemple $3,500\,266\,80 = 1,8709^{2}$ et $2,002\,225 = 1,415^{2}$
alors on a $\sqrt{7} = \sqrt{3,5 \times 2} = \sqrt{3,500\,266\,8 \times 2,002\,225} = \sqrt{1,870\,9^{2} \times 1,415^{2}} =$
$= \sqrt{1,870\,9^{2}} \times \sqrt{1,415^{2}} = 1,415 \times 1,870\,9 = 2,647\,323\,5$

Comme on peut le voir l'utilisation de cette procédure pour racine carrée de 7 complique encore plus le calcul de $\sqrt{7}$.

◊ **Procédure: Recherche calculatoire de a au lieu de $\sqrt{a}$**

Dans cette catégorie, nous considérons ce qui a été fait en utilisant essentiellement les additions et les soustractions. Cette procédure vise, non la recherche de b pour le multiplier et obtenir a, mais la recherche de nombres pour additionner ou soustraire de façon à obtenir a. On perd un peu l'objectif fixé, celui de la recherche de $\sqrt{a}$.

Dans la **procédure 7** on commence par diviser par deux et ensuite on fait des additions, soustractions et multiplications.

Exemple : pour $\sqrt{7}$, on commence à diviser par deux :

7 ---- 3,5 ---- 1,75 ---- 0,875 ---- 0,437 5
a ---- a_1 ---- a_2 ---- a_3 ---- a_4 (de façon générale)

on fait les opérations :

3,5 + 1,75 = 5,25	$a_1 + a_2$
0,875 + 0,437 5 = 1,312 5	$a_3 + a_4$
5,25 + 1,312 5 = 6,562 5	$a_1 + a_2 + a_3 + a_4$
6,562 5 - 6,125 = 0,437 5	$\Sigma a_i - 2a_2^2$ i =1, 2, 3, 4
6,562 5 + 0,437 5 = 7	$2(\Sigma a_i - 2a_2^2)$ i =1, 2, 3, 4

On essaie d'obtenir 7 mais on ne cherche pas $\sqrt{7}$.

◊ **Catégorie par décomposition décimale**

Nous considérons dans cette catégorie les essais faits par les élèves, en décomposant d'une façon décimale le nombre pour trouver un autre nombre par associations variées des chiffres obtenus.

Cette **procédure 9** a été utilisée par un seul binôme et elle consiste à décomposer le nombre dont on veut calculer la racine par les chiffres qui le composent en écriture décimale.

Exemple :

On considère le nombre 256, on divise ce nombre en parties
2|5|6.
On obtient des chiffres indépendants et on fait des associations avec eux
2 et 5 ça fait ensemble 25 et 25 = 5 × 5 on n'obtient rien de ce qu'on voudrait
2+ 5 + 6 = 13 et 13 × 13 = 169 on n'obtient pas le 256

ou alors $2 \times 5=10$ et $5 \times 6=30$ on n'obtient rien non plus ;
on a encore essayé encore une autre 2|5 |6, on a divisé tous les chiffres par deux :

1 |2,5| 3

pour voir si on obtenait quelque chose mais le résultat n'a pas été celui qu'on cherchait. Les élèves ont alors abandonné la procédure.

◊ **Catégorie par décomposition additive.**

Dans la procédure 10 on utilise le théorème-en-acte $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ pour calculer la racine carrée.

Exemples:

pour $\sqrt{256} = \sqrt{250+6} = \sqrt{250} + \sqrt{6}$.

Selon une élève, $\sqrt{250} = 50$, alors il faudrait juste calculer $\sqrt{6}$;

pour $\sqrt{7} = \sqrt{4+3} = \sqrt{2^2+3}$

Cette dernière procédure a été proposée par une élève de 3ème mais, l'autre élève du binôme s'y étant opposée car elle savait que ce n'est pas possible, elle a aussi abandonné son idée initiale.

◊ **Autre catégorie**

Dans cette catégorie nous considérons les procédures difficiles à classer.

Dans la procédure 11, l'élève présente la valeur $\sqrt{5} = 2{,}10$, nous n'avons pas pu savoir d'où elle est apparue, peut-être avait-t-il un vague souvenir d'une valeur approchée de $\sqrt{5}$ (2,2...) ? Ensuite, il fait :

$\sqrt{5}$: $2 \times 2 = 4$ et $10 \times 10 = 100$

alors $4 +$ (1centième de $100) = 5$

D'où "on prend tous les chiffres et on ajoute un centième". L'élève a abandonné cette procédure.

Nous avons observé les procédures de chaque binôme ainsi que les relations de ces procédures avec les définitions présentées dans la situation1 car les binômes ont été choisis en fonction des affinités dans les définitions. D'une façon générale, nous pouvons dire que les élèves peuvent faire des rapports entre la définition et les procédures mais il arrive souvent que ces rapports ne soient pas utilisés dans une première approche. Ils font souvent une distinction entre la caractérisation de la racine comme objet d'étude en utilisant la définition et le calcul d'une valeur de cette racine. Dans ce dernier cas, la racine est vue plutôt comme une opération, et ils cherchent une technique de calcul comme on fait pour une autre opération. Nous pouvons dire que pour calculer une valeur de la racine, les élèves ont recours, non seulement à la définition de la racine carrée mais aussi à des propriétés d'autres opérations ou à d'autres techniques de calcul transposées et adaptées à partir de ces opérations.

Remarques diverses

Nous allons présenter quelques remarques à propos de la situation d'interaction des élèves dans le binôme, de la situation de communication avec le robot et du rôle des essais limités imposé à un des binômes. Cette situation a été conçue de façon à créer une interaction des élèves à l'intérieur des binômes et entre chaque binôme et le robot.

- Situation d'interaction

Au sein d'un binôme, il est difficile de cerner quels sont les apports de chacun dans le choix des procédures. Parfois c'est l'un, parfois c'est l'autre. D'une façon générale et selon les observateurs, il n'y a pas eu vraiment de binôme où un seul élève travaillait. Nous avons pu remarquer qu'à certains moments c'était un élève qui avait un rôle moteur et à d'autres moments c'était l'autre. Il y a eu aussi des moments de découragement. Pour étudier les mécanismes d'interaction il faudrait aller plus loin dans l'analyse des protocoles, étudier quels ont été les apports de chacun, à quels moments s'est établie la prédominance de l'un ou de l'autre, quels ont été les moments de découragement et ceux de relance, de nouveaux départs. Ce sont des questions qui nous sont venues à l'esprit mais notre travail ne nous permettait pas d'aller au fond dans l'analyse des protocoles pour mieux observer les relations entre les deux élèves. Nous avons fait le choix de cette situation de travail à deux pour avoir plus de renseignements sur les procédures des élèves. C'est aussi pour cela que nous n'avons pas donné la calculette aux binômes mais que nous avons créé le robot.

Nous n'avons pas identifié les procédures de chaque élève car notre premier intérêt par rapport à cette situation était l'identification des procédures utilisées en général par ces élèves. Nous n'avons pas repéré de conflits parce qu'ils n'ont pas été explicités.

- Rôle du robot

Le rôle du robot a été important dans la mesure où les élèves n'ont pas commencé à taper sur la machine tout de suite mais ils n'ont demandé l'aide du robot que lorsqu'ils en ont eu vraiment besoin. Il nous a permis de mieux voir presque toutes les étapes, tous les tâtonnements, surtout en ce qui concerne les demandes de calculs. Les élèves n'ont pas eu de difficultés dans l'élaboration des messages car ils n'ont demandé au robot que des calculs. Le robot a servi aussi de miroir relativement aux hypothèses élaborées d'avance par les élèves. Parfois il y a eu des exclamations de surprise relativement aux résultats présentés par le robot. L'aspect le plus important du rôle du robot est celui qui a permis aux élèves de se distancier par rapport à leurs propres hypothèses et leurs propres idées. Il est vrai en revanche que la situation a évolué très lentement et que ceci a eu un côté négatif car cela n'a pas permis d'arriver à une question fondamentale: une fois qu'on a obtenu le résultat de la machine, qu'y-a-t-il après ? Peut-on continuer ou doit-on s'arrêter ? Jusqu'où aller ?

- Rôle des essais limités

Dans un binôme nous avons donné une contrainte supplémentaire en permettant un nombre limité d'essais pour voir si cela poussait les élèves à structurer davantage la recherche de la racine. Finalement, l'effet obtenu a été différent - les élèves étaient très préoccupés de trouver une solution et ils ont demandé au robot de faire beaucoup de calculs sans penser à ce qu'ils faisaient. Pour eux, la priorité était la quantité de demandes mais ils n'ont pensé qu'il pouvait y avoir d'autres procédures que quand ils ont épuisé leurs essais. Il y a eu, quand même, dans le cas de 256, une accélération pour atteindre la solution qu'ils ont trouvée après quelques tâtonnements.

Cette expérience n'est pas concluante par rapport à l'importance de l'introduction des contraintes pour la construction d'une certaine connaissance. Nous pensons tout de même que les contraintes, quand elles sont bien gérées et choisies convenablement, peuvent avoir un rôle important dans l'assimilation des nouvelles connaissances.

3. SITUATION 3

Cette situation nous présente ce que nous avons appelé un conflit de validation, c'est-à-dire la confrontation contradictoire et inacceptable d'un point de vue logique de deux validations normalement acceptées comme vraies par les élèves: la validation par la machine (VM) et la validation par la définition (VD).

Habituellement, nous avons :
VD : vraie ;
VM : vraie ;
VD et VM : vraie.

Dans la situation 3A, nous avons :
VD : vraie ;
VM : vraie ;
VD et VM : faux.

Dans la situation 3B, nous avons :
VD : vraie ;
VM : vraie ;
VD et VM : vraie.

Dans la situation 3C, nous avons à nouveau :
VD : vraie ;
VM : vraie ;
VD et VM : faux.

Nous pouvons dire que ce conflit est externe à l'élève car il vient d'une part d'une croyance du milieu social (une machine ne se trompe jamais) et d'autre part d'une croyance du milieu scolaire (une définition du cours est toujours vraie). Mais, bien qu'il soit externe à l'élève, il va provoquer en lui un conflit cognitif s'il veut garder les deux validations comme vraies. Et ce conflit cognitif peut provoquer la nécessité chez l'élève de trouver une explication en dehors des deux pôles, c'est-à-dire dans la nature de $\sqrt{a}$. Les nombres réels, qui ont été historiquement source de grandes contradictions et de débats, pourraient surgir là aussi après un conflit.

Les différents types d'arguments possibles que nous avons identifiés pour expliquer la contradiction entre les deux validations et pour arriver à prendre parti, sont les suivants:

A - Relatifs à la machine :
Type 1 (T1) : la machine n'est pas assez puissante ;
Type 2 (T2) : la machine donne des valeurs approchées ;
Type 3 (T3) : la machine ne sait pas calculer.

B - Relatifs à la définition :
Type 4 (T4) : la définition est vraie ;
Type 5 (T5): la définition est vraie mais pour certaines valeurs ;
Type 6 (T6) : la définition est fausse.

C - Relatifs à l'existence des nombres :
Type 7 (T7): la racine existe pour tous les nombres ;
Type 8 (T8): la racine existe seulement pour certains nombres ;
Type 9 (T9): la racine n'existe pas ;
Type 10 (T10): la racine est un nombre réel qui ne peut être obtenu par la machine.

D - Relatif à la nature de la question :
Type 11 (T11): on ne demande pas la même chose à Paul et à Louis, au premier on demande la racine et au second le carré de la racine.

E - Autres :
Type 12 (T12): on néglige la différence entre la valeur juste et la valeur approchée.

Nous avons travaillé avec quatre binômes mais plus profondément avec deux d'entre eux, Houda -Vincent et Daniel - Mahfoud.

Dans le protocole de Vincent et Houda, nous observons qu'il y a une référence à presque tous les types d'arguments que nous avions prévus sauf deux: l'argument T11 de la nature de la question et l'argument T10, la racine comme nombre réel, qui ne pouvait pas être utilisé car les élèves n'avaient pas encore étudié les réels.

Nous remarquons que généralement le binôme pose les problèmes de la façon suivante : aussi bien Louis que Paul ont raison si on effectue ce qu'ils ont fait. Pour expliquer le décalage, ils cherchent une explication par tâtonnements mais utilisent certains arguments plus que d'autres, par exemple les arguments relatifs à la machine qui ne sait pas calculer, qui ne donne que des valeurs approchées, ou qui n'est pas assez puissante. Nous observons qu'après avoir constaté que les deux avaient raison, Houda suggère que $\sqrt{3}$ n'existe pas. Il y a donc là des arguments relatifs à l'existence du nombre. Les arguments relatifs à la définition apparaissent quand l'observateur y fait référence et aiguille la réflexion des élèves vers cet aspect du problème. Auparavant, il y avait de la part des élèves une acceptation implicite de la définition.

C'est encore après la nouvelle définition que ce binôme prend parti en disant que Louis a tort mais sans utiliser beaucoup les arguments liés à la définition. Il revient aux arguments relatifs à la machine.

Dans le protocole de Daniel et Mahfoud, les arguments présents sont du type T11, T5, T1 et T4 .

Daniel a gardé pendant toute l'expérimentation le même type d'argumentation: on ne demande pas la même chose à Paul et à Louis et la machine n'est pas assez puissante. Ni la nouvelle définition, ni la nouvelle valeur ne l'ont fait changer. Pour lui, il faut toujours trouver un nombre, le mettre au carré et le mettre sous le signe de la racine et c'est toujours Paul qui a raison.

Mahfoud pense que tous les deux ont raison. Il a commencé à argumenter par le type T11, ensuite il utilise le type T4 et il a utilisé l'équivalence des définitions pour prouver que les deux avaient raison. La nouvelle valeur vient déstabiliser cette position et alors, il prend parti pour Paul en disant que la racine carrée de la machine est plus précise que la racine carrée de la définition.

En résumé, nous constatons deux faits principaux :

- Mahfoud a eu conscience des deux types de validation et d'une différence de précision entre les deux racines carrées. Pour lui, c'est encore la machine qui est plus précise.
- Daniel n'est pas déstabilisé par les contradictions qu'il observe parce qu'il voit toujours la racine du point de vue algébrique.

IV - ANALYSE DE L'EXPERIMENTATION SOUS L'ANGLE DES CONCEPTS DIDACTIQUES

Dans ce chapitre nous allons essayer de dégager quelques règles d'action, théorèmes-en-acte et conceptions sur les racines carrées, à partir des réponses des élèves aux trois situations.

1- Règles d'action

Nous considérons les règles d'action comme les techniques utilisées par les élèves pour trouver les nombres dont ils avaient besoin, par exemple pour multiplier ou pour faire un autre calcul. Ce sont des techniques intermédiaires entre une valeur qu'on a et une valeur qu'on cherche et elles pouvaient éventuellement devenir des algorithmes de calcul de valeur approché de la racine carrée. En voici quelques-unes que nous avons pu identifier.

◊ Division par deux

Cette règle consiste à diviser les nombres par deux afin de trouver des nombres qui puissent être multipliés pour obtenir la racine carrée: $a_n = a \div 2^n$.

Cette règle est la plus souvent utilisée, peut-être parce qu'elle est très simple, elle a des rapports avec les pairs et les impairs et encore parce que le nombre 256 peut induire cette division.

◊ Division par quatre

Cette règle est semblable à la précédente, mais maintenant on divise par quatre. Il n'y a qu'un élève qui utilise cette règle, peut-être parce que 256 est un multiple de 4 et que sa racine s'obtient en divisant par quatre.

◊ Décomposition des nombres en facteurs premiers

Dans beaucoup de cas cette règle se confond avec la division par deux à cause du nombre 256. Il y a eu deux élèves (Cathy et Vincent dans la procédure 4) qui ont fait la distinction quand la décomposition n'était pas équivalente à la division par deux.

◊ Décomposition décimale du nombre

Cette règle consiste à diviser le nombre en parties décimales, par exemple 2 | 5 | 6 pour pouvoir faire des opérations avec les chiffres obtenus. Elle est due, peut-être, au rapport avec d'autres opérations qui tiennent compte de l'importance de la position des chiffres dans le nombre, par exemple l'addition.

2 - Théorèmes-en-acte

Nous considérons le théorème-en-acte au sens de Vergnaud. Dans ce travail nous en présenterons quelques-uns où nous pensons que les élèves ont transposé dans le domaine des racines carrées des propriétés, des relations, des lois d'autres domaines.

◊ $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Ce théorème-en-acte est présent chez les élèves de 4ème ainsi que chez les élèves de 3ème. Il est dû à la transposition dans le domaine des racines de la linéarité des fonctions: $f(x + y) = f(x) + f(y)$. Nous avons présenté des exemples quand nous avons décrit la procédure 10 (tableau page 15).

◊ Si on considère l'ensemble Ω tel que $\Omega = \{a : a \text{ est un nombre à virgule}\}$

(Ω,x) est un monoïde, c'est-à-dire que le produit de deux nombres à virgule est encore un nombre à virgule ou encore la multiplication est une opération interne en Ω.

Ce théorème-en-acte n'est apparu que pour les élèves de 4ème, pour lesquels il est très fort et inconciliable avec le fait que la racine d'un nombre sans virgule soit un nombre à virgule. Nous pouvons nous demander comment les élèves résolvent la contradiction existant entre la loi interne, dérivée de la définition, et celle qui nous dit que le produit n'est plus une loi interne si on considère les valeurs que la machine présente.

Il y a d'autres théorèmes-en-acte, par exemple les encadrements dans les procédures multiplicatives ou alors les propriétés de la racine carrée comme $\sqrt{a^{2k}} = a^k$ dans la procédure algébrique mais nous avons voulu en montrer quelques-uns qui nous paraissaient moins évidents.

3 - Conceptions

Nous considérons les conceptions comme des modèles construits par les chercheurs qui permettent de décrire ou d'expliquer les procédures et les définitions que les élèves ont présentées à propos de la racine carrée. Nous allons présenter quelques-unes des conceptions que nous avons pu identifier dans ce travail.

◊ A - Racine carrée comme multiplication

La racine carrée de a est un nombre b qui multiplié par lui-même donne a :

$$\sqrt{a} = b \Leftrightarrow a = b \times b \quad a, b \geq 0.$$

Cette conception est la plus usuelle mais il y a beaucoup d'ambiguïtés sur le statut de ce nombre qui est toujours indiqué. Nous pouvons dire que ce nombre est aussi bien le a de $\sqrt{a}$ que le b de $\sqrt{a} = b$. Quand a est un carré parfait les élèves font bien la distinction entre a et b même si le plus souvent il y a beaucoup d'erreurs quand ils essayent de noter cela en langage mathématique. Si a n'est pas un carré parfait la nature de b n'est pas toujours évidente. Les élèves parlent de a et jamais de b comme nombre.

◊ B - Racine carrée comme division

La racine carrée de a est un nombre b tel qu'en divisant a par b on obtient b

$$\sqrt{a} = b \Leftrightarrow a \div b = b \quad a, b > 0.$$

Nous avons pu identifier cette conception chez des élèves de 4ème à propos des définitions présentées. Cependant nous n'avons pas pu l'identifier dans les procédures utilisées par ces élèves. Nous nous demandons quelle importance nous pouvons donner à cette conception car elle nous apparaît comme une première approche instable des élèves qui essaient de découvrir la signification de la racine carrée en utilisant la calculette.

◊ C - Racine carrée comme procédé de calcul algorithmique

La racine carrée est un procédé de calcul algorithmique, c'est-à-dire qu'on cherche une valeur de la racine comme on cherche à calculer une valeur d'une autre opération mais avec un autre processus.

Cette conception n'apparaît explicitement ni dans les définitions ni dans les procédures. Cependant il y a eu un binôme (Celebija et Samia) qui a essayé de trouver une technique de calcul des racines carrées en utilisant les décompositions décimales comme on fait pour l'addition.

◊ D - Racine carré vue algébriquement

La racine carrée est un nombre a tel qu'on a $\sqrt{a^2} = a$.

Cette conception apparaît chez les élèves de 3ème soit dans les définitions soit dans les procédures. Nous avons remarqué que cette conception est stable et utilisée souvent par les élèves de 3ème mais aucun élève de 4ème ne l'a utilisée.

◊ E - Racine carrée comme transformation

La racine carrée est une expression qu'on transforme.

Nous ne pouvons pas dire que cette conception est la même que la racine comme fonction parce qu'il nous paraît qu'il y a seulement l'idée de simplification en utilisant les propriétés de la racine ou alors l'idée de diminution en remarquant que par rapport au nombre a, le nombre b obtenu est plus petit.

Nous voyons cette conception apparaître chez des élèves de 3ème et de 4ème, dans les définitions et aussi dans des procédures, par exemple dans les procédures utilisées par Celebija et Samia quand elles veulent chercher un nombre plus petit que 256 et dans des transformations faites en utilisant des propriétés de la racine carrée.

◊ F - Racine carrée comme l'inverse du carré

La racine carrée est l'inverse du carré, on trouve d'abord le carré et ensuite on calcule la racine carrée. Cette conception apparaît dans les définitions et l'introduction qu'a faite l'observateur à propos de la racine carrée au binôme qui ne savait pas ce que c'était. Il n'y a pas l'idée de fonction inverse mais seulement l'idée d'un point de départ différent dans le cas du carré et de la racine carrée.

◊ G - Racine carrée comme division par deux

Il y a des élèves qui confondent le carré avec la multiplication par deux. Dans le même esprit les élèves associent la racine carrée à la division par deux.

Nous voyons apparaître cette conception chez les élèves de 4ème et nous avons pu l'identifier dans les procédures utilisées. Nous pouvons penser que cette conception a pu apparaître à cause du nombre choisi. Nous n'avons pas d'éléments pour conclure si le choix du nombre a été ou non déterminant pour l'apparition de cette conception.

◊ H - Racine carrée comme un nombre réel

La racine carrée représente un nombre réel.

Nous avons pensé que cette conception pourrait apparaître chez les élèves de 3ème. Cependant cette conception n'a pas pu être identifiée car aucun élève n'a indiqué la racine comme un nombre réel et nous ne pouvons pas savoir s'ils considèrent ou non la racine comme un nombre réel.

◊ I - La racine carrée n'est pas toujours un nombre

Cette conception est liée à l'idée que les seuls nombres acceptables sont les entiers. Elle est aussi liée au fait que la racine ne peut pas être toujours calculée, c'est-à-dire qu'on n'obtient pas toujours un nombre entier ou un nombre décimal. Nous voyons cette conception se dessiner quand le a de $\sqrt{a}$ n'est pas un carré parfait et les élèves confondent le a de $\sqrt{a}$ avec le b de $\sqrt{a} = b$. Pour certains d'eux, le nombre $\sqrt{3}$ n'existe pas parce qu'il n'est pas entier. Nous avons vu apparaître cette conception quand nous avons proposé la troisième situation aux élèves.

◊ J - La racine carrée de a est le carré de a

Cette conception apparaît dans les définitions présentées et chez les élèves qui confondent la racine et le carré.

V - QUELQUES CONCLUSIONS

D'abord, nous allons voir dans quelle mesure les réponses et les réactions des élèves aux situations peuvent apporter des éléments de réponse aux questions que nous avions au départ. Ensuite nous présenterons quelques questions que ce travail nous a suggérées.

Nous avons pu voir que pour ces élèves donner la signification de $\sqrt{a}$ n'équivaut pas seulement à définir, mais aussi à nommer et/ou à présenter des exemples, et parfois même à faire d'autres remarques. Nous avons vu aussi que la grande majorité des élèves se situent dans un cadre multiplicatif mais il y a des différences entre les élèves de 4ème et les élèves de 3ème. Les premiers ont un éventail de réponses plus varié, donnént une grande importance à la dénomination et aux exemples tandis que les seconds présentent des réponses plus uniformes relativement aux définitions, donnent aussi beaucoup d'importance aux exemples comme pour les élèves de 4ème et il y a une précision plus grande relativement à la présentation des définitions en utilisant, parfois, le langage mathématique et en spécifiant le domaine de validité.

L'importance accordée par tous les élèves aux exemples nous amène à penser que la compréhension de la racine carrée passe d'abord par les exemples. Certes, mathématiquement, on ne peut pas considérer que la compréhension d'un concept passe par la maîtrise de quelques exemples particuliers, surtout quand ces exemples fonctionnent très bien (cas des exemples présentés par les élèves). Toutefois nous pensons que les exemples jouent un rôle important, non seulement pour concrétiser une définition mais aussi comme moteurs de questionnement, quand ils sont source de contradictions et d'incompréhensions.

Comme les réponses dans la situation 1 étaient individuelles, nous avons pu identifier ce que chaque élève avait écrit sur la racine carrée et, ainsi constituer les binômes pour la 2ème situation. Cette dernière nous a permis de relier ces définitions et les procédures utilisées par les binômes pour calculer des racines carrées.

Elle nous a permis de déterminer quelques procédures utilisées par les élèves pour calculer les racines carrées: la plupart des élèves utilisent une procédure multiplicative mais il y a d'autres essais surprenants pour nous, par exemple l'utilisation des additions et des soustractions. Il y a encore une différence entre les élèves de 4ème et de 3ème dans la diversité de procédures utilisées, plus grande pour les premiers. Les élèves de 3ème utilisent soit la définition du cours soit les propriétés de la racine pour calculer une valeur mais, d'abord, ils essaient la procédure algébrique.

Nous avons pu remarquer que les élèves distinguent la caractérisation de la racine comme objet d'étude, qui implique le recours à une définition, et le calcul d'une valeur de cette racine. Pour calculer une valeur de la racine, les élèves peuvent recourir, non seulement à la définition mais aussi à des propriétés, à d'autres opérations ou d'autres techniques de calcul transposées et adaptées à partir d'autres opérations. La construction de ces procédures a suivi des logiques ponctuelles, par exemple dans le choix des nombres pour faire les encadrements mais, d'une façon générale, les élèves ont calculé les valeurs à l'aide d'essais systématiques, et de tâtonnements. Ce travail ne permettait pas aux élèves d'aller plus loin dans la construction de l'expression générale d'un algorithme.

Nous avons pu identifier, à partir des procédures et des définitions, certaines conceptions des élèves. Nous retrouvons encore une différence entre les élèves de 4ème et de 3ème. Nous avons remarqué que les conceptions des premiers sont plus variées, nous retrouvons toutes les conceptions que nous avons considérées dans l'analyse a priori sauf les conceptions algébriques et celles de la racine comme nombre réel. Les élèves de 3ème ont surtout des conceptions multiplicatives ou algébriques. La racine carrée n'est jamais indiquée par ces élèves comme un nombre réel. Nous considérons que cette restriction de la racine au domaine algébrique est due en partie à l'enseignement. Les différences entre les élèves au niveau du nombre de définitions présentées, de procédures, de conceptions nous amène à penser qu'il y a une forte canalisation de l'enseignement de la racine carrée vers le champ algébrique et qu'il n'y a pas de relation entre la racine carrée étudiée en 3ème et les exemples présentés en 4ème pendant l'introduction de R.

Nous avons encore pu identifier quelques règles d'action, par exemple la division par deux, la décomposition des nombres en facteurs premiers, et quelques théorèmes-en-acte comme : le produit de deux nombres à virgule est encore un nombre à virgule, et $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Relativement aux objectifs que nous avions définis, cette situation nous apporte certaines réponses, sauf pour ce qui concerne l'objectif (e). En fait, nous n'avons aucun élève qui ait esquissé la construction d'une expression générale d'un algorithme pour calculer les racines carrées. Nous trouvons que cet objectif ne pourrait pas être atteint dans cette situation du moins si on reste là. Peut-être serait-ce possible si l'on poursuivait le travail d'une autre façon, par exemple une continuation en donnant aux élèves des algorithmes apparus dans l'histoire ou/et alors en faisant faire un travail par petits groupes où chaque groupe devrait valider une des procédures utilisées. Après, tous ensemble, ils devraient se mettre d'accord pour en choisir une. Ce travail obligerait les élèves à prendre parti, à faire des choix à partir d'une explicitation de critères (efficacité, rapidité, clarté, contrôle,...).

Les élèves ont essayé des procédures utilisant l'addition ou utilisant la division par deux et, dans cette mesure nous pouvons penser qu'il y a là des pistes qui pourront peut-être explorées si nous avons comme objectif la construction d'une expression générale d'un algorithme de calcul approché de racine carrée. La construction de ces algorithmes a encore un autre intérêt, celui qui fait référence au contrôle des élèves sur les résultats affichés par la machine. Ainsi nous rejoignons la 3ème situation.

Dans la 3ème situation nous avons voulu **créer un conflit entre deux validations normalement considérées comme vraies pour les élèves** : la validation par la définition présentée par l'enseignant et la validation par la machine.

Nous avons pu identifier les arguments utilisés par les élèves pour essayer d'expliquer la contradiction. Les types d'arguments sont relatifs à la machine, à la définition, à l'existence de la racine, à la nature de la question. Nous avons pu cerner comment cette contradiction peut être déstabilisante pour les élèves et quelles sont les différentes façons de réagir. Les élèves peuvent garder leur idée initiale sans changer d'argument, sans comprendre vraiment l'enjeu de la situation (cas de Daniel), ils peuvent avoir une idée d'explication de la contradiction mais être sensible au déroulement et essayer de chercher des arguments convaincants pour leur idée (cas de Vincent) ou alors, ils peuvent ne pas avoir une idée au départ et être très sensibles aux arguments de l'autre et aussi aux différentes situations présentées (cas de Houda et Mahfoud).

Cette situation posait aussi le problème du contrôle que les élèves peuvent avoir sur le résultat de la machine. La présence d'arguments disant que la machine calcule mal et la nécessité de prouver cet argument a amené un élève à généraliser le calcul avec les lettres et à dire qu'il faudrait tout faire à la main. Il a posé la question de l'existence de la "formule mathématique" pour calculer les racines carrées. Nous pensons que l'existence d'un algorithme est important pour les élèves qui veulent contrôler les résultats présentés par la machine. Nous avons consulté les programmes et nous avons remarqué que l'algorithme de la racine n'est plus prévu et les problèmes d'approximation existent mais ils ne sont pas nombreux. L'introduction des calculettes dans l'enseignement peut expliquer la suppression de l'algorithme de la racine carrée en privilégiant les raisonnements par rapport aux problèmes de calcul répétitifs. Mais, de cette façon, l'enseignement ne prévoit aucun moyen de contrôle sur les résultats de la machine.

Cette situation donne des **pistes sur une introduction possible des nombres réels**, celle que nous préconisons pour les élèves de cet âge-là : créer des situations de ques-tionnement, de contradictions pour que les élèves puissent s'apercevoir que la nature des nombres introduits est un élément d'explication de certaines contradictions. Nous pensons que, parfois, les élèves croient savoir ce que sont les réels, en particulier la racine carrée parce qu'on en parle toujours et, qu'après en avoir tant parlé, on ne voit plus l'intérêt d'en reparler. C'est l'impression de savoir qui peut être un obstacle pour que les conceptions des élèves sur les racines, vues dans l'enseignement d'une façon algébrique, puissent évoluer. Cette situation nous a montré que ce sont les situations de contradictions, de questionnements qui peuvent créer la nécessité et la conscience du non-savoir, moteur aussi fondamental pour avoir envie d'apprendre.

Ces situations et certains de ces résultats nous posent quelques questions en ce qui concerne leur **exploitation pour construire une séquence d'enseignement** qui puisse être utilisée dans une classe. Comment utiliser le théorème-en-acte du produit des nombres à virgule qui nous apparaît comme très pertinent pour déstabiliser les connaissances antérieures des élèves et les faire évoluer dans une recherche de sens par rapport aux contradictions rencontrées ?

Nous avons vu que l'observateur a eu un rôle important pour ne pas laisser les élèves s'en tenir à un seul argument. Nous nous demandons quel sera le rôle de l'enseignant dans une séquence d'enseignement, d'une part pour laisser émerger tous les arguments et d'autre part pour arriver, dans un temps didactique acceptable, à faire que les élèves construisent un certain savoir.

VI - QUELQUES ELEMENTS D'UNE ANALYSE CRITIQUE A POSTERIORI

1 - UN POINT DE VUE

Au début de l'article, nous avons dit que ce travail s'inscrit du point de vue didactique dans le champ des travaux sur les conceptions. Considérons maintenant ce point comme quelque chose allant de soi, quelque chose qui soit acceptable par toute la communauté des didacticiens et essayons de voir quels sont les apports et les limites de ce travail.

a - Les limites

Commençons par les limites en sachant qu'il y en aura d'autres selon la perspective d'où on se situe.

Les conceptions des élèves que nous pensons avoir dégagées à travers les situations présentées sont prises comme des éléments a priori qui appartiennent déjà aux élèves. Selon ce modèle, **ils ont des conceptions sur la racine carrée**, par exemple une conception multiplicative. Ce modèle permet d'expliquer que les élèves aient présenté une certaine réponse face aux situations proposées. Ce langage du "ils ont des conceptions" peut paraître abusif, trop fixiste, trop statique pour pouvoir donner une vision assez satisfaisante de la dynamique de la réalité. Les modèles que nous avons construits dans ce travail peuvent apparaître comme des modèles que les adultes construisent en tenant compte de ce qu'ils savent à propos de la racine, utiles pour expliquer des procédures d'adultes mais non celles des élèves, encore adolescents.

Est-ce que ce sont vraiment ces modèles qui donnent une explication et une description plausible de la réalité ? Est-ce que ces mêmes élèves dans d'autres situations semblables reproduiraient vraiment les mêmes procédures pour qu'on puisse faire les mêmes inférences ? Un autre chercheur ferait-il les mêmes inférences ?

Les limites de ce travail se situent au niveau de la validité des inférences qui ont été faites. Ainsi, nous pourrions dire que les conceptions des élèves peuvent être autres que celles que nous avons dégagées tenant compte du fait que les conceptions existent en situation et non a priori et en construisant des modèles plus appropriés à la réalité des élèves. Ce que nous disons de ce travail peut être appliqué à tous ceux qui ont "dégénéré" de l'esprit du travail des concepteurs tel qu'il avait été imaginé à l'origine.

b - Les apports

Maintenant, nous allons nous pencher sur quelques points qui nous semblent intéressants et qui découlent en quelque sorte des limites que nous venons de signaler.

Les apports de ce travail concernent la construction même de certains modèles ayant pour but d'expliquer et de décrire les différentes procédures utilisées par les élèves lorsqu'ils ont été confrontés aux situations. Nous avons dégagé, à partir des traces écrites ou orales, différentes règles d'action, théorèmes-en-acte et conceptions qui retravaillées et adaptées nous apparaissent pertinents pour construire une éventuelle séquence d'enseignement. C'est le cas du "produit de deux nombres à virgule est toujours un nombre à virgule" qui est une connaissance assez stable que les élèves manifestent, dûe peut-être à des enseignements anciens. Il y aurait d'autres aspects du même genre que nous pourrions relever mais nous laissons cela de côté.

Ce travail permet aussi à d'autres chercheurs intéressés par la racine carrée de se situer par rapport à lui, soit qu'ils travaillent sur la même voie et essayent de confirmer ou d'infirmer certaines de nos hypothèses de travail, soit qu'ils en identifient d'autres, soit qu'ils y trouvent des pistes pour des travaux complètement différents. Remarque assez générale, elle prend son importance particulière par le fait que les travaux didactiques sur la racine carrée ne sont pas abondants.

Les situations trouvées nous semblent dignes d'intérêt pour une éventuelle ingénierie didactique même si, par le fait que ce serait des situations de questionnement auxquelles les élèves ne sont pas habitués, on devait changer le contrat habituel dans lequel les élèves sont placés ainsi que certains aspects moins contrôlables de ces situations.

2 - UN AUTRE POINT DE VUE

Nous nous sommes situés du point de vue de quelqu'un qui ne met pas en cause la notion même de conception. Le fait qu'il y ait des didacticiens pour qui cette notion ne va pas de soi nous a aidée à réfléchir, non sur ce que chacun de nous met derrière le mot conception mais sur ce que nous avons mis derrière ce mot dans ce travail particulier. Qu'est-ce qu'une conception sur les racines carrées, pour nous ? Nous ne pensons pas que nous ayons considéré les conceptions dans notre travail comme quelque chose de fixe ni comme une application d'une définition de ce qu'est une conception, par exemple selon Vergnaud. Quand nous disons "conceptions" nous disons "pour l'individu la racine carrée, qu'est-ce que c'est ?". Une conception sur les racines carrées serait un état de la connaissance d'un individu à un moment et dans une situation donnés où rationnellement l'individu s'est posé la question "qu'est-ce que c'est...?". Cette question peut recevoir plusieurs réponses différentes selon les individus et selon le même individu à des moments et dans des lieux différents.

Quand est-ce que l'individu est en mesure de répondre à cette question ? Nous répondons que ce n'est pas certainement au moment où nous la lui avons posée, mais sûrement beaucoup plus tard, ou alors jamais si cette question n'a pas de sens pour lui. Nous savons maintenant que nous n'avons pas répondu à cette question mais plutôt à des questions du type: "quelles sont les connaissances antérieures que les élèves mettent en oeuvre pour résoudre ces situations ?" ou alors "quels sont quelques effets possibles de l'enseignement sur les racines carrées?".

En nous situant dans cette ligne, nous pouvons affirmer qu'en fin de compte notre travail ne traite pas des conceptions. Nous n'allons pas généraliser l'analyse que nous avons faite pour ce travail mais nous pouvons nous demander finalement si c'est vraiment des conceptions que d'autres travaux traitent sous ce nom-là. Il faudrait une analyse approfondie que nous ne sommes pas en mesure de faire. Chacun peut se situer dans le cadre d'une certaine définition, mais ça ne veut pas dire que celle-ci ne peut pas être à terme objet d'une discussion généralisée dans la communauté.

BIBLIOGRAPHIE.

ARTIGUE M. (1984), Contribution à l'étude de la reproductibilité des situations didactiques. Divers travaux de mathématiques et de didactique des mathématiques. *Thèse d'état, Université de Paris VII.*

BERTHELOT C. et R. (1983), Quelques apports de la théorie des situations à l'étude de l'introduction de la notion de limite en classe de 1ère A, *Mémoire de DEA, Université de Bordeaux I.*

BOSCHET F. et ROBERT A. (1984), Acquisition des premiers concepts d'analyse sur R dans une section ordinaire de première année de DEUG, *Cahier de didactique des mathématiques n° 7, IREM, Paris VII.*

CAJORI F. (1951-1952) *A History of Mathematical Notation,* Open court.

CARACA BENTO DE JESUS (1984), *Conceitos Fundamentais de Matematica,* Livraria / S / à da Costa Editora, Lisboa.

CAVAILLES J. (1962), *Philosophie Mathématique,* Hermann.

CHEVALLARD Y. (1988), L'univers didactique et ses objets : fonctionnement et dysfonctionnements, *Interactions didactiques n° 9, Universités de Genève et Neuchâtel, pp. 9-42.*

COLETTE J.P. (1973), Histoire des Mathématiques, *V1, V2, ERPI, Montréal.*

CORNU B., Quelques obstacles à l'apprentissage de la notion de limite, *LSD, Grenoble.*

CORNU B., Grandes lignes de l'évolution historique de la notion de limite, *LSD, Grenoble.*

DAHAN-DELMEDICO A., PEIFFER J. (1982), *Routes et Dédales,* Etudes Vivantes.

DEDRON et ITARD (1959), *Mathématiques et Mathématiciens,* Magnard, Paris.

DESANTI J.T. (1976), *La crise des irrationnels in Logique et Connaissance Scientifique,* Encyclopédie de la Pléïade.

DOUADY R. (1980), Approche des nombres réels en situation d'apprentissage scolaire, Enfants de 6 à 11 ans, *RDM n° 11, p.p. 77 à 111.*

DUROUX A. (1982), La valeur absolue : difficultés majeures pour une notion mineure, *Mémoire de DEA, Université de Bordeaux I.*

GLAESER G. (1983-1984), Réflexions préalables à une étude des obstacles, *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique, n° 56, Grenoble.*

ITARD J. (1961), Les livres arithmétiques d'Euclide.

IZORCHE M.L. (1977), Les réels en classe de seconde, *Mémoire de DEA, Université de Bordeaux I.*

LELONG-FERRAND J. (1985), Les fondements de la géométrie, *PUF.*

MARGOLINAS C. (1985a), Questions sur l'enseignement des nombres réels, *Mémoire de DEA, Université de Bordeaux I.*

MARGOLINAS C. (1985b), Ecriture des nombres et obstacle des infiniments petits chez les élèves de troisième et de seconde, *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique, IMAG, n° 72, Grenoble.*

OVAERT J.L. (1983), *Analyse vol. I,* Cedic.

ROBERT A. (1982), L'acquisition de la notion de convergence de suites numériques dans l'enseignement supérieur, *Thèse d'état, Université de Paris VII.*

ROBERT A. et al. (1984), Exposé de synthèse sur les problèmes de l'enseignement de l'analyse, *Actes de la IIIème école d'été de didactique des mathématiques, IMAG, Grenoble.*

ROBINET J. (1986), Les réels : quels modèles en ont les élèves ? *Educational Studies in Mathematics, vol. 17, n° 4 pp. 359 à 386.*

VERGNAUD G. (1983), Introduction, *RDM n° 4.1, pp. 9 à 25.*