LA DIVISION A L'ECOLE

Division euclidienne et division exacte

d'après Claude BENZAKEN. Université GRENOBLE I

La division à l'école est une des activités les plus complexes. Elle nécessite une connaissance parfaite des trois autres opérations usuelles, de leurs relations mutuelles, de l'usage des parenthèses.

La division à l'école traditionnelle mobilise souvent les énergies vers la seule recherche du quotient alors que de nombreuses applications fondamentales en mathématiques portent sur le reste (divisibilité, nombres premiers, factorisation ...).

Division euclidienne ou division exacte ? Par quelle activité commencer ?

* On peut préférer en premier la division exacte car :
  - elle est un cas particulier de l'autre (donc en principe plus simple).
  - elle n'introduit qu'une seule opération.

Toutefois, si on l'introduit d'un point de vue ensembliste (organisation d'une collection en colonnes "équipotentes", le nombre de colonnes étant donné), on ne gagne rien à voir l'activité dans ce seul cadre restreint (où cela tombe juste).

Si, par contre, on l'introduit de manière purement arithmétique à partir de l'équation de la multiplication (exemple ($3 \times \square = 27$)) pour la rendre "réversible", l'activité risque d'être plus formelle qu'intuitive.

* Nous croyons donc possible une introduction fructueuse de la division dans son cadre le plus général (euclidien) et avançons pour cela les raisons suivantes :

- La division euclidienne est toujours possible et n'admet pas de restriction (sauf celle du diviseur nul).
- Elle met sur le même plan le quotient et le reste.
- L'activité division euclidienne est abordée (sans être certes formalisée) dès le CP à propos de la numération de position dans une base donnée.
- Les mécanismes de calcul restent les mêmes dans les deux cas.

La présentation de la division n'est pas faite par niveau (CE, CM_1, CM_2). Chaque maître pourra choisir, selon le niveau, ce qui lui semble accessible à ce niveau.

I INTRODUCTION AU CONCEPT DE DIVISION (euclidienne)

A - L'ACTIVITE DE DIVISION

Partons d'un exemple concret : des bonbons, en vrac, sur une table (il y en a par exemple 41). Nous disposons de sachets vides au départ.

Premier problème : Je fixe le nombre de bonbons à mettre dans chaque sachet (par exemple 8) et je dispose d'autant de sachets que je veux. Quel est le nombre maximum de sachets que je pourrai remplir ? Combien de bonbons ne pourront pas être ensachés ?

La mise en oeuvre est simple. Comme 41 > 8, je prends 8 bonbons sur la table, et les mets dans un sachet. Je recommence tant que ... et je m'arrête ... Le nombre de sachets remplis (5) est par définition le quotient de la division de 41 par 8, et le nombre de bonbons restants (1) est le reste de la division de 41 par 8. Ce reste est plus petit que 8.

Deuxième problème : Le nombre de mes sachets est donné (par exemple 8) et je voudrais remplir au maximum mes 8 sachets de manière que les sachets aient le même nombre de bonbons.

La mise en oeuvre est légèrement plus complexe car il s'agit de faire des "tours de distribution cumulatifs" (problème analogue à la distribution de cartes à jouer).

B ACTIVITES PREALABLE A UNE DIVISION (organisation).

Beaucoup de situations (nuancées les unes par rapport aux autres) conduisent à une activité de division (voir par exemple V.A).

Peut-on définir un schéma assez unique pour rendre compte de toutes ces situations ?

Reprenons les deux exemples précédents et imaginons que nous ne disposons pas encore des sachets (retard d'expédition).

Il est très "utile" de commencer le travail (pour bien s'en rendre compte, imaginez qu'il y ait 1732 bonbons et que le diviseur soit 52). Ce commencement de travail ne peut être qu'une organisation de mon ensemble de bonbons sur la table. Cette organisation est de nature géométrique (spatiale) et peut revêtir deux aspects :

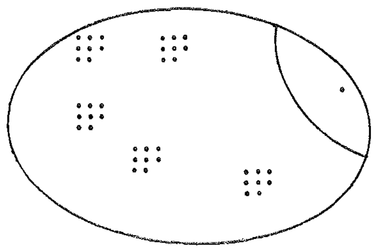


Figure 1

- Géométrie assez lâche par voisinage (topologie)

Pour le premier problème, on forme des "tas" de 8 bonbons, on met à part (on l'isole) le tas "reste" (figure 1).

Cette organisation ne fait rien gagner pour le deuxième problème puisqu'il faudra de toute façon faire des tours de distribution.

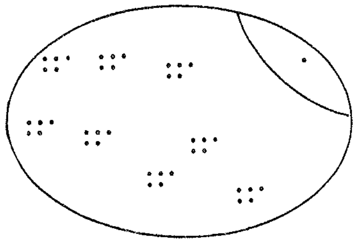
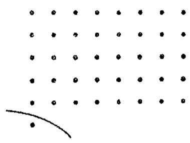


Figure 2

Pour le deuxième problème, on peut opérer par tas (on peut fixer 8 zones de tas et faire des tours de distribution), ce qui ne fait rien gagner pour le premier problème (figure 2).



à isoler

Figure 3

- Géométrie plus rigoureuse (type quadrillage) (figure 3).

On utilise 8 colonnes de quadrillage.

On isole la dernière ligne (si elle n'a pas 8 bonbons).

Cette organisation est utile pour les deux problèmes (problème 1, prendre les lignes ; problème 2, prendre les colonnes).

L'une de ces deux organisations est caractéristique de toute activité de division. La seconde semble plus judicieuse, mais le choix peut dépendre de la manière dont la multiplication a été introduite.

II LE FORMALISME MATHEMATIQUE RESUMANT UNE ACTIVITE DE DIVISION.

A L'ECRITURE MATHEMATIQUE

L'une des "organisations" géométriques précédentes permet d'écrire, si n est le nombre d'éléments de la collection considérée, p le diviseur, q le quotient et r le reste :

$n = (p \times q) + r$ (dans l'exemple, $41 = (8 \times 5) + 1$).

Mais il ne faut pas oublier le renseignement

$$r < p$$

L'activité d'une division est alors mathématiquement traduite par :

n donné, p donné et $p \neq 0$
Ecrire les deux relations valides
$\left.\begin{array}{ll} n = (p \times q) + r & \leftarrow \\ r < p & \leftarrow \end{array}\right\{ \begin{array}{l} \text{une égalité} \\ \text{une comparaison} \end{array}$
au moyen d'entiers q et r convenables.

Les relations

$$\begin{cases} n = (p \times q) + r \\ r < p \end{cases}$$

traduisent la division euclidienne de n par p, de même que les relations

$$\begin{cases} n = (q \times p) + r \\ r < p \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} n = r + (q \times p) \\ r < p \end{cases}$$

la multiplication et l'addition étant commutatives.

Alors que les relations

$$\begin{cases} n = (p \times q) + r \\ r < q \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} n = (q \times p) + r \\ r < q \end{cases}$$

traduisent la division euclidienne de n par q.

B - LES AMBIGUITE DE $(p \times q) + r$ POUR LA DIVISION - DIVISION EUCLIDIENNE PARTIELLE.

B1 - On suppose que les maîtres (une fois l'addition et la multiplication faites) ont entraîné leurs élèves à l'évaluation des quantités du type $(p \times q) + r$.

Ainsi

$$(3 \times 2) + 10 = 16$$
$$(4 \times 5) + 4 = 24$$
$$(2 \times 8) + 7 = 23$$
$$(9 \times 7) + 5 = 68$$

B2 - Si chacune des égalités précédentes est valide, toutes ne représentent pas une des deux relations traduisant une division (la première et la deuxième en particulier). La troisième peut résumer une activité de division à condition que 8 soit le diviseur. La quatrième peut correspondre à une division de 68 indifféremment par 9 ou par 7. Il importe donc, de bien faire sentir un tel phénomène aux élèves, par des exercices. Cela fait prendre, en tout cas, conscience que la deuxième relation $r < p$ est primordiale.

B3 - Une égalité valide du type

$$n = (p \times q) + r$$

qui ne correspond pas à une division par p (car $r \geq p$) est cependant intéressante (on peut l'appeler égalité de division partielle, q et r pourront être appelés quotient et reste partiels).
Elle correspond d'ailleurs dans la pratique, à un processus incomplet (un coup de téléphone interrompt provisoirement l'organisation de ma collection).

Par exemple

$$19 = (3 \times 2) + 13$$

ne traduit pas une division par 3 car 13 n'est pas plus petit que 3. Mais divisons 13 par 3, on obtient :

$$13 = (3 \times 4) + 1$$
$$1 < 3$$

De sorte que

$$19 = (3 \times 2) + 13$$

peut encore s'écrire

$$19 = (3 \times 2) + (3 \times 4) + 1$$

soit $19 = (3 \times 6) + 1$ grâce à la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition :

$$(3 \times 2) + (3 \times 4) = 3 \times (2 + 4)$$

REMARQUE IMPORTANTE

> En résumé si l'on suppose que 19 a été donné sous la forme $(3 \times 2) + 13$ la division de 19 par 3 peut être ramenée à celle de 13 par 3 (j'y gagne car 13 est plus petit que 19, donc plus "facilement" divisible).
>
> - Le quotient de 13 par 3 s'ajoutera au quotient partiel 2.
> - Le reste de 13 par 3 sera le même que le reste de 19 par 3.

De nombreux exercices peuvent être proposés aux élèves pour vérifier l'acquisition de cette notion.

IV DETERMINATION PRATIQUE DU QUOTIENT ET DU RESTE DANS UNE DIVISION, EN NUMERATION DECIMALE - (ALGORITHME).

Il s'agit, n et p étant donnés, de déterminer pratiquement $\square$ et $\lozenge$ de manière que

$$\begin{cases} n = (p \times \square) + \lozenge \\ \lozenge < p \end{cases}$$

A - PRINCIPE GENERAL INDEPENDANT DE TOUT SYSTEME DE NUMERATION

A1 - Le nombre n devant être égal à un multiple de p auquel on doit ajouter un nombre plus petit que p, il est évident que la première étape consistera à choisir le multiple de p

soit égal à n

soit le plus grand possible plus petit que n.

Si donc, on a ordonné tous les multiples de p écrits explicitement, dans l'ordre croissant en dessous de l'entier correspondant (sur un ruban par exemple) cette recherche est relativement simple, l'entier correspondant à ce multiple définit le quotient, le reste étant la différence entre le nombre n et ce multiple.

Exemple : (en base 10) Diviser 37 par 3

Entier	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Multiple	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42

Sur le ruban, le multiple le plus grand inférieur à 37 est 36, donc le quotient est 12 (en dessus de 36), le reste est $37 - 36 = 1$.

De même diviser 42 par 3 : le quotient est 14, le reste 0.
Malheureusement dans la pratique, on ne dispose pas de rubans tout prêts. On pourrait évidemment s'en confectionner dans chaque cas, mais si par malheur le quotient n'est pas petit, par exemple 273, il faudra calculer les 273 premiers multiples et donc faire 273 opérations.
C'est beaucoup trop. On constate que la technique de division va être délicate, et on va procéder par tâtonnements.

A2 - Un cas pourtant très simple est celui où n est plus petit que p (ex : diviser 17 par 41).

Il n'est besoin d'aucun calcul pour vérifier alors que :

$\begin{cases} n = (p \times 0) + n \\ n < p \end{cases}$ dans l'exemple : $\begin{cases} 17 = (41 \times 0) + 17 \\ 17 < 41 \end{cases}$

Le quotient est donc 0, le reste n.

B - METHODE(S ?) EN NUMERATION DECIMALE

B1 - Evaluation du nombre de chiffres du quotient

- C'est une étape assez importante, car c'est elle qui permet le fractionnement de la division.

- Les élèves auparavant doivent avoir bien compris que dans une collection, par exemple de 18731 objets

1873 est le plus grand nombre de barres (de dix objets) que je peux constituer avec la collection ;

187 le plus grand nombre de plaques (de 100 objets) ;

18 le plus grand nombre de grands cubes (de 1000 objets) ;

etc ...

- Ceci étant, l'écriture 18731 correspond à l'organisation de ma collection en 1 barre de grands cubes

8 grands cubes

7 plaques de petits cubes

3 barres de petits cubes

1 petit cube.

Le processus "matériel" de division (par exemple type tours de distribution) peut utiliser cette organisation "base dix".

Supposons que 18731 soit à diviser par 13. J'ai intérêt à conserver l'organisation base dix pour aller plus vite.

Distribuons d'abord les barres de grands cubes (il n'y en a qu'une) entre les 13 sachets. Il y aura donc 0 barre de grands cubes par sachet et il reste 1 barre de grands cubes.

Cette barre, je la convertis en grands cubes. Il y a donc 18 grands cubes à distribuer ; chaque sachet aura donc un grand cube et cela signifie que le quotient de 18731 par 13 comportera 4 chiffres (puisqu'il y a au moins un grand cube). C'est un renseignement appréciable.

La règle générale peut être énoncée :
Un nombre de 10 chiffres (ou plus généralement de x chiffres) divisé par un nombre de 4 chiffres (ou plus généralement de y chiffres) a un quotient de 6 ou 6 + 1 = 7 chiffres (ou plus généralement x - y ou (x - y) + 1 chiffres) selon que le nombre formé en prenant les 4 chiffres (les y chiffres) les plus hauts du dividende est inférieur ou non au diviseur.

Faire des exercices préalables sur ce point est une étape importante pour la suite.

B2 - Fractionnement de la division

Reprenons l'exemple de la division de 18731 par 13. Le quotient aura 4 chiffres.

Le chiffre le plus haut traduit la division de 18 par 13 soit :

$$\begin{cases} 18 = 13 \times 1 + 5 \\ 5 < 13 \end{cases}$$

Mais l'égalité donne (si l'on se rappelle que 18 est le nombre de grands cubes et donc que 18 représentent 18000 objets) à

$18000 = ((13 \times 1) + 5) \times 1000$

donc $18000 = (13 \times 1 \times 1000) + 5000$ (par distributivité)

soit $18000 = (13 \times 1000) + 5000$

et finalement :

$18731 = (13 \times 1000) + 5731$ (on ajoute 731).

On a une égalité de division partielle.

On peut, compte-tenu des remarques faites en IIB3, utiliser cette égalité et continuer en divisant

5731 par 13 ce qui nous donnera

$57 = 13 \times 4 + 5$ soit $5731 = 13 \times 400 + 531$

On recommence

$53 = 13 \times 4 + 1$ $531 = 13 \times 40 + 11$

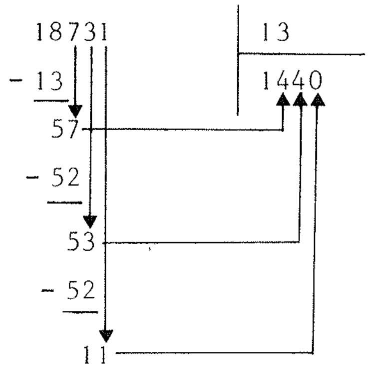
et 11 étant plus petit que 13, le processus s'arrête

$18731 = (13 \times (1000 + 400 + 40)) + 11$

soit encore

$18731 = (13 \times 1440) + 11$

On pourra condenser dans un seul schéma (schéma classique) toutes ces opérations fractionnées :



> En résumé, une division peut toujours être ramenée à l'enchainement <u>de divisions avec un quotient d'un seul chiffre</u>.

B3 - <u>Division à quotient d'un seul chiffre</u>

Ici, il n'y a pas de méthode systématique.

A priori, on pourrait essayer les neuf possibilités du quotient, c'est-à-dire 1 ou 2 ou 3 ou 4 ou ... etc ... 9.

- C'est en particulier le cas où le diviseur n'a qu'un chiffre.

Exemple : 38 à diviser par 9

On essaye 1 fois 9 (9), 2 fois 9 (18), etc ...

Cela suppose l'acquisition des tables de multiplication. A ce titre, la table de Pythagore nous renseigne immédiatement (au cas où on ne connait pas ses tables). Le diviseur étant en effet par exemple 9, dans la colonne du 9 on a un "ruban" des premiers multiples de 9 et on peut ainsi par lecture voir le quotient.

x	...	9
0		0
1		9
2		18
3		27
4		<u>36</u>
5		45
6		54
7		63
8		72
9		81

Exemple : 38 à diviser par 9 ; 36 est le multiple convenable. D'où :

$$\begin{array}{r|l} 38 & 9 \\ \cline{2-2} -\underline{36} & 4 \\ 2 & \end{array}$$

Le quotient est 4, le reste 2.

- Cas où le diviseur a plus d'un chiffre.:

La méthode traditionnelle consistant systématiquement à essayer de diviser le nombre formé par le chiffre ou les deux chiffres de rang le plus élevé du dividende, par le nombre formé par le chiffre de rang le plus élevé du diviseur, ne nous donne en fait qu'une limite supérieure du quotient (exemple : diviser 1738 par 283, donc 17 par 2, c'est-à-dire 8). L'essai de 8 est malheureux comme celui de 7 d'ailleurs.

On aurait pu systématiquement diviser le nombre (de un ou deux chiffres) par le nombre formé du chiffre de rang le plus élevé du diviseur préalablement augmenté de 1. On aurait obtenu une limite inférieure du quotient mais à l'avantage près que l'essai de ce quotient nous fournit une réponse partielle et "utile" (division partielle).

Exemple précédent : 1738 par 283 donc 17 par 3, c'est-à-dire 5, d'où l'essai :

$$\begin{array}{r|l} 1738 & \underline{283} \\ -\underline{1415} & 5 \\ 323 & \end{array}$$

Ainsi qu'on l'a vu et comme 323 n'est pas plus petit que 283, on peut conserver l'acquit précédent et continuer :

$$\begin{array}{r|l} 1738 & \underline{283} \\ -\underline{1415} & 5 \\ 323 & 1 \\ -\underline{283} & \\ 40 & \end{array}$$

Cette deuxième méthode systématique qu'on peut qualifier de "lente" peut être avantageuse pour des enfants ayant des difficultés à démarrer ou pour qui l'idée d'un essai (à échec) est paralysante.

Entre les limites supérieures et inférieures systématiques, on peut choisir évidemment un moyen terme et aboutir soit à un essai inutile, soit à un quotient partiel (par exemple, entre 5 et 8 on pourrait choisir 6 ou 7).

- La méthode (si l'on peut parler de méthode) la plus efficace est celle qui donne un "ordre de grandeur" du dividende et du diviseur à 10 près, à 100 près, etc ...

1738 divisé par 283, c'est presque 1740 divisé par 280, 1700 divisé par 300.

Cela suppose un apprentissage, et des mécanismes mentaux que seule une grande pratique peut donner et des difficultés dans l'approximation surgissent quand le dernier chiffre est 5.

V THEMES SUR LA DIVISION

Le premier thème que nous présenterons est celui d'un jeu avec raisonnement, destiné surtout à illustrer la division.

Le deuxième est une approche de la notion de congruence arithmétique dont la conséquence pratique est la recherche du reste dans des cas simples sans faire de division (donc presqu'au niveau calcul mental) ; en particulier à définir les critères de divisibilité usuelle (par 3, 4, 5, 8, 9) et non usuelle (7, 11) à justifier également "la présentation de preuve par 9".

La troisième est une approche de la relation de divisibilité des nombres premiers, de la factorisation, du p.g.c.d. et du p.p.c.m.. Elle n'est qu'esquissée.

A - LE JEU DE LA COURSE à n

(Voir l'article de Brousseau dans l'ouvrage : La mathématique à l'école élémentaire. Une approche de la division euclidienne).

- Ce jeu se jouait à deux au temps des cavaliers pendant les longs voyages. On fixait un but (par exemple 200) et un seuil (par exemple 6). Le premier cavalier annonçait un nombre autre que 0 plus petit que 6. Le deuxième ajoutait à ce nombre un nombre autre que 0 et plus petit que 6 et énoncait le résultat, le premier continuait alors comme le deuxième, etc ...

Exemple de début de partie (alternativement) :

1, 1 + 4 = 5, 5 + 3 = 8, 8 + 2 = 10, etc ...

Le premier qui annonçait 200 avait gagné.

Exemple de fin de partie :

C1	C2	C1	C2	C1
186	190	194	195	200

Le cavalier 1 avait gagné.

On recommençait un autre jeu en fixant un autre seuil et un autre but.

Il est évident que dans le jeu de course à 200 par seuil de 6, le premier arrivé à 194 a gagné car le suivant ne peut dire qu'un nombre compris entre 195 ou 199, et au coup suivant l'autre cavalier peut terminer à 200.
Ainsi, pour gagner à 200 par seuil de 6, il suffit de gagner à 194 par seuil de 6. 194 est précisément 200 - 6. De même pour gagner à 200 - 6 par seuil de 6, il suffit de gagner à 200 - 6 - 6 (c'est-à-dire 200 - 2 × 6) par seuil de 6, et finalement plus généralement à 200 - (q × 6) par seuil de 6. En conséquence, on est amené à diviser 200 par 6 :

$$200 = 6 \times 33 + 2$$

D'où la stratégie : gagner à 2, puis 8, puis 14, etc ... Le premier qui parle a donc gagné s'il sait jouer. Dans le jeu de 200 par seuil de 5, au contraire c'est le deuxième qui parle qui gagne (s'il sait jouer).
Pour des enfants, on aura intérêt à choisir des nombres plus petits : course à 20 par seuil de 3 et successivement :

- leur faire découvrir le rôle stratégique de 17 (cela n'est pas si rapide) ;
- leur faire comprendre (et c'est peut-être là le plus dur), que la course revient à gagner à 17 et donc à faire découvrir à nouveau le rôle stratégique de 14, etc ...
- résumer tout cela par l'opération de division.

Ce jeu est donc un piège (car si l'on connait le mécanisme précédent l'un des deux joueurs est toujours gagnant). On peut l'illustrer en ayant par exemple auparavant enregistré des réponses avec temps de pause sur un magnétophone :

je dis deux ; à toi ... je dis cinq ... je dis 8 ... je dis 11 ... je dis 14 ... je dis 17 ... je dis 20 et j'ai gagné (... = pause). Le magnétophone gagnera toujours.

Nous donnons ainsi un exemple de "soi-disant intelligence artificielle". L'intérêt d'un tel thème paraît beaucoup plus être un exercice de raisonnement illustrant le rôle de la division, plutôt qu'une approche de la division.

Par ailleurs, il peut être une initiation à la notion de jeu de Nim, ou plus généralement de jeu sur un graphe. C'est ainsi qu'est "isomorphe" au jeu de la course à 20 par seuil de 3, le jeu (figure 1)

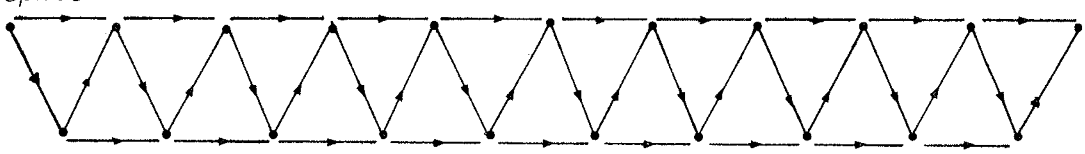
départ *arrivée*

Figure 1

consistant à atteindre le point d'arrivée de la figure en déplaçant à tour de rôle un jeton vers la droite, d'un ou deux crans, à partir du point de départ initial, ou mieux encore le jeu analogue (figure 2).

départ *arrivée*

Figure 2



(le jeton ne se déplace que d'un cran dans le sens des flèches, mais en chaque position il y a deux possibilités de déplacement).

B - UNE ARMEE DE NOMBRES OU L'APPROCHE DE LA NOTION DE CONGRUENCE ARITHMETIQUE (reste dans une division)

B1 - Le maître commence, sans rien dire, à écrire la suite des entiers dans trois colonnes (on pourrait prendre 5 ou 6 ou 9 colonnes). Voici ce que cela donne

0	1	2
3	4	5
6	7	8
9	10	11

puis demande à un élève de continuer (dans la limite de place au tableau) ce que ce dernier fait sans difficulté

12	13	14
15	16	17
18	19	20
21	22	23

"Qu'ai-je fait ?" demande le maître, "tu as écrit (rangé ?) les premiers nombres dans trois colonnes".

- On résume et on a une opération "addition" et "multiplication" entre chefs, chaque résultat étant un chef. On les notes $\boxplus$ et $\boxtimes$ (entourés d'un rectangle pour montrer que ce n'est pas la même opération que + et ×). On dresse les tables :

$\boxplus$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$\boxtimes$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

On vérifie cependant dans tous les cas que 0 et 1 se comportent respectivement pour $\boxplus$ et $\boxtimes$ comme pour + et ×.

B3 - Troisième étape - Calcul rapide des restes

On va prendre un grand nombre

32852

On peut l'écrire :

$$32852 = (3 \times 10000) + (2 \times 100) + (8 \times 100) + (5 \times 10) + 2$$

Pour calculer son chef, on peut remplacer 10000, 1000, 100, 10 par leur chef, mais le chef de 10 c'est 1 (voir les colonnes). Le chef de 100 ?

$100 = 10 \times 10$ donc chef de $100 =$ (chef de 10) $\boxtimes$ (chef de 10).

100 a donc pour chef 1

$1000 = 100 \times 10$ a aussi pour chef 1, ainsi que 10000, etc ...

Donc le chef de 32852 est le même que le chef de 3 + 2 + 8 + 5 + 2. On obtient finalement pour chef 2. Au passage on a :

Pour qu'un nombre soit divisible par 3, il faut et il suffit que la somme de ses chiffres soit divisible par 3.

B4 - Généralisation

On change le nombre des colonnes.

- Le cas de 2 colonnes. Le chef de 10 est 0 (de même donc pour 100, 1000, etc ...).

Donc le chef d'un nombre est le même que celui du chiffre des unités.

- Cas de 4 colonnes : Le chef de 10 est 2. Le chef de 100 = 10 × 10 est le même que celui de 2 × 2 = 4, c'est-à-dire 0. Le chef de 1000, 10000, etc ... est donc 0. Le chef d'un nombre est alors le même que celui du nombre formé des deux derniers chiffres (règle de divisibilité par 4).

- Cas de 5 colonnes : le chef de 10 est 0 (le chef du chiffre des unités donne le chef de tout nombre).

- Cas de 7 colonnes : le chef de 10 est 3, donc celui de 100 est le même que celui de 3 × 3, c'est-à-dire 2 ; le chef de 1000 est le même que celui de 3 × 2, c'est-à-dire 6 (on peut continuer, mais arrêtons nous là).

Le reste de 4321 par 7 est donc le même (en remplaçant 1000 par 6, 100 par 2, 10 par 3) que celui de (4 × 6) + (3 × 2) + (2 × 3) + 1 = 37 lequel a un même reste que 3 × 3 + 7 = 16 qui a pour reste 2.

- Cas de 9 colonnes (règle du reste, en profiter pour expliquer la présomption de preuve par 9 et pourquoi ce n'est pas une preuve. Expliquer en particulier qu'une erreur d'alignement des chiffres dans une multiplication avec nombre de plusieurs chiffres n'est pas décelable).

- Cas de 11 colonnes : le chef de 10 est 10 ; le chef de 100 est (par calcul) 1. Donc le chef de 1000 est 10, de 10000 est 1, de 100000 est 10.

	1 ↑	10 ↑	1 ↑	10 ↑	1 ↑		
chef ↑	10000	1000	100	10	1		
nombre	3	4	1	2	8	=	34128

Le chef de 34128 est le même que :

$$3 + 40 + 1 + 20 + 8 = (3 + 1 + 8) + 6 \times 10$$
$$= 11 + 60 = 71$$

On s'est ramené à un nombre de deux chiffres.

On calcule alors et on trouve 5.

On peut déduire une règle de divisibilité par 11 (les nombres de deux chiffres divisibles par 11 étant connus).