INSTRUMENTATION DE NOTIONS MATHEMATIQUES :
UN EXEMPLE : LA SYMETRIE

Régis GRAS
Université de Rennes I

Je présente ici un panorama d'une recherche pédagogique sur l'enseignement des mathématiques en 4ème et 3ème et je la spécifie par une étude didactique de la notion de symétrie orthogonale. Commencée à Vannes en 1972, structurée peu à peu sur le plan national (O.P.C.)[1], conduite avec expérimentation, cette recherche définit encore le quotidien de nombreuses classes de la région. La description que je vais en faire me semble utile, d'une part pour signifier objectifs et méthodologie et les illustrer, mais, d'autre part, pour continuer à exorciser de vieux démons - à notre sens - démons non chassés après le changement, pourtant important, des programmes de 1979.

Entre une idéologie de type positiviste (qui ne se fonde que sur des faits d'expérience) et une idéologie de type intellectualiste («l'accès à la connaissance est spirituelle», «la manipulation est un bruit de fond très dommageable à la conceptualisation» ou «l'espace physique est fondamentalement distinct de l'espace mathématique»), nous cherchons modestement une voie médiane.

Mais, que l'on ne s'y trompe pas, la vision globale et la réflexion psychodidactique n'ont pas précédé nos démarches de 1972. Disons qu'elles ont remonté peu à peu leur cours, éclairant, quand elles le pouvaient, d'une lumière nouvelle, les innovations insuffisamment contrôlées au départ, diffuses et plus empiriques que scientifiques. Ceci explique, sans les justifier, les difficultés de communication donc de reproduction de notre expérience. Mais...

A notre défense, il suffit, je pense, d'évoquer la situation de l'enseignement des mathématiques dans les deux années qui ont suivi la réforme des programmes de 4ème et 3ème de 1971. Une matière formelle née d'une prétention axiomatique à un constructivisme linéaire des structures d'ensembles numériques et du plan mathé-

(1) Equipes nationales engagées : Caen, Clermont, Dijon, Limoges, Paris-Nord, Poitiers, Rennes, Toulouse.

«petit x», n° 1, pp. 7 à 39, 1983.

matique vient de balayer la mathématique empirico-déductiviste de «papa». La majorité des élèves ne comprennent rien ni au contenu, ni aux objectifs de nos spéculations, butent sur une verbalisation excessive de l'activité du maître et ne peuvent en pratiquer la syntaxe. Même parmi ceux qui jouent notre jeu et franchissent ces obstacles, certains ne font que mémoriser une mathématique inopératoire, incapable de formuler autre chose que des évidences et de résoudre le moindre problème de réinvestissement. La réforme de 1971 échoue particulièrement sur ses objectifs novateurs(1) : la place du verbe et la nécessité permanente de la spéculation handicapent davantage les élèves déjà socio-culturellement défavorisés ; les concepts mathématiques sont inopérants dans les domaines où le réinvestissement s'impose (vie pratique, physique, sciences naturelles,...) ; l'ouverture vers les filières scientifiques et particulièrement techniques ne se fait pas, bien au contraire, etc... Tout ceci peut facilement faire comprendre la foi et l'enthousiasme de notre engagement dans une voie de sauvegarde, non seulement des enfants entrés dans le cursus 4ème-3ème, mais également du pouvoir des mathématiques dans les activités scolaires ou pratiques où elles peuvent intervenir. Bien évidemment, notre ambition ne va pas jusqu'à croire à la réduction totale des problèmes cognitifs et affectifs propres à la tranche d'âge 12-15 ans, ni même à l'absence d'émergence de nouvelles difficultés. Je tenterai de prendre au fil de ce papier la distance que le temps permet maintenant, distance autorisant une vue évaluative critique de notre action. Mais, avant de spécifier notre étude à la symétrie orthogonale, je crois nécessaire de la placer dans notre problématique et vis-à-vis des solutions retenues.

I – NOTRE DEMARCHE GENERALE ET NOS OBJECTIFS.

Au risque d'incohérence de l'exposition, mais en échange d'une meilleure saisie de nos objectifs, je décris rapidement les grandes lignes de notre démarche.

1.1 Un découpage préalable de la matière géométrique à enseigner en 4ème et 3ème, y compris la droite graduée et l'écart angulaire ; ce découpage s'accompagne d'un réordonnancement, non neutre par rapport à nos intentions et ne coïncidant pas avec l'ordre «suggéré» par les programmes officiels (de 1971). Les points d'ancrage des notions sont, essentiellement, les transformations planes. A elles, nous allons rattacher, à travers des thèmes, pratiquement toutes les notions de géométrie figurant dans les curricula des deux classes. Autrement dit, les transformations qui ne figurent pas généralement parmi les objets d'enseignement institutionnels, sont plus étudiées pour les notions qu'elles dynamisent que pour elles-mêmes. En outre, nous extrayons du programme d'algèbre les concepts rattachables, de façon naturelle, à cette nouvelle architecture. C'est le cas précisément de :

(1) La réforme de 1979 n'est-elle pas elle aussi plus comprise, en réalité, comme un changement de contenu mathématique que comme un changement d'esprit ?

thèmes	transformations associées	notions mathématiques activées
montages articulés	transformations diverses (affines ou non)	▪ invariants d'une transformation ▪ distance
soleil et ombre	symétrie centrale (cf. montage H)	▪ parallélogramme ▪ «Thalès» du milieu ▪ moyennes diverses (arithmétique, géométrique) avec fonctions $x \longmapsto -x$, $x \longmapsto \frac{1}{x}$ ▪ symétrisation d'ensemble ($\mathbb{Z}$, puissances de 10, $\mathbb{Q}$)
glissement	translation (cf. montage T)	▪ bipoints, vecteurs ▪ fonction : $x \longmapsto x + a$ ▪ composition fonctionnelle : $x \longmapsto -x \longmapsto -x + a$
pliage (1)	symétrie orthogonale (cf. montage D)	▪ médiatrice, bissectrice ▪ figures admettant des axes de symétrie ▪ quelques fonctions numériques, représentations
agrandissement, réduction	homothétie (rapports positifs ou négatifs) (cf. montage H)	▪ produit d'un vecteur par un réel ▪ «Thalès» ▪ pourcentages ▪ applications : $x \longmapsto ax$ puis $x \longmapsto ax \longmapsto ax + b$
ouverture sur les angles	rotation (cf. montage R)	▪ angles, écarts angulaires ▪ composition ou décomposition de transformations

(1) C'est ce thème que nous développons plus loin.

Contrairement au constructivisme total auquel prétendent les programmes de 1971, nous utilisons, dès le début de la classe de 4ème des notions et des termes primitifs en leur sens familier. C'est le cas particulièrement de distance, de milieu et d'angle que nous fonctionnalisons avant que leur statut théorique ne soit établi. Ceci nous évite de faire table rase des acquis antérieurs et de nous limiter en 4ème à une géométrie appauvrie, stérilisée de ses aspects métriques que les programmes puis les enseignants se chargeaient de mystifier. Ajoutons que les programmes récents ne portent plus les mêmes ambitions.

1.2 A **chacun des thèmes énoncés** plus haut, correspondent généralement 4 séquences dont l'ordre chronologique n'est que partiel :

$$\begin{tikzcd}[row sep=tiny] & & 3 \\ 1 \arrow[r] & 2 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & & 4 \end{tikzcd}$$

a) Séquence 1.

Les travaux s'effectuent en groupes de 3 à 4 élèves en classe ou en demi-classe. Ces élèves, au cours d'échanges interactifs[1], se construisent des modèles implicites de la transformation et effectuent quelques simulations contrôlées des effets de la machine à transformer[2] avec laquelle ils ont, dans un premier temps, manipulé de façon plus ou moins dirigée

b) Séquence 2.

Ces simulations conduisent à des formulations dialectisées de leurs actes, des algorithmes et des invariants de la transformation, à travers des réalisations de dessins de figures planes.

c) Séquence 3.

Une activité numérique avec travaux sur quadrillage est proposée de façon concomitante : c'est bien souvent le traitement d'une forme analytique de la transformation géométrique qui sert de prétexte à des tâches numériques. D'autres fois, la notion algébrique activée prend ses images, voire son sens, dans la transformation même : par exemple, la symétrisation de $\mathbb{N}$ ou bien la moyenne arithmétique s'appuient directement sur des représentations géométriques que la symétrie centrale dynamise.

(1) G. Brousseau (I.R.E.M. de Bordeaux) parlerait ici de «dialectique de l'action».

(2) Je fournis en annexe 1, pour les enseignants motivés, un tableau récapitulatif des pièces meccano servant au montage des machines citées plus haut, à l'exception de la machine R.

d) Séquence 4.

L'élève rencontre ici le modèle mathématique. Plus précisément, la confusion plan physique - plan mathématique étant admise pour l'essentiel des tâches, l'élève valide à travers le modèle des conjectures suggérées par ses activités précédentes ainsi que certains théorèmes en actes(1) (cf. les travaux de Gérard Vergnaud à ce sujet) non socialement reconnus et certaines propriétés non évidentes ou non accessibles à la manipulation. C'est le cas, entre autres, de celles qui mettent en jeu plusieurs transformations (composition de 2, 3, ..., 2n, 2n + 1 symétries centrales, par exemple).

1.3 Nos objectifs éducatifs.

Ceux-ci, comme je l'ai déjà laissé entendre, n'ont vraiment été explicités qu'après 2 ou 3 années d'expérimentation. Ils relèvent de deux catégories.

a) Objectifs généraux.

- Permettre aux capacités et aux centres d'intérêt distincts de s'épanouir dans le 1er cycle, tronc commun devant préparer sans privilège, à la fois au 2ème cycle, à l'enseignement technique court ou à la vie active ;

- augmenter les chances d'intégration et de réussite socio-scolaires pour les enfants issus de milieux socio-professionnels et culturels défavorisés ;

- donner une signification aux activités scolaires en laissant une large place aux champs de réalisation des contenus mathématiques (illustration, instrumentation et application de ceux-ci).

b) Objectifs spécifiques.

— De type cognitif :

- munir l'élève de connaissances opératoires, c'est-à-dire capables d'être fonctionnelles dans des situations diverses de problèmes ;

- développer, bien sûr, certaines capacités intellectuelles comme rigueur, objectivité, maîtrise du symbolisme, mais également sens de l'organisation, de l'optimisation, de la conjecture, etc... ;

- développer des attitudes scientifiques, non seulement hypothético-déductives, mais également inductives ;

- conduire à une connaissance cohérente des faits mathématiques permettant un réinvestissement dans d'autres disciplines.

(1) C'est-à-dire non explicités, «établis» à travers des actions montrant la stabilité de phénomènes au point que celle-ci s'érige en loi, non validable par une preuve autre qu'une «monstration».

— **De type socio-affectif :**

- participer à la socialisation de l'élève, c'est-à-dire développer le sens de l'organisation et de l'exécution d'une tâche commune ainsi que la tolérance de points de vue différents (cohérents) ;

- permettre, non contradictoirement, le développement de l'autonomie ;

- modifier le rapport de l'enfant au savoir en modifiant la représentation de celui-ci, traditionnellement champ clos, achevé et objectif ; et en modifiant les relations de l'enfant au maître, à l'adulte, à ses camarades par une attitude critique des arguments d'autorité.

Les paragraphes 1.1 et 1.2 devraient apparaître maintenant comme significatifs d'une mise en pratique réelle de ces objectifs dans la classe. Je vais, cependant, présenter avec plus de détails le thème de la symétrie orthogonale qui me semble être l'un des plus caractéristiques de nos intentions et démarches. Il offre de plus l'avantage d'être illustré par les images de 3 films super 8, «Reflets et taches», que nous avons réalisés à l'I.R.E.M. de Rennes et qui y sont à votre disposition.

II — LE PLIAGE.

Les objectifs didactiques se centrent sur l'acquisition fonctionnelle des notions suivantes :

- **la symétrie orthogonale** : algorithme de construction associé, identification de ses invariants, globaux ou non : axe de la symétrie, direction orthogonale à celle de l'axe, distance de 2 points, angles de droites, etc..., aspect générateur des isométries du plan ;

- **la médiatrice** : construction et identification ou reconnaissance, propriété caractéristique, axes de symétrie d'une figure ;

- **la bissectrice** : axe de symétrie d'un secteur, construction et identification, propriété des points de la bissectrice d'un secteur.

L'approche de ces notions est délibérément manipulatoire et en petits groupes en raison des objectifs éducatifs que nous nous sommes fixés. Mais, voyons de plus prés le matériel utilisé et les raison de son choix.

2.1 **Le symétriseur** (machine D).

L'annexe 2 présente l'éclaté du montage en barres de meccano. Notons bien que si les barres AB et AD d'une part et BC et CD d'autre part, doivent avoir les mêmes longueurs, il n'est pas nécessaire par contre qu'elles soient toutes égales.

La forme «cerf-volant» conduit à la symétrie orthogonale, tout comme la forme «losange». Cette analyse, a posteriori, mérite d'être évoquée en classe, à la suite de l'étonnement des élèves découvrant des aspects différents du symétriseur. Mais, direz-vous, pourquoi une manipulation sur un appareil, apparemment sophistiqué, plutôt qu'à l'aide de calques ou tout simplement plutôt que la donnée directe de l'algorithme de construction, voire de la définition de la symétrie orthogonale ?

Tout d'abord, le symétriseur ne «sort» pas du plan comme le calque. La correspondance est véritablement ponctuelle et non globale, peut-être excessivement cinématique. Mais, elle se perçoit immédiatement, telle qu'elle pourra se définir et contient déjà sa propriété involutive : à la pointe traçante en position V correspond bijectivement la pointe traçante dans la position R. Le matériel permet, en outre, l'ignorance totale des effets obtenus et la maladresse de l'expérimentateur. Pour obtenir une bonne fiabilité du report de dessins, l'instrument exige cependant un contrôle, par deux élèves, de la rigidité de la barre AC et sa parfaite fixation.

De plus, la manipulation du calque admet un nombre de degrés de liberté important, liberté allant docilement jusqu'au froissage ou à l'étirement. A l'opposé, le symétriseur présente des contraintes dues à ses liaisons qui limitent les variables intervenant dans la construction d'un dessin plan. Cet aspect offre l'avantage d'éviter les dérives fréquentes en situation scolaire et de spécifier, avec une incertitude limitée, les montages divers par rapport aux transformations, ce qui n'est pas le cas du calque.

Le montage meccano offre également la possibilité d'associer plus étroitement la technologie et les mathématiques. Monter un symétriseur[1], le démonter, varier l'assemblage des barres, conduisent les élèves à se poser ou à nous poser des questions sur le rôle des articulations, les degrés de liberté d'un système articulé, sur l'identification — possible ou très complexe — des transformations associées à un montage déterminé. Autant d'ouvertures auxquelles la manipulation du calque ne conduit pas, de même que la donnée formelle de la symétrie.

Le symétriseur permet aussi l'analyse progressive des invariants de la transformation : nous en reparlerons par la suite. Il conduit donc à la modélisation et l'explicitation de l'algorithme de construction. Il est prêt à être simulé, pas à pas s'il le faut, par un traçage à la main et il est disponible fidèlement pour la validation des résultats obtenus. En cas d'erreur de l'élève dans la prévision de son effet à travers une telle simulation, il oppose, avec son inertie et sa rigidité, la résistance d'un matériel qui n'accepte aucun compromis. Mais le renvoi à l'élève de son erreur ne présente pas pour lui le même caractère, traumatisant quelquefois, du renvoi par le maître ou la

(1) En général, pour gagner du temps, le matériel est présenté tout monté.

classe entière. Il s'agira pour l'élève d'accéder aux capacités de la machine, puis anticiper ses effets et enfin la dépasser, en disposant de la réflexion et d'un champ plus étendu que celui du symétriseur. Le jeu contre le maître n'est pas comparable : on y est battu d'avance, celui-ci dispose des clés, voire des règles, la victoire n'est qu'illusion.

Enfin, la manipulation de la machine enrichit toute l'appréhension sensorimotrice de la transformation. Les figures et même les problèmes sont dynamisés par l'évocation manipulatoire : la perception se trouve même confortée par le modèle miroir et le modèle pliage, «isomorphes» à la machine.

2.2 Séquence manipulatoire.

Je rappelle qu'elle se déroule en groupes de 3 à 4 élèves, groupes formés librement, chaque groupe disposant d'un symétriseur. Cette séquence dure 1 h30 à 2h selon les groupes. Une fiche de travail dirigé (1) est remise à chaque élève en début de séance. Aux questions posées s'adjoignent, au fur et à mesure, des réponses écrites faisant l'objet préalable d'un consensus du groupe. Certaines réponses exigent des prises de notes plus longues, un tableau de mesures, par exemple, dont se charge un secrétariat de l'équipe. Le maître veille, autant que possible, à la rotation des charges dans le groupe : manipulations, mesurages, finition des traçages, secrétariat, etc... Mais, il faut reconnaître que l'influence du leader inévitable n'est pas sans effet sur la distribution des tâches et les prises de décision.

J'indique ci-dessous dans l'ordre les activités vécues par les élèves lors de cette première séquence.

2.2.1 Transport de dessin.

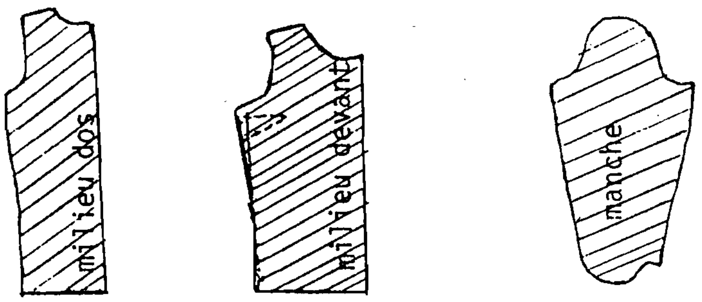
Cette activité vise à placer le thème au sein des problématiques des classes de 4ème et 3ème. Par un processus de branchement, l'enseignant mettant l'élève en situation de report de figure par une symétrie spontanée, fait émerger les premiers succès certes, mais aussi les premières difficultés, les premières limites nécessitant le dépassement de cette approche et l'acquisition d'un procédé plus fiable.

(1) Les fiches que j'utilise dans cet article, ont été établies en 74-75 par une équipe d'enseignants de Vannes et de Rennes, Yvon BLOC'H, Danièle BOISNARD, Alain DUPIRE, Marie-Thérèse LE CAM, Jack LE GUNFF et Régis GRAS. Je remercie ici A. DUPIRE qui m'a transmis des notes récentes sur le thème «Pliage».

Voici le texte proposé aux élèves.

1) Peut-être avez-vous vu travailler une couturière ou un tailleur ou plus simplement votre maman ?
Pour tailler un vêtement, ils disposent d'un patron ou bien ils l'établissent.

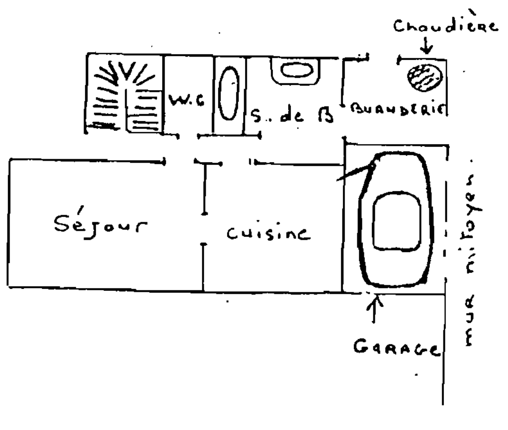
Par exemple : voici le patron d'un chemisier. (Le dessin est réduit pour des raisons d'encombrement sur la feuille).



Quelle est la particularité de ce patron par rapport au vêtement qu'il va servir à tailler ? Comment doit-on s'en servir pour tailler le vêtement désiré ?

2) Un architecte prépare les plans de maisons jumelées pour un lotissement.

Etablir le plan de la maison contiguë à celle-ci :



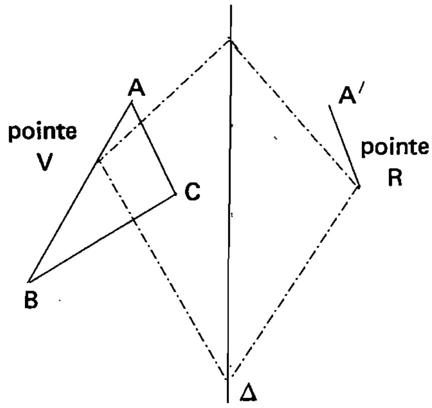
On note généralement la procédure suivante : prolongement des lignes horizontales, report sur les demi-droites des longueurs mesurées sur le dessin initial, traçage par contiguïté. Mais bien souvent, le renversement gauche-droite ne s'effectue pas ou s'effectue qu'épisodiquement, une image locale se trouvant simplement translatée.

2.2.2. Propriétés générales du symétriseur.

L'objectif ici est de faire dégager la propriété de conservation ou non de la forme, du sens, des longueurs et des directions.

Activité 1.

Plusieurs dessins sont proposés aux élèves : un triangle, un cercle, un F et un chien (très polygonal !). La pointe V du symétriseur suit, par exemple, le contour du triangle ABC posé sur la feuille de dessin. Pendant ce temps, la pointe rouge R trace son image A'B'C' de l'autre côté de la barre. A la suite des 3 dessins, les questions suivantes sont posées.



Entoure les affirmations avec lesquelles tu es d'accord et raie les autres.

La machine D donne d'une figure, une image :

de même forme
de forme différente (1)
ayant une position renversée (2) par rapport à la figure elle-même
ayant une position non renversée
de même grandeur
de grandeur différente

Place une règle sur la planche et suis avec la pointe verte le bord de cette règle. La pointe verte dessine une droite.
Que dessine la pointe rouge ?

En reprenant cette expérience de nombreuses fois, cherche s'il existe une ou plusieurs positions de la règle pour lesquelles la pointe verte et la pointe rouge dessineraient la même droite.

(1) Cette question n'est pas superflue, les élèves rencontrant un appareil pour lequel la réponse est «non» : il s'agit de l'inverseur (type Peaucellier).

(2) Cette expression ambiguë correspond à l'effet du miroir : échange gauche-droite.

Compare les directions d'une droite et de son image : dans les tableaux suivants, entoure les bonnes réponses et raie les mauvaises.

Chaque droite est parallèle à son image
Certaines droites sont parallèles à leur image
Aucune droite n'est parallèle à son image

Complète les phrases suivantes :

L'image d'une droite est une droite
1) parallèle si ....
2) non parallèle si ....
Les images de deux droites parallèles sont deux droites ....

Si le matériel n'avait pas d'épaisseur, pourrait-on amener la pointe rouge et la pointe verte en coïncidence ? (Sans changer le montage bien entendu). Est-ce possible :

En tout point accessible de la planche
En certains points de la planche — Précise lesquels
En un point de la planche — Précise lequel
En aucun point de la planche

Entoure ou raie suivant le cas.

Chaque droite est confondue avec son image
Certaines droites sont confondues avec leur image, si oui, lesquelles ?
Aucune droite n'est confondue avec son image
Chaque cercle est confondu avec son image
Aucun cercle n'est confondu avec son image
Certains cercles sont confondus avec leur image, si oui, lesquels ?
Un seul point est confondu avec son image, c'est.........
Tous les points de .... sont confondus avec leur image
Aucun point n'est confondu avec son image

Ces dernières questions posent un problème sérieux aux élèves. En effet, l'unilatéralisation apparente de l'appreil privilégie un demi-plan en tant que demi-plan objet, l'autre étant image. Aussi, les réponses à des questions du type : «certaines droites sont confondues avec leur image, si oui lesquelles ?» présentent le plus souvent la modalité «non», voire l'absence de réponse. Le maître ne corrige pas, laissant les élèves revenir éventuellement et ultérieurement sur leur comportement initial. La tâche demandée d'ailleurs, après ces premiers éléments de caractérisation de la symétrie orthogonale, se présente ainsi :

Activité 2.

Un montage D étant fixé, on appelle Δ l'axe de la glissière.

> Dessine une figure F de ton choix. La machine dessine en rouge son image F′.
> Quelle est l'image de F′ par la même machine fixée sur le même axe Δ ?
> Explique comment tu l'obtiens.

Penser que cette activité suffit à bilatéraliser la fonction remplie par le symétriseur, qu'elle permet la mise en évidence du caractère involutif de la transformation, relève de la confiance utopique que seul un théoricien de l'éducation peut avoir ! On verra, en effet, dans la 2ème séquence, combien d'élèves gardent encore intacte la représentation initiale de l'application surjective d'un demi-plan sur un demi-plan [(1)]. D'ailleurs au cours de cette activité, beaucoup d'élèves, au lieu de permuter les 2 pointes traçantes R et V, préfèrent faire pivoter leur feuille sans changer la position du symétriseur. Pour chaque observateur, c'est donc toujours le même «côté» qui est l'objet. En fait, ces élèves transgressent la consigne sur le plan mathématique et non sur le plan physique.

Activité 3.

Cette activité vise à faire émerger les deux caractères spécifiant la symétrie orthogonale, à savoir :

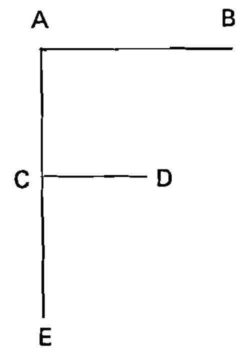
- l'orthogonalité à Δ des droites (MM′) joignant objet M à image M′ et donc leur parallélisme ;
- la propriété du milieu de [MM′] de l'intersection de (MM′) et Δ.

Nous verrons également dans la 2ème séquence que ces deux informations ne sont pas recueillies comme telles par tous les élèves et que le caractère «parallélisme des droites

(1) Yves Chevallard (I.R.E.M. d'Aix-Marseille) évoquerait à ce propos la fiction du temps didactique selon laquelle le temps du discours du maître se confondrait — à tort — avec le temps de l'acquisition par l'élève du contenu de ce discours.

(MM′), très perceptif et trop prégnant, fait obstacle à la prise en compte de la propriété d'orthogonalité. Il suffit qu'un leader d'un groupe d'enfants relève, en premier, l'invariant «parallélisme» pour que, le plus souvent, le reste du groupe se satisfasse de ce phénomène pointé, sans le dépasser.

Trace avec soin la figure F puis son image F′ obtenue avec la machine D.
Joins chaque point à son image : A à A′
B à B′
....
etc...



1) Compare les droites (AA′), (BB′), (CC′) ...... etc... obtenues.

2) (AA′) coupe Δ en **a**.
(BB′) coupe Δ en **b**.
(CC′) coupe Δ en **c**.
etc...

Que sont a pour (A, A′) ?
b pour (B, B′) ?
etc...

Essaie de décrire ce que fait la machine **D** et comment on pourrait obtenir l'image d'une figure sans elle.
Fais un essai et vérifie.

En général, la vérification consistant à faire valider son pari par la machine, est escamotée ou même ne conduit pas à l'explicitation du modèle utilisé par les élèves, tant sont fortes les certitudes des premières perceptions. La consigne manque de précision certes ; mais surtout, la nécessité d'avoir recours à l'appareil pour répondre à un vrai problème ou pour lever une incertitude se trouve absente. D'ailleurs, bien souvent, la figure choisie pour éprouver le modèle est si particulière qu'une légère déformation de l'appareil ou la confiance excessive des élèves suffisent à corriger l'erreur de représentation : trace réelle d'un conflit résorbé au niveau de l'action. Il faudra, dans la 2ème séquence, imposer des dessins «pathologiques» pour que soit distabilisé le modèle implicite.

Activité 4.

Celle-ci est librement conduite par le maître et vise à élargir les signes d'identification de la symétrie. Le maître demande à la cantonade dans quelles situations, de la vie familière, les élèves ont rencontré des phénomènes de transformation telle que celle produite par le symétriseur. Il n'existe pas de classe où l'effet du miroir ou du pliage ne soit cité. Pour valider et ancrer ces homomorphismes, tout groupe exécute et peint un dessin sur une feuille, trace un axe Δ sur ce plan matériel et le plie autour de l'axe. Le nouveau dessin obtenu coïncide, en effet, avec l'image qu'aurait donnée, du dessin initial, le symétriseur d'axe Δ. De la même façon, faisant glisser un miroir placé verticalement le long de Δ, on découvre une partie du dessin image qui complète l'image, dans le miroir, du dessin initial (cf. films «Reflets et taches»). Il n'est pas impossible que ces analogies aient renforcé la perception «dissymétrique» (!) de la transformation : virtuel et réel ne s'échangent pas ! (1).

Des activités portant sur la composition de symétries orthogonales sont proposées ensuite aux élèves. Mais dans un souci de concision de ce texte, nous en reparlerons dans un autre article.

2.3 Séquence de dessins et graphiques.

Collectivement, une synthèse de la 1ère séquence est menée en début de séance, séance dont la durée totale n'excède pas une heure, les élèves pouvant commencer ou terminer leur fiche à la maison. Un consensus sur le fonctionnement du symétriseur d'axe Δ conduit à deux types de déclaration (cf. travaux de Colette Laborde : 1976).

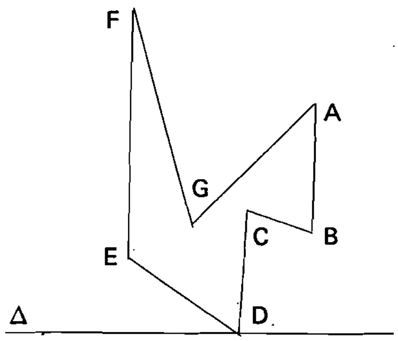
- Une déclaration «active» : pour tracer le symétrique M′ d'un point M, on trace la perpendiculaire (MM′) à Δ qui coupe Δ en H ; puis «de l'autre côté» de Δ, on reporte la longueur MH.

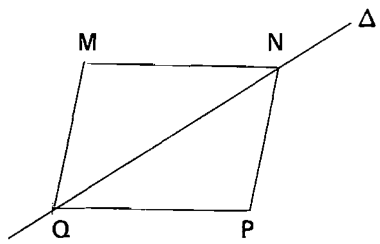
- Une déclaration «passive» : l'image d'un point de l'axe Δ est lui-même ; l'image M′ d'un point M n'appartenant pas à l'axe Δ est telle que Δ soit perpendiculaire à [MM′] en son milieu.

On va voir que l'un ou l'autre de ces discours ne garantit pas l'appropriation. En effet :

Activité 1.

Construis l'image de chacune des figures ci-dessous.





(1) ces mêmes résistances apparaissent en algèbre où beaucoup d'enfants composant des applications numériques f et g résistent à considérer l'image de x par f comme objet sur lequel g doit opérer (même pour f bijective et $g = f^{-1}$).

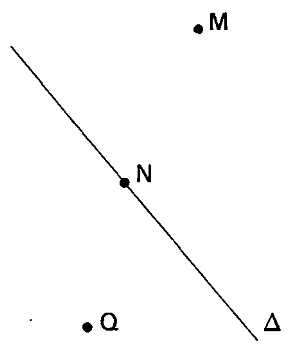
La construction de gauche ne pose aucun problème pour la majorité des groupes. On note même le fonctionnement fiable du théorème en acte suivant : «L'image d'un segment [AB] est le segment dont les images de A et B sont les extrémités». Pour ce dessin, comme pour ceux qui viendront, il ne sera pas question pour nous de priver les élèves de l'emploi de tels théorèmes «établis» au cours de leurs manipulations, du fait qu'ils n'auraient pas été explicités. On remarque, par contre également (cf. films «Reflets et taches») que certains élèves perdent l'information «Δ est perpendiculaire à [MM']». Très certainement d'ailleurs, ils ne l'ont jamais recueillie dans la séquence précédente. Ce n'est pas non plus la synthèse initiale qui leur a fait acquérir. L'enseignant qui s'illusionne sur le pouvoir structurant de son discours sur l'élève, un discours en forme d'axiomes ou de définitions, prend ici la leçon qu'il devrait redouter. Ainsi, un groupe, quelquefois conforté par l'attitude d'éléments dominants, construit l'image du polygone par une symétrie oblique de direction arbitraire. Le maître demande alors à ces élèves de faire valider leur production par le symétriseur qui, bien entendu, lui refuse son label, en dépit de la crispation de mains sur l'appareil, moins décidées à donner raison à la prédiction ! Le retour au texte définissant l'algorithme et aux dessins tracés par la machine apporte la dernière onde de choc nécessaire au déséquilibre du modèle implicite. Cet exercice a le mérite comme le suivant d'ailleurs, de faire émerger, d'exorciser les modèles erronés et de provoquer chez les élèves la rupture dans ses conceptions ou son savoir nécessaire au franchissement de l'obstacle (cf. travaux de Guy Brousseau à cet égard).

Le dessin de droite, en effet, présente, de façon dépouillée pourtant, des obstacles de taille pour une assez grande partie des élèves. Distracteur (parallélogramme et symétrie centrale) et complexité de position (des points de part et d'autre de l'axe) conduisent à des blocages mettant en lumière encore une fois la correspondance perçue sans orthogonalité et, de plus, la dissymétrie par rapport à l'axe que j'ai déjà évoquée. Tantôt les élèves en difficulté prétendent que le parallélogramme est invariant dans la symétrie axiale, comme dans la symétrie centrale ; tantôt, ils ne peuvent trouver l'image de M et celle de P. Encore une fois, l'appui sur le symétriseur de référence, symétriseur dont les pointes sont interchangeables permet la relance et la rupture avec le modèle implicite, inopérant, partiel ou erroné, et du moins la régression de celui-ci.

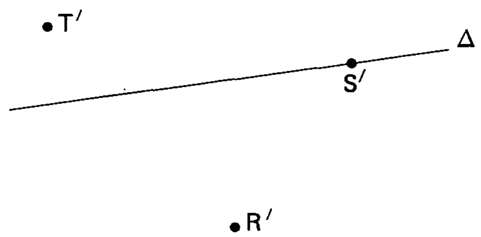
Les activités suivantes se déroulent sans grand problème. Je les cite pour mémoire :

Activité 2.

α) On donne quatre points **M, N, P, Q**. Construis leurs images **M′, N′, P′, Q′** puis les images de **M′, N′, P′, Q′**. Quelle observation fais-tu ?



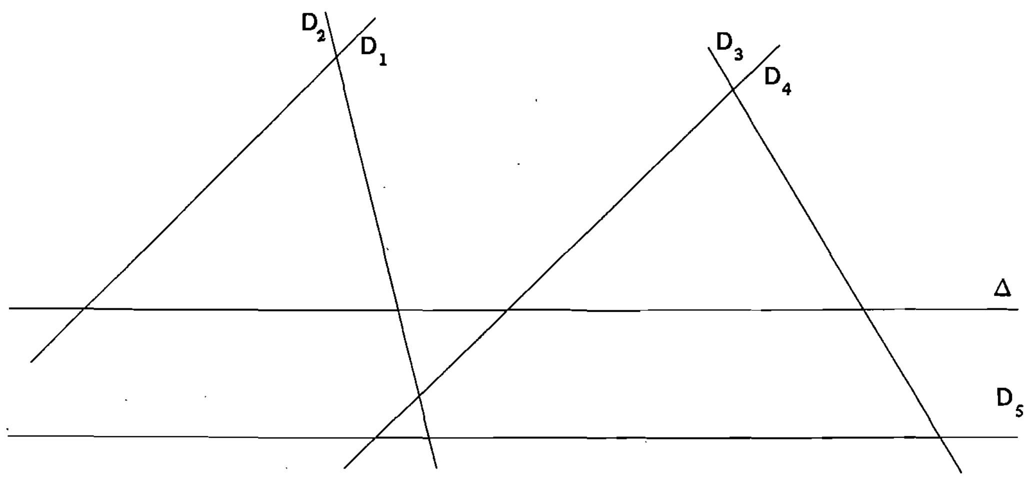
β) Construis les antécédents des points **T′, R′** et **S′**.



L'activité suivante a pour objectif de faire **expliciter** la conservation du parallélisme et de l'orthogonalité.

Activité 3.

D_1, D_2, D_3, D_4 et D_5 sont données. Construis leurs images : D'_1, D'_2, D'_3, D'_4 et D'_5.



D_1 et D_4 sont parallèles. Que penses-tu de D'_1 et D'_4 ?

. . . .

D_4 et D_3 sont perpendiculaires. Que penses-tu de D'_4 et D'_3 ?

. . . .

D_5 est parallèle à Δ. Que penses-tu de D'_5 ?

. . . .

D_2 est perpendiculaire à Δ. Que penses-tu de D'_2 ?

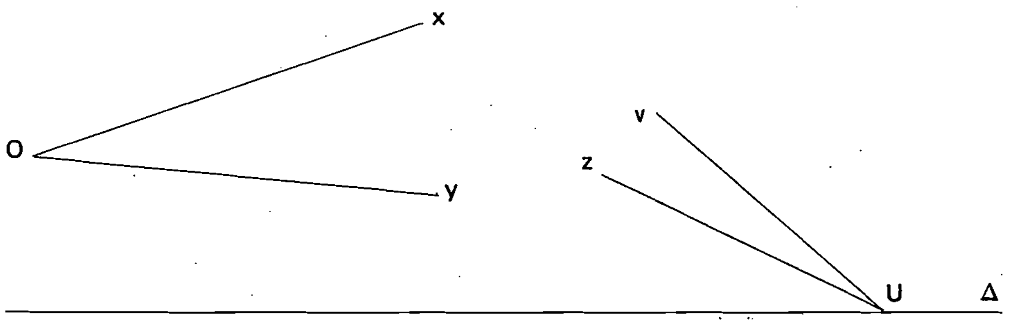
. . . .

Enonce, à chaque fois, une propriété généralisant ta remarque.

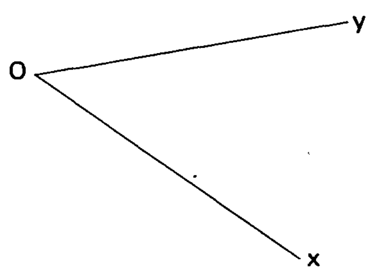
Les travaux sur demi-droites ou droites qui suivent préparent la conservation des mesures des secteurs angulaires par symétrie et, en particulier, la conservation globale par symétrie par rapport à une droite particulière : la bissectrice. Je signale au passage que toutes ces activités sont vécues dans l'atmosphère euphorique de conquête progressive d'un terrain, déblayé de ses obstacles naturels.

Activité 4.

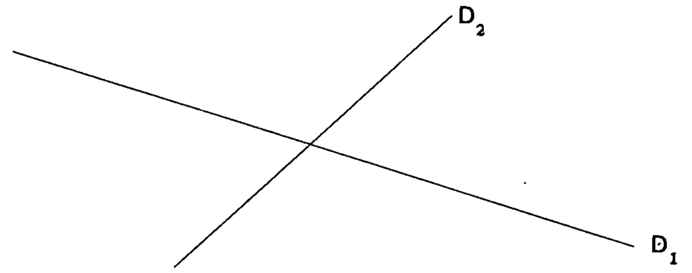
α) ([Ox, [Oy) est un coupe de demi-droites. Construis son image ([O'x', [O'y') ; même exercice avec ([Uz, [Uv).



β) On te donne un couple de demi-droites ([Ox, [Oy). Construis l'axe de symétrie Δ tel que [Ox ait pour image [Oy.
Quelle est l'image du couple ([Ox, [Oy) ?



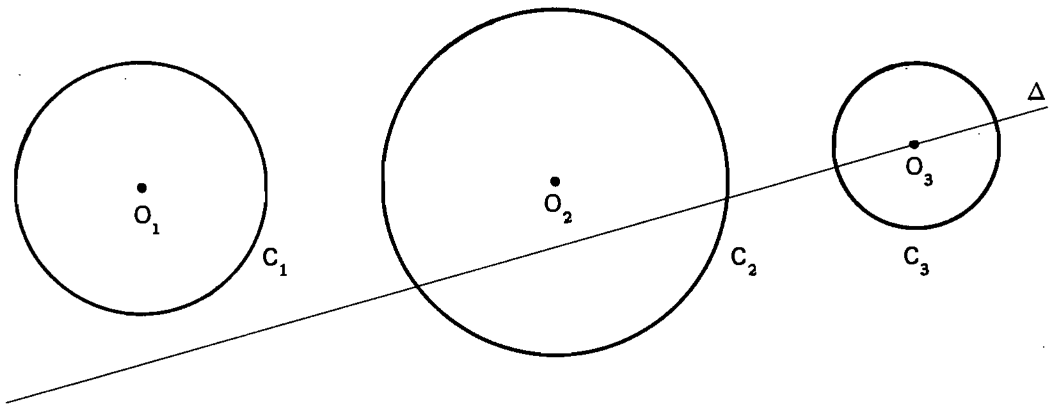
δ) On te donne deux droites D_1 et D_2.
Construis les axes de symétries Δ et Δ' tels que D_1 ait pour image D_2 et D_2 ait pour image D_1.



Nous allons étendre puis renforcer la notion d'axe de symétrie d'une figure circulaire ou polygonale.

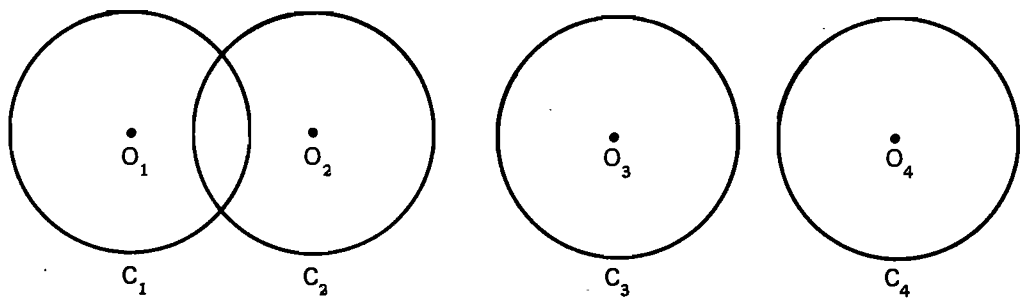
Activité 5.

α) C_1, C_2 et C_3 sont trois cercles. Construis leurs images C'_1, C'_2 et C'_3 par la symétrie d'axe Δ.

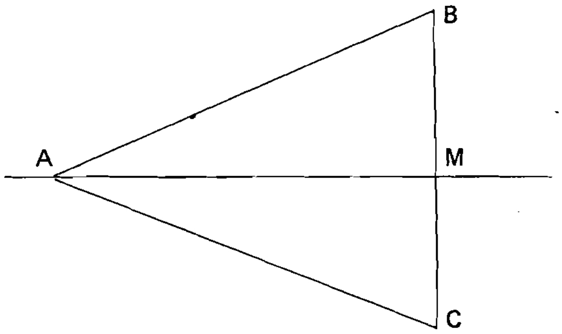


Ici aussi, un théorème en acte fonctionne : «l'image d'un cercle C(O, R) est le cercle dont le centre est le symétrique de O et le rayon est R».

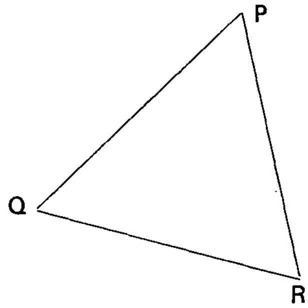
β) On te donne deux cercles C_1 et C_2. Construis l'axe Δ tel que C_1 ait pour image C_2.
Même exercice avec C_3 et C_4. Construis l'axe Δ' qui les échange.



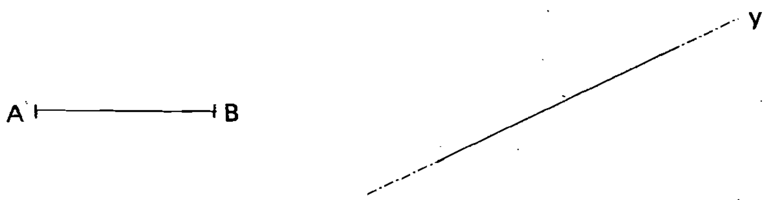
γ) Construis l'image du triangle **ABC** dans la symétrie d'axe **(AM)**.
Que remarques-tu ?



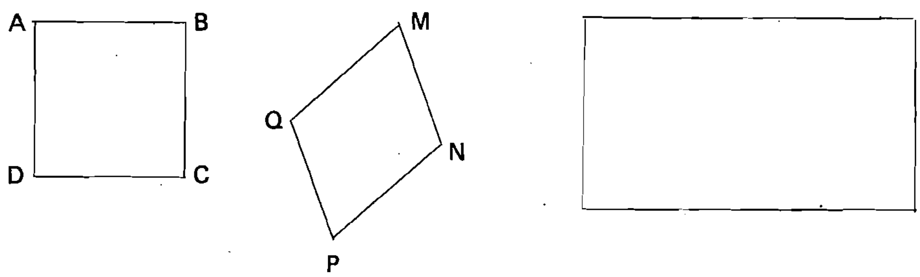
δ) Le triangle **PQR** ci-dessous a-t-il des axes de symétrie ? Si oui, dessine-les.

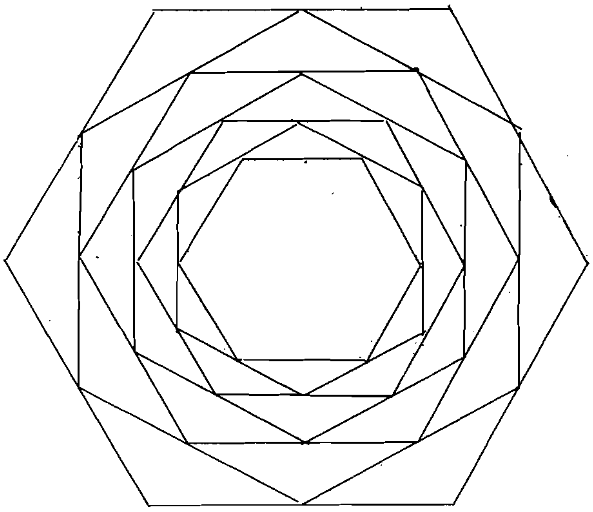


ϵ) Pour chacune des figures qui suivent, dessine son ou ses axes de symétrie (ou quelques-uns de ses axes de symétrie).



Si la majorité des élèves dessinent la médiatrice de [AB], peu d'élèves pensent à citer les supports eux-mêmes comme satisfaisant à la question, et moins encore se décident à faire le choix d'une perpendiculaire à (xy). Chacun sait bien qu'une solution multiple à un problème provoque plus de désarroi qu'une solution unique.



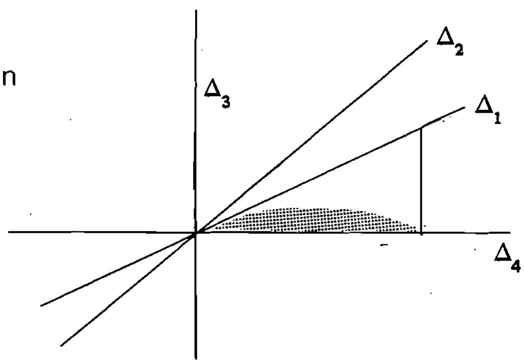


Voici un exercice de style...

Activité 6.

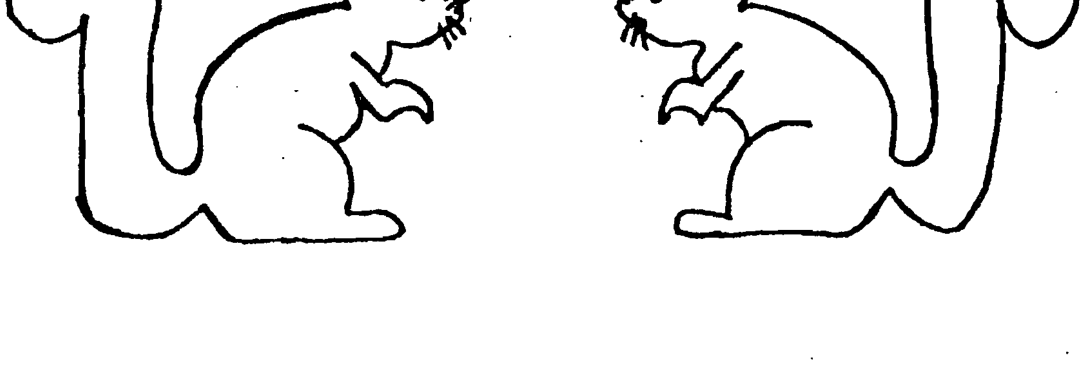
α) Complète la figure hachurée en opérant successivement :

— une symétrie d'axe Δ_1
— une symétrie d'axe Δ_2
— une symétrie d'axe Δ_3
— une symétrie d'axe Δ_4



Puis quelques exercices d'application dans des domaines familiers où sont exigées, par contre, des capacités d'observation, de méthode et de sens critique :

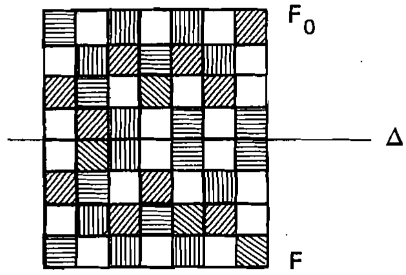
α) Le dessin ci-dessous représente-t-il un seul écureuil se regardant dans une glace ? Explique ta réponse.



γ) Un farceur vient d'écrire «je roule pour vous» sur la lucarne arrière de ma voiture et à l'extérieur de celle-ci.

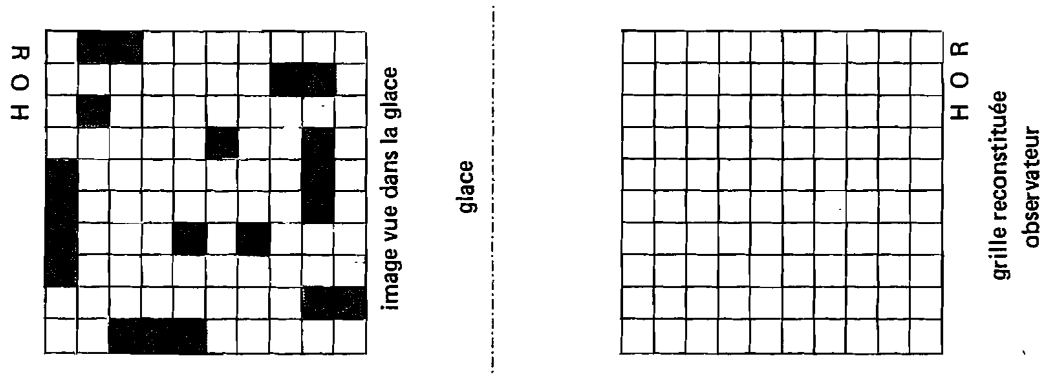
Puis-je lire de l'intérieur de ma voiture et sans effort cette inscription ? Explique comment.

δ) Le pavage suivant est-il symétrique par rapport à l'axe Δ ? Sinon, coche les cases qui le rendent assymétrique.



ϵ) Dans un grand magasin libre-service, des glaces ont été installées sur les murs pour faciliter la surveillance... Une vendeuse qui s'ennuie au rayon «livres» s'amuse à reconstituer une grille de mots croisés telle qu'elle figure sur la couverture d'un livre et qu'elle ne peut voir que dans la glace.

Fais comme elle...



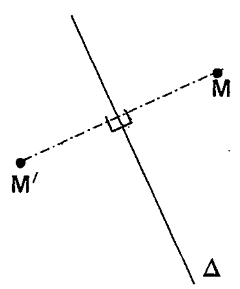
Enfin, une révision au sujet de la composition de symétries orthogonales d'axes parallèles ou perpendiculaires est proposée. Je cite ici le dernier exercice impliquant une décomposition d'une translation en 2 symétries orthogonales. Je ne peux prétendre que cette question, faisant appel à la réversibilité de l'opération «composition», ait été résolue par de nombreux élèves. Généralement, elle exige l'exhumation des travaux de la séquence précédente et conduit à la solution par approximations successives.

Un jeu conçu et mis au point par nous-mêmes, utilisant le symétriseur, sert de point d'orgue aux élèves qui, précédant les autres, terminent leur fiche dessin.

2.4 Séquence d'expression et validation plus formelles.

Cette dernière phase regroupe les séquences 3 et 4 dont j'ai parlé plus haut en 1.2 et dure, selon les classes environ 3 à 5 heures. Elle débute, pour la symétrie orthogonale, par l'explicitation par les élèves d'une définition et de principes premiers dont nous décidons de munir le modèle mathématique, formalisé certes, mais toujours en rapport étroit avec le plan de l'espace ambiant. Dans cette géométrie physico-mathématique, nous décidons d'accepter d'emblée que les règles du modèle s'enrichissent des propriétés rendues si évidentes par les travaux précédents que les refuser ou les suspecter d'être vraies ou fausses n'aurait aucune signification pour les élèves. Le lecteur qui connaît et pratique les nouveaux programmes, peut cependant noter, rétrospectivement le côté relativement novateur de nos démarches par rapport à la pratique confortée par les programmes, les commentaires, l'attitude de l'Inspection et des auteurs de manuels de l'époque. En effet, j'insiste sur le fait que cette phase, si elle nécessite davantage la pression, la poussée, la provocation, la censure de l'enseignant, chef d'orchestre, cette phase donc ne devient ni magistrale, ni discursive.

Voici la définition généralement retenue :



Δ étant une droite du plan P, on appelle symétrie orthogonale d'axe Δ et l'on note S_Δ l'application telle que :

$$\left[\begin{array}{l} P \longrightarrow P \\ M \longrightarrow M' \end{array}\right.$$

Si $M \in \Delta$ alors $M' = M$.

Si $M \notin \Delta$ alors $\Delta \perp (MM')$ et l'intersection de Δ et (MM') est le milieu de (M, M').

S_Δ est telle que : si $\begin{array}{c} A \longmapsto A' \\ \text{et} \\ B \longmapsto B' \end{array}$ alors $d(A, B) = d(A', B')$.

En outre, les propriétés suivantes sont admises : S_Δ est bijective, involutive, Δ est le seul ensemble invariant, toute perpendiculaire à Δ est globalement invariante, les images d'une droite et d'un cercle sont respectivement une droite et un cercle. Notre attitude est, je pense, en accord avec notre contre-objectif initial : ne pas étudier, en profondeur, les transformations pour elles-mêmes. Par suite nous disposons de temps et de signification pour étudier les concepts de médiatrice et de bissectrice, ainsi que pour proposer et tenter de faire résoudre des problèmes non triviaux en 4ème, problèmes qui, au regard de l'imprécision des tracés ou des mesures, des désaccords entre les groupes, des incertitudes ou des ignorances de certains élèves, valent l'investissement d'une recherche et d'une preuve. Par exemple, citons quelques-uns des exercices retenus en soulignant que bien d'autres pourraient l'être.

Exercice.

D_1 et D_2 sont deux droites perpendiculaires et $D_1 \cap D_2 = \{I\}$.

MNP est un triangle tel que $\begin{cases} M \notin D_1 & \text{et} \quad M \notin D_2 \\ N \notin D_1 & \text{et} \quad N \in D_2 \\ P \in D_1 & \text{et} \quad P \notin D_2 \end{cases}$

1) Construis le triangle $M_1N_1P_1$ image du triangle MNP dans la symétrie S_{D_1}.

2) Construis le triangle $M_2N_2P_2$ image du triangle $M_1N_1P_1$ dans la symétrie S_{D_2}.

3) Que représente le point I pour chacun des bipoints (N, N_2), (P, P_2) et (M, M_2) ? On pourra, par exemple, exprimer $\overrightarrow{MM_2}$ en fonction de $\overrightarrow{MI}$.

4) Quelle est la transformation : $S_{D_2} \circ S_{D_1}$?

a) La médiatrice de [AB], de milieu I est présentée comme la perpendiculaire Δ à [AB] en I. Par suite, $S_\Delta(A) = B$, c'est-à-dire Δ est axe de symétrie de [AB] ; donc pour tout point M de Δ : MA = MB. Le théorème réciproque n'a pas le même caractère d'évidence, tout comme la propriété suivante :

Propriété caractéristique du triangle rectangle.

Exercice.

ABC est un triangle tel que $(BA) \perp (CA)$.
O le milieu de (B, C).

Si I est le projeté orthogonal de O sur (AB) et J celui de O sur (AC) que représentent les droites (OI) et (OJ) ?

Compare les distances de O aux points A, B et C.

Théorème :

Si ABC est un triangle rectangle en A et si O est le milieu de (B, C) alors ....

Exercice.

ABC est un triangle.
O est le milieu de (B, C) et on sait que OA = OB = OC.

Compare les directions de (AB) et (BC).

Théorème :

Si **ABC** est un triangle dans lequel **O**, milieu de **(B, C)**, vérifie OA = OB = OC : alors ....

Résume les deux théorèmes précédents en un seul.

Théorème :

Le guidage intuitif passe par la liaison étroite établie entre la symétrie orthogonale et la notion de médiatrice. On voit d'ailleurs clairement dans le 3ème film «Reflets et taches» le réinvestissement psycho-moteur de l'apprentissage manipulatoire. Une élève, avec une remarquable spontanéité, accompagne ses premiers pas heuristiques, puis la validation verbale de la propriété ci-dessus, de gestes d'une grande éloquence et d'un haut pouvoir de conviction.

Un exercice de synthèse vise ensuite à établir la propriété d'intersection des 3 médiatrices d'un triangle et à caractériser les triangles pour lesquels certaines ou toutes les médiatrices passent par les sommets.

b) **La bissectrice** du couple de demi-droites [Ox) et [Oy) est définie comme axe de symétrie échangeant les deux demi-droites. La propriété caractéristique de cette bissectrice s'en dégage. Un exercice de synthèse proposé à la suite de ce paragraphe vise à faire dégager la propriété d'incidence des 3 bissectrices intérieures d'un triangle et découvrir quelle particularité doit posséder un triangle pour que l'une ou les 3 bissectrices soient aussi médianes.

c) **De façon plus large,** l'axe de symétrie d'une figure F se présente comme une droite Δ telle que F soit globalement invariante par S_{Δ}. Voici les 2 exercices qui terminent la partie strictement géométrique de la 3ème séquence.

Exercice 1.

Quels sont, s'ils existent, les axes de symétrie des figures suivantes : cercle, triangle quelconque, triangle isocèle, triangle équilatéral, parallélogramme, rectangle, carré, losange.

Exercice 2.

Dessine, si tu le peux, deux figures **F** et **F'** ayant respectivement 6 et 7 axes de symétrie exactement.

d) **La partie algébrique** de ce thème vise à atteindre les objectifs suivants :

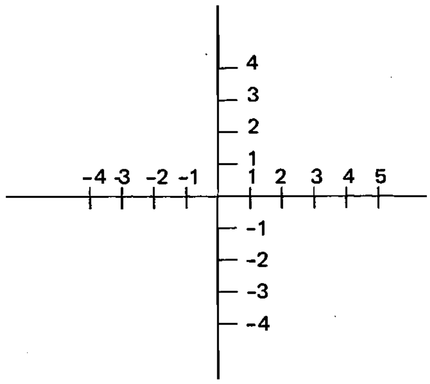
- munir les élèves d'une nouvelle représentation de la symétrie orthogonale et rendre ainsi (?) plus cohérents les domaines géométrique et numérique des programmes scolaires ;

- faire pratiquer des activités algébriques signifiantes et acquérir les connaissances visées en fin de 1er cycle.

Ces activités s'enchaînent aux précédentes immédiatement ou quelques semaines après. Voici le contenu de l'exercice 1. Les autres exercices seront proposés avec la composition de symétries orthogonales.

Exercice 1.

Dans le plan repéré comme ci-contre, on considère la transformation **f** qui, à tout couple (x, y), associe le couple (y, x).



1) Place dans le plan ci-contre les points images des couples suivants : (2, 5), (-2, 4), (-3, 6), (-5, 5), (-4, 3), (-7, 1).

Relie par une ligne fermée ces points dans l'ordre où sont donnés les couples.

2) Calcule l'image de chacun des couples par la transformation **f**. Place sur le graphique les points correspondants et relie-les comme précédemment.

3) Cite trois couples qui seraient leur propre image par **f**. Comment sont placés les points images de tous les couples invariants comme ceux-ci ?

Quelle est, à ton avis, la transformation géométrique ainsi mise en évidence ?

Il est illusoire, bien sûr, d'espérer que ces exercices suffisent à permettre un transfert stable d'une représentation à l'autre ; mais on ne peut refuser de croire qu'ils y contribuent.

III – QUELQUES CONCLUSIONS.

Je vais tenter d'établir un bilan des parties cachées de cette action et risquer quelques prospectives sur les parties cachées, à partir des remarques exprimées par les enseignants et des observations ou évaluations diverses auxquelles j'ai pu participer de 1972 à 1978.

3.1 A propos de la technologie éducative.

3.1.1 Au sujet du matériel décrit précédemment, il y a lieu de noter les points suivants :

▪ Le fonctionnement des machines n'est pas d'une grande fiabilité dans sa fonction de reproduction de dessins : les articulations, les points d'attache nécessitent des soins constants de la part des utilisateurs. On observe cependant une évolution dans l'attitude des élèves rigoureux et sévères au départ dans leurs réponses relatives aux différentes conservations (distance, linéarité, courbure, etc...), les enfants peu à peu développent un esprit critique technologique faisant la séparation indispensable entre les propriétés intrinsèques d'une transformation — qui fonctionnerait idéalement à travers l'appareil — et les imperfections dues à la fois à la faillibilité du matériel et à leur propre manipulation..

▪ De toute façon, ces imperfections qui sont le propre des réalisations matérielles, laissent une place de choix à la conjecture, la spéculation et leur preuve : sans incertitude, sans conflit, sans questionnement, cette dernière n'aurait de signification qu'intellectuelle.

▪ Se limiter aux machines «isométrisantes» ou même «affinantes» semble une erreur dans le choix didactique. En effet, la conceptualisation des isométries ou des affinités exige l'existence de transformations n'en relevant pas. C'est ainsi qu'il a paru bon d'introduire l'inverseur puis, dans un avenir très proche, le «conchoïdeur». Une connaissance s'érige, nous le savons à travers des exemples mais aussi des contre-exemples.

▪ Disposer de matériels tout montés pour chaque transformation représente un avantage certain pour l'enseignant, en particulier pour celui qui n'a pas de disposition particulière pour le bricolage. Mais les expériences, limitées faute de temps, de faire démonter et monter l'appareil par l'élève se sont avérées enrichissantes, formatrices et ... vocatrices. Qu'on imagine la mine de questions créatives du type : «quelle barre faudrait-il mettre pour que... ?» «où faudrait-il placer l'articulation pour que... ?».

▪ L'usage combiné, mais retardé, du papier calque d'une grande souplesse d'emploi, semble également à promouvoir. Il permet des anticipations rapides au niveau des compositions d'applications.

3.1.2 Au sujet de l'organisation de la classe, les différents vécus montrent qu'il est absolument nécessaire de fonctionner en demi-classe et par groupe de 2 élèves, afin d'augmenter et la participation de chacun et l'assistance fructueuse de l'enseignant. L'idéal appellerait même la collaboration de deux maîtres pour la séquence manipulation.

Les utilisateurs partagent unanimement l'opinion suivante : ces manipulations, placées en raison de la conjoncture en 4ème et 3ème auraient une place plus naturelle en 5ème, voire en 6ème, à la fois pour des raisons psycho-génétiques (développement des enfants) et didactiques (opérations géométriques, composition de fonctions, figures à connaître, etc...).

3.2 A propos des comportements des élèves.

3.2.1 On observe un changement radical d'attitude chez la plupart des élèves : les mathématiques admettent des représentations physiques instrumentales et anticipables. De nombreux enfants, éteints en cours magistral, formel la plupart du temps, s'animent et se révèlent. L'activité technologique s'ennoblit et la vision d'une cohérence de certaines connaissances pluridisciplinaires apparaît plus clairement. J'ose dire, qu'en plus, l'éventualité d'une orientation technique ne présente pas la même connotation d'échec scolaire.

3.2.2 Bien souvent, des témoignages avantageux nous sont parvenus au sujet de l'accroissement de la participation des élèves aux autres activités scolaires. Les moments de travaux de groupe permettent, en effet, aux enfants de s'exprimer entre eux d'abord sur la matière même, mais aussi avec le professeur avec lequel le contact se trouve plus humanisé.

3.2.3 Une restriction renforce la fin de la remarque du paragraphe 3.1.2. Les élèves de 13, 14 ou 15 ans répugnent quelquefois à la manipulation : elle leur paraît ou bien puérile ou bien non indispensable à la compréhension. Pour la première raison, nous pensons effectivement que la plus grande partie de la séquence pourrait être effective auparavant. Cependant il nous semble nécessaire de rafraîchir en 4ème et 3ème la perception dynamique des transformations et des concepts qu'elles activent. Cela peut se faire à travers une rapide évocation du matériel par les élèves eux-mêmes ou encore par une brève nouvelle perception de ce matériel avant l'amorce formelle des notions. Quant au caractère indispensable de la manipulation au cours de la scolarité, nous le maintenons pour une grande partie des élèves, voire tous, en modulant dans ce cas le temps consacré et les activités retenues. Ce maintien s'impose en raison des zones d'ombre laissées par une approche théorique prématurée et en raison de l'aptitude de la manipulation et la simulation à révéler les modèles implicites des élèves.

3.2.4 Cependant l'habileté des élèves à se servir, avec maîtrise, d'un matériel articulé, l'apprentissage d'un contrôle de leurs gestes, la capacité à anticiper des effets moteurs, la capacité à utiliser avec adresse et précision des instruments de mesure et de dessin, à lire un programme d'exécution, un graphique, etc..., tout ceci paraît aux enseignants d'autres disciplines (technologie ou physique, travaux manuels,...) comme positivement significatif de notre action.

3.3 A propos des connaissances.

3.3.1 Chacun s'accorde à reconnaître une meilleure fixation des algorithmes de construction et de la reconnaissance à vue des transformations par l'identification de leurs effets. Un test présenté à des populations expérimentales et témoins sur l'acquisition de la symétrie centrale, laisse apparaître des différences de réussite de 30 à 40% en faveur des premières. Les arguments utilisés et explicités a postériori par les élèves, peuvent s'exprimer ainsi : «si on met la machine ici, on obtient çà...» (cas très net pour l'équipollence des bipoints).

3.3.2 Un réinvestissement positif est noté aussi au niveau même de la validation formelle d'une propriété. En effet, les processus utilisés en classe : identification des données, conjecture sur la nature des transformations, de leurs effets, validation avec essai-erreur, s'apparentent à la démarche hypothético-déductive. La chronologie de l'ordonnancement d'une démonstration n'est bien souvent que la décalque de celle d'un programme de construction.

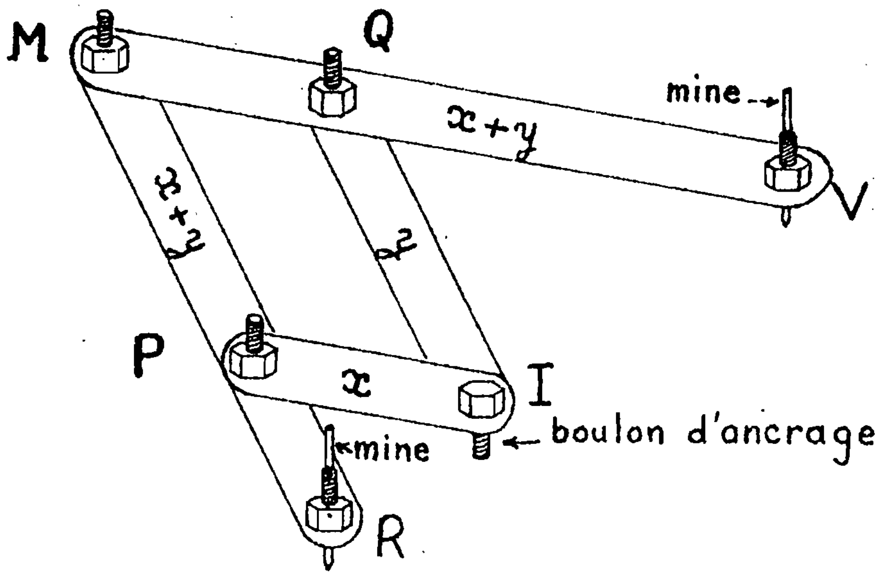
* *
*

L'apparenté auto-satisfaction du choix d'une philosophie instrumentaliste en 1er cycle, doit être tempérée par l'apparition de certaines difficultés dans des activtés où l'on attend des élèves le bon fonctionnement de mécanismes comme les résolutions d'équations, les représentations graphiques de fonctions affines, les calculs sur les vecteurs, etc... Difficultés aussi dans l'insertion des élèves dans des classes de seconde, plus classiques, où l'activité même de l'élève est réduite à la part que lui laisse le discours du maître. Difficultés «techniques» enfin dans l'utilisation du matériel dans la classe. Outre le désordre apparent, l'effervescence ou la passivité de certains élèves, le matériel ne suit pas toujours, comme il a été dit plus haut. Mais, d'une part, ces dernières difficultés ont l'avantage de faire se poser de vraies questions, en prise directe avec un conflit, de faire émettre par les élèves des conjectures à valider et de poser de nouvelles questions d'ordre pédagogique. D'autre part, l'ensemble de ces difficultés, que je ne tiens pas à cacher, sert plus souvent d'alibi qu'elles ne sont un obstacle réel à une tentative de construction des concepts par les enfants. Les encouragements obtenus à travers leurs résultats et les opinions recueillies auprès des enseignants de diverses disciplines ne souffrent pas d'équivocité et devraient inciter à aller plus avant dans la direction entreprise.

Annexe 1.1

Voici les plans des montages cités précédemment, établis par Bernard Le Dily, professeur à Rennes.

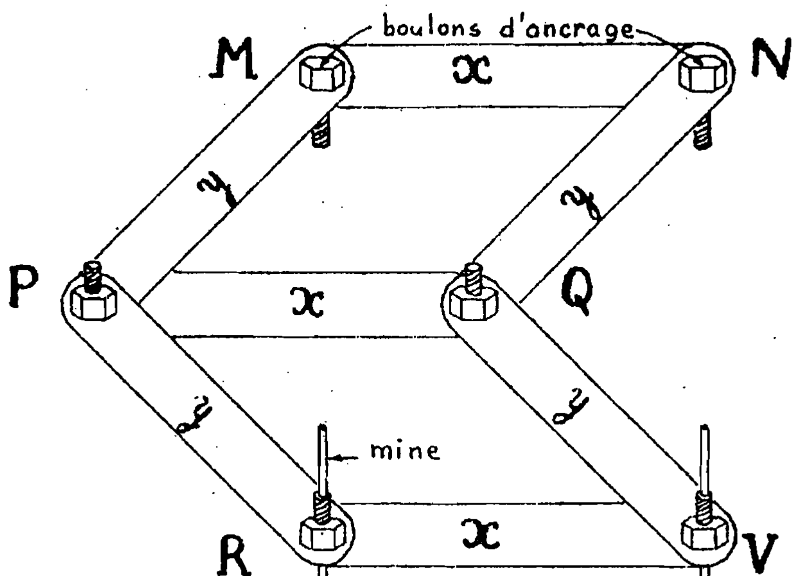
MONTAGE D'UNE MACHINE H



Exercices pour le lecteur :

Que faut-il faire pour obtenir avec H une symétrie centrale ?
Comment calculer avec le montage H le rapport d'homothétie ?
Que faut-il faire pour que H donne une homothétie positive ?

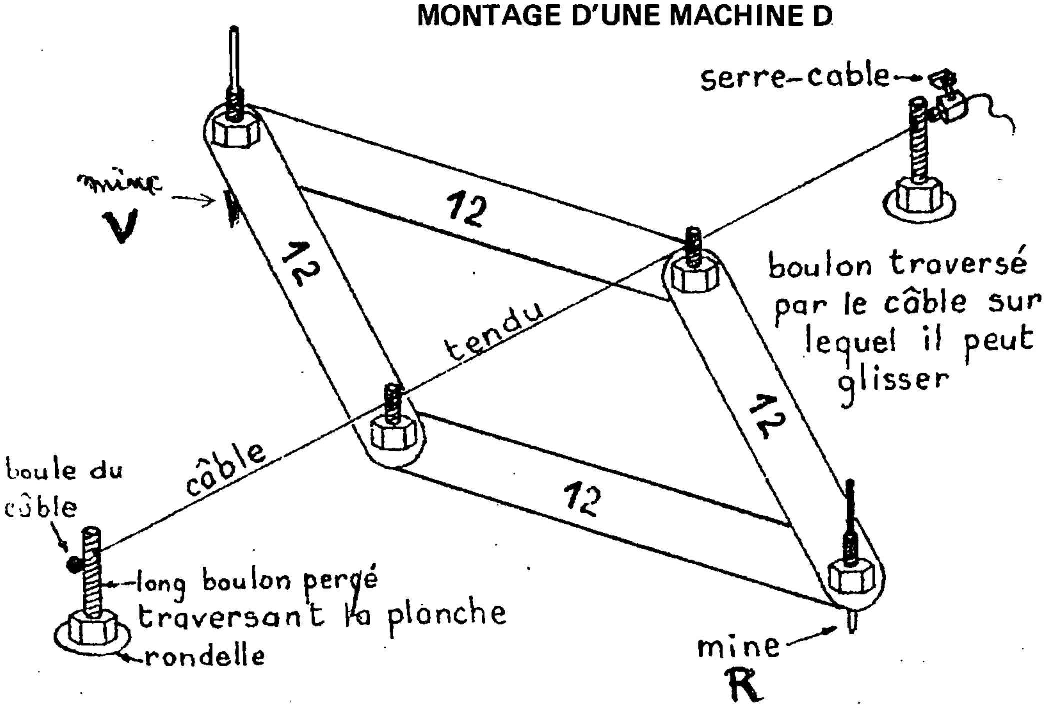
MONTAGE D'UNE MACHINE T



Le deuxième parallélogramme sert à élargir le champ de traçage de la machine T.

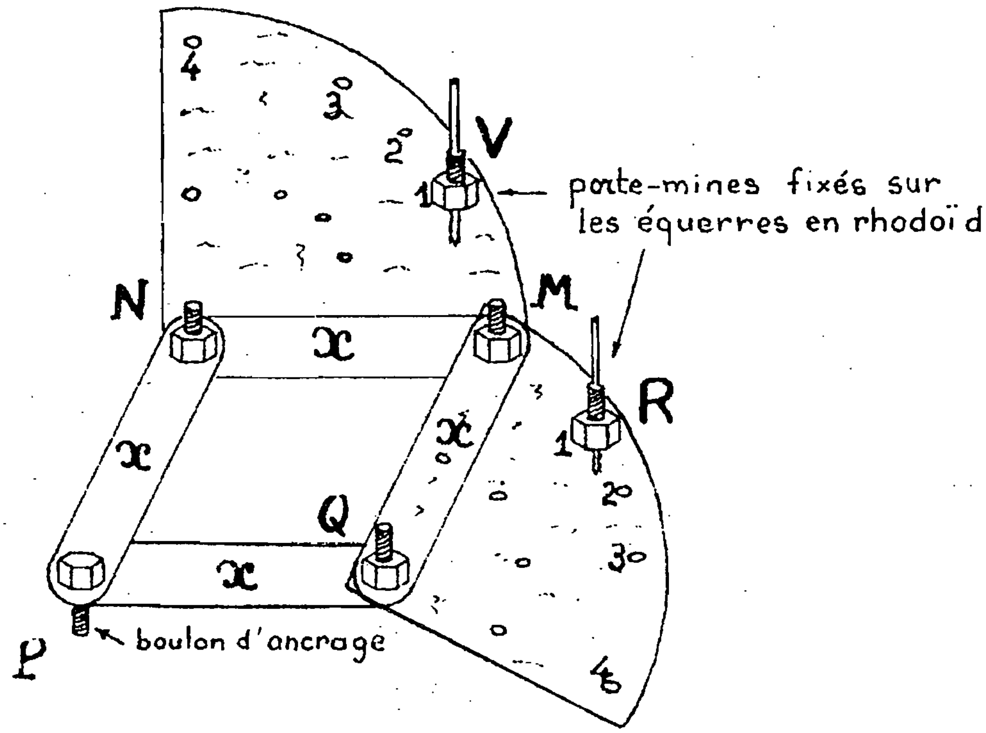
Annexe 1.2

MONTAGE D'UNE MACHINE D



Dans une conception ultérieure de la machine D, nous remplaçons avantageusement le cable par une tige rigide, type tringle à rideau (cf. photo et annexe).

MONTAGE DES MACHINES R



Exercice : pourquoi la transformation : V $\longmapsto$ R est-elle une rotation ? Où est son centre ? Quel en est l'angle ?

Pièces nécessaires à la réalisation des montages

Pièces MECCANO	Bague d'arrêt à glissière	Tringle 4cm	Tringle 10cm	Bande glissière	Bande 25 trous 32cm	Bande 15 trous 19cm	Boulon 5mm vis écrou	Rondelle métallique 10mm	Bague d'arrêt	Bras de manivelle	Cheville filetée 15mm	Clef	Tournevis	Pièces autres que MECCANO		
														Pointe 80mm Ø 3mm	Rail symétrie axiale 60cm	Recharge crayon bille Ø 3mm
Référence MECCANO	50	18a	15b	55	1	1b	37b 37a	38	59	62	115	34	36			
Référence DESSIN	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k			m	n	r
Symétrie centrale ou (homothétie)					2 (4)	2 (0)	4	3	1	4		1	1	1		2
Translation			2	6		4	8	11	10	2	4	1	1			2
Symétrie axiale	2	2			4		4	4	5	4		1	1		1	2
Inversion		1			2	4	6	3	7	6	1	1	1	1		2
Conchoïde	2				1	1	9			8	2	1	1	1		1
Matériel nécessaire pour un MONTAGE	2	2	2	6	4	4	8	11	10	6	4	1	1	1	1	2.

Annexe 1.3

Annexe 2