LE PASSAGE DE L'ARITHMETIQUE A L'ALGEBRE DANS L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES AU COLLEGE

DEUXIEME PARTIE[1]

PERSPECTIVES CURRICULAIRES : LA NOTION DE MODELISATION

Yves CHEVALLARD
I.R.E.M. d'Aix-Marseille

L'algèbre, selon Descartes, est la clé de toutes les autres sciences.

Le petit Robert.

I - INTRODUCTION.

1.1 La réforme Chevènement et le triomphe empiriste.

Le tableau que nous tracions, naguère, dans la première partie d'un travail dont nous livrons ici le second volet, apparaît rétrospectivement prémonitoire : la réforme mise en train sous le ministère de Jean-Pierre Chevènement, et dont l'application se poursuit, n'a fait qu'en prolonger les lignes en épaississant le trait. La pulsion empiriste, dont nous avions souligné la prégnance remarquable[2], déjà mortelle en géométrie[3], se traduit, dans le reste du cursus du collège, par une poussée vigoureuse du numérique, par l'éparpillement et l'évanouissement de l'apprentissage des outils algébriques, par l'insistance naïve sur le concret, et par le recours constamment réaffirmé à des «activités» dont l'enseignement cherchera, à bon droit, mais fréquemment en vain, la substance[4].

De cette évolution - qui reconduit la déstabilisation du curriculum amorcée à la fin des années soixante -, les indices pourraient être multipliés presque indéfiniment. Est-il besoin de mentionner encore la disparition de toute référence explicite à l'algèbre, comme nous le faisions en dressant le tableau des changements des quelques dernières décennies ? Sans doute pas. Trois rubriques donc composent aujourd'hui les programmes officiels : travaux géométriques, travaux numériques, organisation et gestion de données et fonctions. La première apparaît, à une lecture cursive mais non moins attentive, comme une louange recommencée des bonnes manières dans l'usage des instruments «de dessin» ; comme l'administration sereine de l'affinement naturaliste du coup d'œil - qui devra permettre de repérer les symétries d'une «figure simple» et n'ira guère au-delà. Mais c'est dans la seconde rubrique qu'il faut chercher les x et les y du langage algébrique. Ceux qu'on a bien voulu y laisser survivre y vivent cachés ; et leur rare présence semble n'être que le simple effet de cette extravagante générosité de l'empirisme naturalisme qui, se mâtinant de baroque, est enclin à faire fleurir des êtres qui lui sont et apparemment inutiles, et naturellement indifférents. Ainsi lira-t-on, dans le programme de la classe de quatrième, en sa rubrique des travaux numériques, après un paragraphe tout entier consacré aux «nombres» : «Généralisation des études précédentes aux calculs portant sur des écritures littérales». Généralisation : l'aveu est sans détour[5].

La troisième rubrique - «Organisation et gestion de données» - ne retranche rien à ce triomphe du numérisme : elle lui ajouterait plutôt. Que faire avec des nombres, sans appareil mathématique un peu solide ? Produire de nouveaux nombres, ou de nouveaux arrangements de nombres : les classer, les compter, les regrouper, les arrondir, etc. Le répertoire des opérations significatives est vite clos. Il esquisse et circonscrit une statistique de première prise qui peut faire effet quelques temps. Il se projette en des activités «purement numériques» où le désir concrétiste trouve son compte. Numérisme et concrétisme y règnent sans partage, dans l'exclusion de toute algèbre. Un point extrême de l'évolution est ici atteint[6].

1.2 Du calcul formel au calcul fonctionnel.

Le fonctionnement didactique du savoir d'ascendance savante rend fréquemment un son étrange pour qui ne participe pas intimement de l'univers mathématique qu'il définit[7]. Affirmation que nous illustrerons d'abord par un exemple d'observation banale. Un élève d'une classe de quatrième apprend à factoriser des expressions algébriques. Vous êtes mathématiciens, mais étranger, par état, aux tours et aux détours de l'enseignement du collège - imaginons-le un instant du moins. Cet élève vous demande de lui proposer quelques expressions à factoriser, en vue de s'entraîner. Il vous donne pour modèle les exercices faits en classe. Sur ce patron, vous lui proposez de factoriser par exemple l'expression suivante :

$$(2x - 3)^2 - 4(x + 1)(4x - 6) + (4x^2 - 9).$$

Il parvient sans retard au résultat «attendu», soit

$$-4(2x -3)(x + 2),$$

par un calcul dont le luxe de détails vous surprend mais où vous voyez le reflet d'un enseignement adressé à des débutants en calcul algébrique. Cet élève, pensez-vous, maîtrise fort bien ce type de problème de factorisation. Vous admirez même que, parvenu à l'expression

$$(2x - 3)(-4x - 8),$$

il est pensé à mettre en facteur le coefficient -4, et qu'il l'ait fait sans coup férir.

Mais voici qu'il attend de vous une approbation, et vous le dit : ne se serait-il pas trompé ? Vous croyez habile de lui répondre qu'il pourrait tenter de procéder par lui-même à quelques vérifications, en donnant à x des valeurs numériques simples, «par exemple -2, qui annule la seconde expression et qui devrait donc annuler la première». Votre élève d'occasion, pourtant, paraît ne rien entendre à ce discours. Son étonnement vous étonne. Vous répétez votre suggestion. «On n'a jamais fait ça...», finit-il par avouer. Vous comprenez enfin qu'il n'y a pour lui, à cet instant, aucun lien entre la transformation qu'il a fait subir à l'expression algébrique proposée, d'une part, et le fait de substituer des valeurs numériques à ce... petit x qu'il a si habilement manipulé, d'autre part. Aucun.

Peut-être vous faudra-t-il du temps pour découvrir qu'il n'y a pas là l'effet de quelque singularité facétieuse de l'enseignement, ou la marque de quelque idiosyncrasie de l'élève. Peut-être même cela vous rappellera-t-il tel ou tel épisode vécu dans une classe de seconde : ayant résolu un système de deux équations à deux inconnues, l'élève s'était montré surpris que, reportant - à votre instigation - les valeurs trouvées dans les équations initiales, il obtienne deux égalités. Mais ce que vous découvrez alors a une portée plus générale : le **rapport de l'élève au calcul algébrique** n'incorpore pas l'idée d'une relation entre manipulation algébrique de l'expression, d'une part, et substitution de valeurs numériques dans l'expression, d'autre part. Un tel rapport vous paraîtra étrange, tronqué, inachevé. C'est cependant là, n'en doutez pas, le rapport officiel que l'on a, jusqu'alors, demandé à l'élève d'exhiber ; et sa conduite, dont vous alliez le louer tout à l'heure, et bien adéquate au rapport officiel attendu. Vous pourrez douter, en revanche, que le rapport officiellement imposé se révèle bien adapté ou, comme nous dirons, **idoine**, à certains emplois effectifs que vous avez en tête (par exemple factoriser un polynôme P(x) du troisième degré, afin de résoudre l'équation P(x) = 0).

Telle est en effet la contradiction essentielle. La transposition didactique, qui modifie le fonctionnement des objets de savoir, imprime une certaine spécificité au rapport officiel que l'enseignement prodigué propose à l'élève. Et ce rapport officiel engendre chez l'élève un rapport personnel qui, aussi conforme soit-il au rapport officiel, jouira d'une idonéité limitée dès lors que l'objet de savoir concerné, ayant cessé d'être enjeu didactique pur, ne sera plus qu'outil de l'activité didactique-mathématique de l'élève : dès lors que, par exemple, la factorisation d'une expression cessera d'être le **but** de son activité, pour devenir le **moyen** permettant de résoudre une équation du troisième degré dont on connaît une racine.

De la même façon alors qu'il peut exister une contradiction entre fonctionnement didactique et fonctionnement savant du savoir[8], entre «intérieur» et «extérieur», il peut y avoir contradiction, **à l'intérieur même du système d'enseignement**, entre **deux types de régime d'un même objet de savoir**. Le passé de l'élève vient ici hypothéquer son développement actuel et futur.

La propension à l'empirisme que nous avons signalée joue à cet égard un rôle éminent[9]. Elle est, croyons-nous, à l'origine du hiatus qui s'affirme, au cœur même du collège, dans le passage du cycle des classes de sixième et cinquième à la classe de quatrième en ce qui concerne l'enseignement de la géométrie ; ou, plus généralement (puisqu'on ne dissout pas une difficulté en la divisant, au contraire de ce que semblent vouloir faire les nouveaux programmes du collège), dans le passage d'une «géométrie dessinée» à une «géométrie démontrée». En accréditant concrètement cette idée que la géométrie se fait par la considération naturaliste de figures sensibles, bien appréhendées en un exact tracé soigneusement élaboré, l'empirisme flamboyant des petites classes engendre une dette que l'élève de quatrième n'aura pas peu de mal, en bien des cas, à rembourser. Et ce que nous pourrions nommer, plus largement, l'«endettement empiriste», ne sera pas moins net dans le cas de l'algèbre. Le caractère formel du rapport à la figure géométrique, qui met en avant le soin, la précision, l'exactitude - toutes choses généralement peu pertinentes dans l'activité géométrique **mathématique**[10] -, se redouble d'un traitement tout aussi formel des expressions algébriques, enfermées dans un monde clos de manipulations supposées en elles-mêmes significatives. Or c'est là, exactement, qu'un passif va se creuser.

La manipulation des expressions algébriques au cours du premier apprentissage organisé au collège, en effet, n'est tendue vers aucun but (mathématique) extérieur au calcul algébrique, lequel doit alors trouver en lui-même la source de ses propres exigences. Aussi les «règles» de cette manipulation sont-elles immotivées, purement formelles, s'exprimant par des consignes elles-mêmes standardisées (développer, factoriser, etc.). Cette particularité apparaîtra mieux, par contraste, dans des exemples d'emploi **fonctionnel** du calcul algébrique - lequel surgira massivement au lycée, rendant évident le manque d'idonéité du rapport au calcul algébrique officiellement inculqué au collège.

1.3 Du collège au lycée et au-delà.

Soit ainsi à étudier la fonction donnée par l'expression

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 2x}{x^2 - 5x + 6}.$$

La factorisation du dénominateur (par résolution de l'équation du second degré correspondante), $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$, est d'abord nécessaire pour déterminer le domaine de définition. Encore faut-il vérifier qu'un prolongement par continuité n'est pas possible - ce qui serait ici le cas si le numérateur s'annulait pour $x = 2$ ou $x = 3$. La détermination des limites en $x = 2$ et $x = 3$ tirera alors l'avantage d'une **réécriture adaptée** de l'expression f(x), qui sépare les parties «inertes» (mises au numérateur) de la partie «sensible» (soit $x - 2$ dans le premier cas), qui vient au dénomateur :

$$f(x) = \frac{\dfrac{x^3 + x^2 - 2x}{x - 3}}{x - 2}.$$

Le nouveau numérateur (qui est lui-même une fraction rationnelle) tend alors vers une limite **finie non nule**, ici -8. On en déduit immédiatement que (f(x) tend vers moins l'infini quand x tend vers 2 par valeurs supérieures, vers plus l'infini quand x tend vers 2 par valeurs inférieures.

La réécriture ci-dessus correspond, **mais «à l'envers»**, au schème (a/b)/c=a/bc. Elle n'a, bien sûr, **aucune raison d'apparaître** dans le maniement formel des expressions algébriques, puisqu'elle ne répond ni à une consigne de développement, ni à une consigne de factorisation, etc. En vérité, elle se justifie tout entière, ici, par une fin **extrinsèque au calcul lui-même**, une fin à l'égard de laquelle le calcul constitue un moyen : la détermination des limites.

De la même façon, c'est une autre réécriture de f(x), soit

$$f(x) = x + 6 + \frac{22x - 36}{x^2 - 5x + 6}$$

qui se révèlera adaptée à la détermination d'une éventuelle asymptote oblique et à l'étude de position correspondante. On sait pourtant que, en quasiment toutes les terminales, on renonce à faire établir une telle égalité, les énoncés se contentent soit de la fournir aux élèves, en demandant qu'elle soit par eux «vérifiée», selon des mœurs calculatoires intériorisées de longue main, soit d'en donner la forme, en demandant d'en calculer (par identification) les coefficients indéterminés. Ajoutons qu'une autre réécriture encore sera nécessaire si l'on veut calculer une primitive de f, le terme fractionnaire étant alors décomposé en éléments simples[11], soit

$$\frac{22x - 36}{x^2 - 5x + 6} = \frac{-8}{x - 2} + \frac{30}{x - 3}.$$

Ces exemples, limités ici au champ des problèmes relatifs à l'étude d'une fonction donnée par une expression algébrique, pourraient être multipliés. C'est à chaque pas qu'au lycée l'élève rencontrera l'inadaptation du rapport au calcul algébrique mis en place au collège - inadaptation que l'exploration clinique d'élèves «en difficulté» fait apparaître régulièrement, sous des pathologies variées, comme une source majeure des échecs constatés. Mais, contrairement au cas de la géométrie, la contradiction n'est plus ici **intérieure au collège**, et, de ce fait, n'est vraiment visible ni des professeurs de collège (qui n'en rencontrent guère les effets d'inadaptation), ni des professeurs de lycée (qui constatent tout au plus que les élèves «ne savent pas calculer»). Elle n'est pas moins centrale, et théoriquement (comment la réduire ?), et pratiquement, par son rôle dans l'étiologie de l'échec au lycée et au-delà.

1.4 Un problème d'ingénierie curriculaire.

Le problème didactique général auquel on est alors conduit peut être formulé ainsi : est-il possible de définir et de réaliser un **état du système d'enseignement** (c'est-à-dire un **curriculum**) qui détermine un rapport officiel à l'algébrique plus **idoine** aux tâches auxquelles l'algébrique sera employé notamment au lycée ?

Il s'agit-là, en essence, d'un problème d'**ingénierie curriculaire** (de «curriculum development», comme disent les auteurs de langue anglaise). On verra, dans la suite de ce travail, que la résolution d'un tel problème fait surgir, immanquablement, des problèmes didactiques profonds, que nous essaierons d'expliciter.

Dans cette perspective, une première démarcation doit être tracée. Le curriculum, état du système d'enseignement à un moment donné, n'est pas défini entièrement par les programmes officiels. Ceux-ci fixent un **cadre directeur** qui s'impose comme un système de contraintes explicites au processus de transposition didactique, mais qui ne saurait le déterminer exactement[12]. Plus importantes pourtant, mais aussi davantage négligées, voire ignorées, sont à cet égard les contraintes didactiques permanentes qui exercent leurs effets, bien souvent - en l'absence du moins d'analyse didactique approfondie -, **à l'insu des agents du système d'enseignement**.

De ces contraintes, l'un des exemples majeurs est celui des contraintes de **compatibilité** entre savoir **enseigné** et savoir **savant**, dont l'un des effets principaux est la «pulsion empiriste», laquelle s'exprime ici, dans la longue durée, et comme indifférente aux réformes officielles des programmes, par l'exacerbation de deux tendances concrètes solidaires, la tendance numériste (le «numérisme») d'une part, la tendance concrétiste (le «concrétisme») d'autre part.

La tâche de l'analyse didactique, à cet égard, est de remonter, au-delà du contrat dûment étayé des tendances concrètes, jusqu'aux **système de contraintes qui les imposent**, et d'établir sous quelles conditions certaines d'entre elles pourraient être annulées ; ou, plus généralement, quelle est l'exacte marge de liberté curriculaire et didactique que les contraintes dont elles apparaissent comme des effets nous offrent. C'est dans cette perspective ambitieuse, mais fondamentale, que nous situons l'ensemble des développements qui suivront.

II - CALCUL ALGEBRIQUE ET SYSTEMES DE NOMBRES.

2.1 Domaines de calcul et calculs algébriques.

L'élaboration d'un calcul algébrique suppose, à titre de motivation ou d'arrière-plan, un ou des **domaines de calcul**. On entendra par là un ensemble d'objets mathématiques sur lesquels **on puisse calculer**. Les nombres, les vecteurs, voire les points du plan (calcul barycentrique), fournissent des exemples élémentaires de tels domaines de calcul.

Lorsque, en clase de sixième, l'enseignant passe de l'observation que 2 + 3 = 5 et 3 + 2 = 5, à l'écriture de la relation générale a + b = b + a, il passe alors du calcul **sur les nombres** (entiers naturels) à un calcul **algébrique** (à coefficient entiers naturels). En d'autres termes, un calcul algébrique (que nous ne définirons pas plus précisément ici, rend manifeste une **syntaxe** à laquelle le domaine de calcul associé fournit une **sémantique**[13].

A tout domaine de calcul correspondent ainsi des formes (ou structures) algébriques, qui offrent une image formelle du domaine de calcul considéré. Aux entiers naturels, on pourra faire correspondre la structure de demi-anneau (unitaire, commutatif, intègre) ; aux entiers relatifs, la structure d'anneau (euclidien) ; aux rationnels, la structure de corps ; etc. L'étude de ces calculs algébriques est l'un des objet de l'algèbre.

2.2 Une incontournable dialectique.

Les premiers domaines de calcul rencontrés - dans l'histoire aussi bien qu'à l'école - sont constitués par les différents **systèmes de nombres** successivement introduits et étudiés à l'école primaire et au collège : $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$. Bien que ces systèmes ne soient pas les seuls domaines de calcul présents à ce niveau - il faut penser ici au calcul vectoriel -, c'est à eux que nous nous réfèrerons dans ce qui suit.

Le problème didactique étudié - la place et le rôle du calcul algébrique au collège - conduit ainsi inévitablement à la question des systèmes de nombres. Nous verrons qu'il existe entre l'un et l'autre problèmes un lien nécessaire et incontournable, que la «solution» empiriste actuelle tend simplement à occulter, en dépit des effets négatifs qui en résultent.

Le problème didactique de la construction des différents systèmes de nombres est au cœur du curriculum du collège. C'est, objectivement, un problème difficile, devant lequel certains parmi les meilleurs ont pu reculer[14] et dont on peut penser qu'il n'a pas reçu jusqu'à présent de solution satisfaisante. De cette pathologie du curriculum, la situation que nous avons évoquée à propos des structures numériques (leur prolifération, et cette «cancérisation» du corpus enseigné qu'elles réalisent) constitue l'un des symptômes les plus frappants[15].

Nous essaierons de montrer que le problème du calcul algébrique, de sa construction formelle comme de ses emplois, lui est doublement lié. D'une part, en effet, les systèmes de nombres fournissent les domaines de calcul sur la base desquels s'élèvera le calcul algébrique, ainsi qu'on l'a déjà souligné. Mais, d'autre part, le calcul algébrique constituera le **mobile** essentiel, et l'**outil** fondamental de la construction des systèmes de nombres successifs[16]. Dans ce but, on examinera d'abord rapidement la question des systèmes de nombres au collège.

2.3 La notion de système de nombres.

La notion de système de nombres peut, sans doute, être «définie» en extension, par l'énumération des systèmes de nombres effectivement étudiés - ceux que l'on a mentionnés plus haut. Il est bon, toutefois, de donner, à l'usage du lecteur, la définition formelle d'une première classe de tels systèmes. On appelle ici **système de nombres** tout ensemble SN sur lequel, tout d'abord, on a défini

* une **addition** (notée +), opération binaire associative, commutative, possédant un élément neutre (noté 0) ;

* une **multiplication**, opération binaire associative, commutative, possédant un élément neutre (noté 1), et distributive par rapport à l'addition.

Les systèmes de nombres effectivement visés possèdent en outre

* une **relation d'ordre** (total), compatible avec l'addition et la multiplication.

Ce réquisit écarte les systèmes de «nombres» qui ne trouvent pas leur origine dans le problème historiquement et didactiquement fondamental à ce niveau, celui de la **mesure des grandeurs** discrètes ou continues[17]. L'existence d'une structure d'ordre total compatible permet de disposer de propriétés qui, au niveau où l'on se situe, participent essentiellement de la notion de système de nombres, à savoir que

* l'addition et la multiplication vérifient **la règle de simplification**[18].

Enfin un dernier réquisit, rarement énoncé, doit être introduit. P(x) et Q(x) étant des polynômes du premier degré à coefficients dans SN (P(x) = ax + b, Q(x) = cx + d, a, b, c, d dans SN), appelons «équation du premier degré sur SN» une égalité du type P(x) = Q(x). On posera alors que

* toute équation du premier degré sur SN qui n'y est pas identiquement vérifiée **y possède au plus une solution.**

Sans doute cette dernière propriété découle-t-elle immédiatement, sous certaines conditions (sur lesquelles on va revenir), de la validité dans SN des règles de simplification. Mais elle écarte plus visiblement - même si cela était déjà fait - les domaines de calcul **non intègres**, tel l'anneau des matrices carrées d'ordre 2, etc. Elle nous fournit en outre un premier exemple de la manière dont l'algèbre va permettre la **formulation** et l'**étude** des propriétés des systèmes de nombres[19].

2.4 Un problème fondamental.

Nous ajouterons enfin une dernière propriété à la définition des systèmes de nombres. Cette propriété est motivée par le problème récurrent et fondamental que soulèvent les systèmes de nombres étudiés au collège : de tels systèmes, en effet, **ne contiennent jamais assez de nombres**. La nécessité de leur extension répétée (de $\mathbb{N}$ à $\mathbb{Z}$, de $\mathbb{Z}$ à $\mathbb{Q}$, etc.) découle de cette insuffisance, à laquelle on peut trouver une double origine.

La première est, si l'on peut dire, extrinsèque, et naît de l'usage originel que l'on entend faire des nombres : **mesurer des grandeurs**. On notera à ce propos que la définition de la notion de système de nombres donnée ci-dessus ne permet pas encore de définir la **différence** de deux nombres a et b, a > b[20]. Pour faire face à ce besoin imposé par les problèmes de mesure (qui imposeront aussi, plus tard, l'existence d'une racine carrée, etc.), il convient d'ajouter alors à notre définition l'exigence suivante :

* si a > b, alors il existe c tel que b + c = a.

Dans ces conditions, une équation du premier degré s'écrit sous la forme ax+b = c et les règles de simplification entraînent immédiatement qu'une telle équation a au plus une solution dans SN, dès lors qu'elle n'est pas une identité.

On notera que l'exigence nouvellement introduite s'exprime à l'aide d'une équation (du premier degré) et d'une inégalité : **si a > b, alors l'équation x + b = a possède une solution (et une seule) dans SN**. D'une manière générale, la notion d'équation (algébrique) est l'**outil essentiel** pour gérer les extensions successives des systèmes de nombres étudiés, jusqu'à $\mathbb{Q}$ au moins[21].

Un second type d'insuffisance des sytèmes de nombres utilisés est, si l'on peut dire, intrinsèque : il tient au fait que, à un moment donné, on dispose de trop peu de nombres pour qu'en résulte un calcul algébrique «agréable». D'où le passage aux nombres négatifs puis aux nombres rationnels (soit de $\mathbb{N}$ à $\mathbb{Z}$, etc.) et, plus tard, aux nombres complexes, par le plongement de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$[22].

Ces deux types d'insuffisance se superposent en certains cas : ainsi le passage de $\mathbb{D}$ (ou de $\mathbb{Z}$) à $\mathbb{Q}$, domaine de calcul sur lequel l'équation $ax = b$ a toujours une solution dès lors que a n'est pas nul, permet à la fois de mesurer davantage de grandeurs (par exemple une partie d'un segment de mesure 1 qu'on a divisé en 3 parties égales) et de disposer d'un calcul plus maniable (dans lequel la division par un nombre non nul est toujours possible).

2.5 La maîtrise formelle du calcul fonctionnel.

A travers ce rapide tableau, dont le lecteur saisira aisément la distance avec ce que nous montre l'enseignement actuel du collège, on peut appréhender un peu mieux déjà, nous semble-t-il, les liens vitaux historiquement tissés par les mathématiques, de Diophante à Viète et au-delà (en passant par les mathématiciens arabes), entre algébrique et numérique.

Tout cela pourtant se situe exclusivement, au seul niveau mathématique, et il faudra approfondir l'analyse pour voir surgir les problèmes proprement didactiques - qui seront autant d'obstacles sur la voie d'une meilleure idonéité. Soulignons seulement, en ce point, quelques-unes des contraintes que nous imposerons à la perspective curriculaire explicitée ci-après. Quelle que soit la stratégie didactique adoptée, on distinguera, par méthode, deux grands objectifs de l'enseignement du collège relativement à l'algèbre.

Premier objectif, cet enseignement doit assurer un maniement **formel** satisfaisant du calcul algébrique, soit, dans sa version la plus développée, du calcul dans le corps R(x) des fractions rationnelles[23] - objectif spécialement important pour les élèves qui poursuicront leurs études au-delà du collège.

Il convient à ce propos de lever un malentendu qui pèse lourd dans l'analyse didactique des objectifs de l'enseignement des mathématiques au collège. L'enseignement des **aspects formels** des mathématiques, c'est-à-dire en particulier l'enseignement visant à une maîtrise de ses **formalismes** (calcul algébrique, calcul vectoriel, etc.), n'est en rien synonyme d'enseignement «formel» ou «formaliste». Il faut donc distinguer formalismes et formalisme : si l'on peut désirer combattre le formalisme dans l'enseignement, on ne peut, sans ignorer et l'histoire des mathématiques et le fonctionnement même des mathématiques, minorer la place qui doit être donnée à l'enseignement **des formalismes** mathématiques.

L'étude de la place et des fonctions du calcul algébrique au collège prend nécessairement appui sur ce constat. Or la maîtrise formelle du calcul algébrique suppose par nature une bonne connaissance des systèmes de nombres sur lesquels se construit le calcul algébrique ; en d'autres termes, elle ne peut s'appuyer sur le seul enseignement **in vacuo**, c'est-à-dire formel, des formalismes. En retour, le développement du calcul algébrique ne peut s'accomplir que par le moyen de ces extensions successives. C'est la considération de l'équation $ax = b$ (a non nul) qui invite à passer à un système de nombres sur lequel la division (par un nombre non nul) soit possible ; et c'est cette extension qui, alors, invite à étendre le calcul algébrique aux fractions rationnelles qu'elle permet maintenant de définir.

La maîtrise de dialectique entre maniement formel du calcul algébrique (ou plutôt : des calculs algébriques) et connaissance des systèmes de nombres constitue alors un

second objectif de l'enseignement de l'algèbre au collège. Cet objectif dérive d'une double observation : il ne peut y avoir maîtrise du calcul algébrique **fonctionnel** sans que l'on fasse droit aux **emplois** du calcul algébrique ; et il ne peut y avoir emplois du calcul algébrique sans que s'instaure une dialectique entre numérique et algébrique. La notion-clé de modélisation, présentée ci-après, permettra de préciser cette affirmation. Elle fera apparaître les deux objectifs précités comme intermédiaires par rapport à l'objectif final implicitement posé plus haut, soit ce qu'on appelera la **maîtrise formelle du calcul fonctionnel**.

III - LA MODELISATION MATHEMATIQUE.

3.1 De l'extramathématique à l'intramathématique.

La question de la fonctionnalité du calcul algébrique, en effet, doit être analysée plus avant, dans ses principes généraux comme dans ses modalités concrètes. Elle requiert en pratique des **domaines d'emploi**[24] ; mais elle appelle d'abord un cadre conceptuel large, **qui permette de préciser la notion même d'emploi**.

Ceux auxquels on a fait allusion jusqu'ici demeurent des emplois **intramathématiques**, en ce sens qu'ils se rapportent à l'étude de ces objets mathé- matiques que sont les systèmes de nombres. D'autres emplois concernent l'étude mathématique d'objets **extramathématiques** : systèmes physiques, biologiques, sociaux, etc. Et c'est d'ordinaire à l'étude mathématique de tels systèmes non mathématiques que l'on réserve le nom de **modélisation mathématique**.

Afin de penser d'un même mouvement ces deux types d'emplois et d'études (habituellement séparés, comme en témoignent les oppositions traditionnelles entre mathématiques et applications des mathématiques, entre problèmes «abstraits» et problèmes concrets», etc.), nous réfèrerons dans ce qui suit à un schéma général de modélisation, dans le dessein d'appréhender sous des catégories communes les emplois intramathématiques et extramathématiques auxquels nous nous intéresserons.

3.2 Systèmes et modèles.

Nous n'introduirons d'abord qu'un schéma simplifié, qui suppose essentiellement **deux registres** d'entités : un **système**, mathématique ou non mathématique, et un **modèle** (mathématique) de ce système[25]. Le processus de **modélisation** comporte, schématiquement, trois étapes.

1. On définit le système que l'on entend étudier, en en précisant les «aspects» **pertinents** par rapport à l'étude que l'on veut faire de ce système, soit l'ensemble des **variables** par lesquelles on le découpe dans le domaine de réalité où il nous apparaît. Nous désignerons ces variables par les lettres x, y, z, a, b, c, etc., nous réservant de revenir sur la question - majeure - que soulève cet usage un peu plus loin.

2. On construit alors le modèle à proprement parler en établissant un certain nombre de relations, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}'$, $\mathbb{R}''$, etc., entre les variables prises en compte dans la première étape, le modèle du système à étudier étant **l'ensemble de ces relations**.

3. On «travaille» le modèle ainsi obtenu, dans le but de produire des **connaissances** relatives au système étudié, connaissances qui prennent la forme de nouvelles relations entre les variables du système.

L'étape 3 est toujours une phase proprement mathématique, tandis que les étapes antérieures sont du ressort du domaine de réalité dont est censé relever le système - les mathématiques s'il s'agit d'un objet mathématique, etc.

Ce schéma de base appelle, nous le verrons, une foule de remarques. Pour éclairer le lecteur, nous le complèterons d'abord d'un premier exemple fort académique.

3.3 Le cas du pendule simple.

Le système considéré est physique : un pendule oscillant dans le champ de pesanteur. Notons que c'est une question quelquefois non triviale que de déterminer de quel domaine de réalité relève le système que l'on se donne à étudier[26]. Soulignons encore, en ce point, que l'étude qui suit prend pour objet l'élément générique d'une **classe de systèmes**, et non tel ou tel système particulier.

1. Pour le parcours de l'étape 1, nous suivrons ici le physicien : «En regardant attentivement ce mouvement du pendule, nous dit-il[27], on peut se convaincre que si les frottements sont négligeables, les seules grandeurs caractéristiques du problème sont celles que la figure 1.5 définit», soit le poids P, la masse M, la longueur L et l'angle A du pendule par rapport à la verticale. Ce à quoi l'on s'intéresse (pour des raisons que nous laisserons de côté), c'est la période T du pendule ; celle-ci devrait pouvoir s'exprimer en fonction des variables précédentes uniquement.

2. L'établissement du modèle fait appel ici à un outil général de la physique, l'analyse dimensionnelle. En posant que la période T est donnée par une égalité de la forme $T = M^x L^y P^z f(A)$, on obtient[28] le système des trois relations

$$x + z = 0,\ y + z = 0,\ -2z = 1,$$

qui, avec l'égalité de départ, et la relation «générale» $P = Mg$ (où g est l'intensité du champ de pesanteur), constitue un modèle du système.

3. Un travail mathématique élémentaire sur ce modèle «brut» conduit à la relation fondamentale $T = f(A)\sqrt{L/g}$, qui permet à son tour de produire des connaissances sur le système étudié. Par exemple celle-ci[29] : «La période d'un pendule croît comme la racine carrée de sa longueur» (d'où on pourra tirer par exemple que, pour doubler la période d'un pendule, il faut quadrupler sa longueur).

3.4 Mathématique et mathématisé.

Ontologiquement claire dans le cas de systèmes non mathématiques (comme dans l'exemple précédent), la distinction des registres du système et du modèle se brouille (au point que l'idée de modélisation **intramathématique** est généralement ignorée) lorsque le système considéré est un objet mathématique.

Pour étendre à de tels cas la notion de modélisation mathématique, nous désignerons[30] le registre du système comme celui du **mathématisé**, celui dans lequel se conduit la modélisation comme registre du **mathématique**. Le mathématisé fait alors fonction d'**objet d'étude**, le mathématique étant l'**outil d'étude**.

La distance du mathématisé au mathématique peut être fort grande : que l'on songe ici à la théorie des nombres - dont l'objet d'étude, les entiers naturels ou relatifs, est connu en substance dès le collège, et dont les outils d'étude empruntent aux domaines les plus avancés des mathématiques. On verra, surtout, que la distinction du mathématisé et du mathématique constitue l'un des éclairages essentiels des analyses qui suivront : pour être opérante, la dialectique outil/objet, doit commencer par distinguer les termes qu'elle unira dialectiquement.

Dans quelques cas, une telle distinction prend des allures concrètes, objectivées : il en est ainsi notamment lorsque mathématisé et mathématique appartiennent à deux secteurs vus comme différents des mathématiques. Soit par exemple la classe de ces systèmes que sont les **rectangles** (dont on ignore ici la position dans le plan : les rectangles, donc, à un déplacement près). Ces systèmes nous sont connus par la théorie géométrique, dont ils sont des objets remarquables.

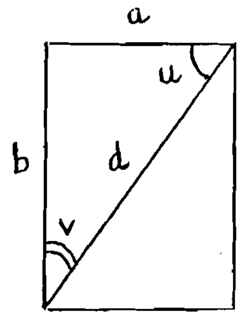

Figure 1

On peut en construire un modèle métrique par le processus suivant : a et b désignant les mesures des côtés, de la mesure des diagonales, S la mesure de l'aire, u et v les mesures des angles formés par les diagonales et les côtés, on aura le répertoire de relations : $S=ab$, $d^2 = a^2 + b^2$, $u = \mathrm{Arctg}(b/a)$, $v = \mathrm{Arctg}(a/b)$. Dans un tel cas le modèle se distingue bien du système modélisé - du moins pour le sens commun mathématique, qui ne considère pas que la géométrie n'est rien d'autre que de l'algèbre linéaire[31].

Un travail mathématique simple sur le modèle nous fournit une connaissance nouvelle (que nous aurions pu produire en demeurant dans la théorie géométrique non «métrisée») : le système, paramétré ici par les mesures a et b, pourrait l'être aussi bien par les mesures d et u. On a en effet d'abord $a^2 + b^2 = d^2$, $b/a = \mathrm{tg}u$, d'où les égalités $b=a\mathrm{tg}u$ et $a^2 + a^2\mathrm{tg}^2u = a^2(1 + \mathrm{tg}^2u) = a^2/\cos^2u = d^2$, qui donnent aussitôt $a = d \cos u$ et $b = d \sin u$.

3.5 La production de connaissances.

Ces relations, observera-t-on, auraient pu être établies «directement», en «regardant la figure». Il n'en va pas de même pour cette autre connaissance relative aux systèmes «rectangles» : leur paramétrage peut se faire aussi bien **à partir des mesures u et S**. C'est le **travail du modèle** qui apportera ici la lumière : des relations $ab = S$ et $b/a = \mathrm{tg}u$ on déduira que l'on a aussi $b = \sqrt{S\mathrm{tg}u}$ et $a = \sqrt{S\mathrm{cotg}u}$. Ces relations constituent une **connaissance nouvelle**, dont on n'avait peut-être pas entrevu jusque-là la possibilité (on peut définir un rectangle par son aire S et la mesure u de l'angle d'une diagonale avec l'un des côtés) et qu'on pourra maintenant essayer de démontrer «géométriquement».

Plus généralement, un modèle est intéressant lorsqu'il permet de produire des connaissances qu'une autre voie ne nous donnerait pas aussi facilement. Considérons le théorème de Pythagore : il énonce une relation caractéristique des triangles rectangles, laquelle constitue donc un **modèle des triangles rectangles** (modèle dont les variables sont les mesures a, b et c des côtés) : $c^2 = a^2 + b^2$. Cette égalité a une interprétation classique dans le registre du système : l'aire du carré construit sur l'hypoténuse est égale à la somme des aires des carrés construits sur les deux côtés de l'angle droit ; c'est d'ailleurs, comme on sait, en démontrant (par des considérations géométriques d'égalité d'aires) cette dernière égalité que l'on peut établir la relation algébrique de Pythagore. Mais celle-ci apparaît productive de relations qu'on n'obtient pas aussi directement du point de vue géométrique : multiplions-la par $\pi/8$; on obtient l'égalité $\pi c^2/8 = \pi a^2/8 + \pi b^2/8$, dont l'interprétation géométrique est immédiate : l'aire du demi-cercle de diamètre l'hypoténuse est égale à la somme des aires des demi-cercles construits sur les deux côtés de l'angle droit. Et, en multipliant l'égalité de Pythagore par un coefficient numérique adéquat ($kc^2 = ka^2 + kb^2$), on pourrait dire la même chose à propos des triangles équilatéraux ($k = \sqrt{3}/4$, ou de toutes autres figures semblables entre elles construites sur les côtés du triangle[32].

Comme dans l'exemple précédent, la distance est ici assez nette entre le système et le modèle qu'on en construit : celui-ci apparaît comme un dispositif dont on est capable de tirer des connaissances à propos du système qu'il modélise. Mais le contraste que l'on peut ainsi faire surgir en quelques cas n'est pas toujours aussi vif ; iles interrelations entre systèmes et modèles sont, en mathématiques, plus riches et plus subtiles. Nous en montrerons, ci-après, deux aspects essentiels.

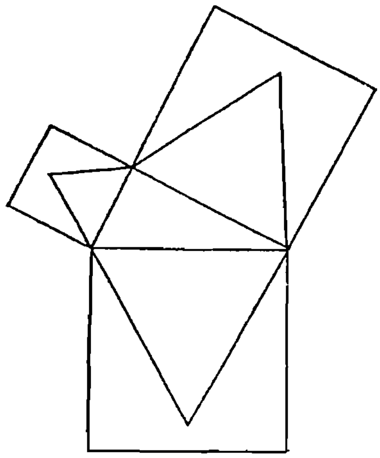

Figure 2

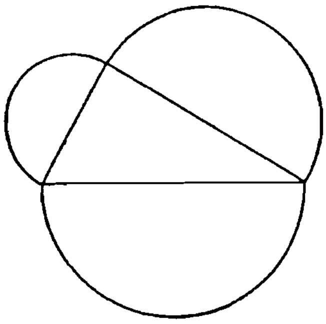

Figure 3

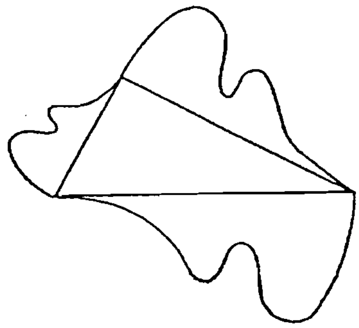

Figure 4

3.6 Réversibilité de la relation de modélisation.

Le rapport du système au modèle peut en effet s'**inverser** ; le système peut apparaître, à rebours, **comme un modèle de son modèle**. Soit ainsi la figure suivante.

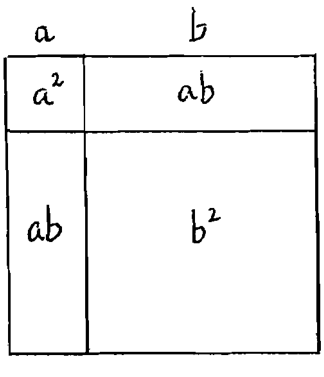

Figure 5

Les rapports entre les aires sont modélisés par l'égalité algébrique $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$. Inversement, la figure ci-dessus peut être regardée comme un modèle **géométrique** de cette égalité algébrique. Et, historiquement, c'est par la considération de tels modèles géométriques que Al-Khwarizmi procédait pour étudier et résoudre les équations du second degré[33].

Il y a là un fait général, d'autant plus présent en mathématiques que systèmes et modèles, même lorsqu'ils appartiennent à des secteurs différents, sont l'un est l'autre des objets mathématiques. Le mouvement de l'étude peut, au moins partiellement, changer de sens ; une connaissance portant sur l'un des deux termes de la relation de modélisation peut être transférée à l'autre terme. Le langage usuel des mathématiciens parlera ici d'interprétations. L'étude algébrique d'un système de deux équations linéaires à deux inconnues (qui modélise un système de deux droites du plan) permet de montrer que deux droites données soit sont confondues, soit sont strictement parallèles, soit se coupent en un point unique ; inversement, l'étude algébrique d'un système donné peut s'appuyer sur le système correspondant de deux droites du plan, comme modèle géométrique. A la limite, on peut assimiler une droite à son équation (ou plutôt à une classe d'équivalence d'équations), et, plus généralement, identifier géométrie élémentaire et algèbre linéaire.

Lorsqu'un système a été étudié et est, de ce fait, «supposé connu», il fournira, par translation, des indications sur l'un ou l'autre de ses modèles. Considérons ici la classe des systèmes «urnes contenant des boules rouges des boules noires». L'étude de ces sytèmes conduit à modéliser la notion intuitive de "proportion des boules rouges (en nombre r) dans l'urne (contenant un nombre total t de boules)» par la formule[34] $p = r/t$. Soient alors les fractions 12/13 et 13/24. La première peut être interprétée comme la proportion de boules rouges dans une urne contenant 23 boules dont 12 rouges ; la seconde est alors la proportion de l'urne obtenue **en rajoutant une boule rouge** à l'urne précédente. On sait que, dans ce cas, la proportion de boules rouges **augmente** ; on a donc établi, sans calcul, l'inégalité $12/13 < 13/14$.

3.7 Récurrence du processus de modélisation.

Le terme de mathématisé, introduit plus haut, est là pour rappeler que tout objet mathématique est le fruit d'une mathématisation (éventuellement intramathématique). Son couplage avec le terme de mathématique, en outre, marque ce fait que tout objet mathématique peut, à son tour, être pris pour mathématisé, dans une étude de niveau supérieur, appelant d'autres outils d'étude. On aboutit ainsi à une succession de modélisations et à une suite de modèles. Soit le système de deux équations à deux inconnues $x + y = 11/2$ et $xy = 6$, qui modélise le système constitué par un rectangle d'aire 6 et de périmètre 11. On peut en donner un modèle mathématiquement équivalent sous la forme de l'équation du second degré $2X^2 - 11X + 12 = 0$. Considérée à son tour comme un système mathématique, cette équation a alors un modèle «standard», la formule $X = (11 +/- \sqrt{11^2 - 4 \times 2 \times 12}) / 4$. Ce que nous avons appelé plus haut «travail sur le modèle» peut ainsi être interprété comme la **construction de modèles successifs**, mieux adaptés à l'étude.

Cette «réccurence» des modèles se conjugue avec la réversibilité de la relation de modélisation, déjà notée[35]. Soit à résoudre l'équation $x^2 - 4x + 3 = 0$. Inversant la relation de modélisation vue précédemment, on pourra trouver avantage à se tourner vers le modèle constitué des équations $x + y = 4$, $xy = 3$, qui montre immédiatement que les nombres 1 et 3, dont la somme vaut 4 et le produit 3, sont solutions de l'équation proposée - laquelle n'admet pas d'autres solutions puisque c'est une propriété générale de ces systèmes mathématiques que sont les équations du second degré que de n'admettre pas plus de deux solutions.

3.8 Modèles locaux, modèles régionaux.

On ajoutera ici une autre distinction encore. On peut regarder la **Géométrie** de Descartes (1637) comme la tentative d'élaborer **un modèle algébrique de la géométrie du plan.** Ce modèle sera ensuite étendu à l'espace (l'équation de la sphère est écrite pour la première fois en 1700) et ne prendra toute son ampleur qu'à la fin du XVIIIème siècle - avec notamment la publication par Gaspard Monge, en 1795, de ses **Feuilles d'analyse** (c'est-à-dire d'algèbre) appliquée à la géométrie. Mais il se révèle insuffisant pour l'étude d'autres phénomènes du plan ou de l'espace, et l'élaboration de modèles plus puissants devient nécessaire : géométrie différentielle (dont l'essor est lié à celui du calcul infinitésimal) et géométrie algébrique (avec passage au corps des complexes, introduction des points à l'infini, etc.), laquelle naît notamment du désir de modéliser les phénomènes d'intersection des courbes et des surfaces[36].

Le modèle algébrique (ou «analytique») de la géométrie, dont l'introduction commence aujourd'hui en classe de troisième, est ce que nous appellerons un modèle **régional** ou, encore, une **théorie** (ici : une théorie mathématique d'un objet mathématique). Dans ce qui suit, le mot modèle fera référence tantôt à des modèles régionaux, tantôt à des modèles «locaux» - ceux auxquels on pense le plus généralement lorsqu'on parle de modèles, sans qu'on cherche toujours à distinguer nettement entre eux. Il conviendra cependant de garder présent à l'esprit que la production d'un modèle local s'inscrit en référence à une théorie (c'est-à-dire à une modélisation régionale), plus ou moins approfondie, du secteur de réalité concerné. On soulignera enfin que, comme pour les modèles locaux, la construction de modèles régionaux (soit de théories mathématiques) prend appui sur une forme ou une autre de connaissance des systèmes à modéliser et du secteur auquel ils appartiennent, et suppose donc au moins une **théorie partielle prélable** des systèmes étudiés - le nouveau modèle à construire devant permettre d'étendre le corps de connaissances que l'on détient à leur sujet. Cette théorie préalable pourra être mathématique (si le système à modéliser est un objet mathématique) ou autre (physique, etc.)[37].

IV - MATHEMATIQUES ET MODELISATION.

4.1 Le miracle grec.

Dans sa **Vie, doctrine et sentence des philosophes illustres**, Diogène Laërce écrit : «Hiéronyme dit que Thalès mesura les pyramides d'après leur ombre, ayant observé le temps où notre propre ombre est égale à notre hauteur». Michel Serres, citant ce passage, le commente ainsi[38] : «La géométrie est une ruse, elle fait un détour, elle prend une route indirecte pour accéder à ce qui dépasse la pratique immédiate. La ruse, ici, c'est le modèle : construire en réduction, à module constant, un résumé, un squelette de pyramide. De fait, Thalès n'a rien découvert d'autre que la possibilité de la réduction, que l'idée de module, que la notion de modèle. La pyramide est inaccessible ; il invente l'échelle».

Miracle grec, indéfiniment recommencé ! Comte, dans la troisième leçon de son **Cours de philosophie positive**, note justement : «Nous devons regarder comme suffisamment constatée l'impossibilité de déterminer, en les mesurant directement, la plupart des grandeurs que nous désirons connaître. C'est ce fait général qui nécessite la formation de la science mathématique (...) Car, renonçcant, dans presque tous les cas, à la mesure immédiate des grandeurs, l'esprit humain a dû chercher à les déterminer indirectement, et c'est ainsi qu'il a été conduit à la création des mathématiques».

En n'oubliant pas que le passage de l'extramathématique à l'intramathématique n'est que la face visible d'un processus général, en œuvre au sein même du travail mathématique, nous essaierons maintenant de mettre en relief cette dimension de l'activité mathématique, parce qu'elle fonde, épistémologiquement et culturellement, le recours explicite à la notion de modèle dans une perception d'évolution curriculaire.

En fait, les mathématiques les plus primitives déjà, celles que l'enseignement nous a rendu transparentes et, trop souvent, sans relief, peuvent être fructueusement réexaminées sous cet éclairage. A titre d'exemple, nous examinerons un problème parmi les plus traditionnels et les plus élémentaires. On dispose d'un paquet de bonbons que l'on veut répartir équitablement entre un certain nombre d'enfants ; comment le faire ? En quoi, et comment, les mathématiques peuvent-elles intervenir pour résoudre ce problème[39] ?

4.2 De l'empirique au symbolique.

Première observation, le problème peut être résolu **sans le secours des mathématiques**, par une procédure effective que l'on nommera ci-après procédure 1. On fait ranger les enfants en ligne, puis on distribue un bonbon à chaque enfant en parcourant une première fois la ligne ; s'il reste des bonbons on recommence la distribution et on recommencera tant qu'il restera plus de bonbons non distribués qu'il n'y a d'enfants. Pour s'assurer de cette dernière condition (qui paraît a priori impliquer le comptage et la comparaison des nombres), il n'est pas davantage besoin, en réalité, de recourir aux mathématiques : si la distribution s'interrompt en cours de route, faute de bonbons, on revient en arrière pour reprendre les bonbons déjà donnés au cours du dernier passage.

Cette procédure empirique présente cependant un certain nombre d'inconvénients et de limitations. Elle ne pourra être exécutée si les enfants ne peuvent être effectivement réunis (par exemple si les bonbons doivent être répartis entre des enfants géographiquement dispersés, qui recevront leur dû par la poste). Dans tous les cas, de plus, sa mise en œuvre ne va pas sans désagréments pratiques. Les enfants peuvent faire du bruit, ce qui peut être désagréable pour la personne chargée de la distributionn et l'induire à commettre des erreurs ; surtout, ils peuvent bouger, se déplacer dans la ligne, dans le but, par exemple, de tricher en recevant un bonbon supplémentaire. Pour obvier à ces difficultés, voire pour que la distribution soit tout simplement possible (si les enfants ne peuvent être effectiviement réunis), on peut alors envisager une deuxième procédure.

Dans la procédure 2, on suppose que l'on dispose d'une liste de noms des enfants. A chacun des noms on fait correspondre un cercle grossièrement tracé sur le sol. Puis on distribue les bonbons selon la technique de la procédure 1, les enfants étant ici remplacés par des cercles. On voit que, dans le passage de la procédure 1 à la procédure 2, on passe d'une réalité «humaine» (les enfants) à une **représentation symbolique** de cette réalité (les noms, puis les cercles) ; d'une situation concrète à une situation moins concrète, et symbolique au moins partiellement (n'oublions pas que les bonbons, eux, sont toujours là). Le bruit cesse ; les enfants ne se bousculent plus - et pour cause. Bref, l'ordre règne, et le calme. On passe ainsi d'une réunion aimable ou chahuteuse à une activité sereine dans laquelle le distributeur de bonbons se retrouve seul avec ses noms, ses cerccles et ses bonbons. Ce que l'on constate donc, c'est une séparation, avantageuse à divers points de vue, entre la réalité et un certain **modèle** de cette réalité : les enfants pourront ne jamais rencontrer la personne qui aura à leur intention, réparti les bonbons en parts égales, qui leur seront ensuite allouées.

4.3 L'avènement de l'activité mathématique.

Mais la procédure 2 connaît elle aussi des limitations. Elle suppose que celui qui assure l'équirépartition ait les bonbons à sa disposition. Elle suppose encore, s'il y a beaucoup d'enfants et beaucoup de bonbons, une pièce assez vaste où elle puisse se dérouler. Un pas de plus et l'on pourra s'affranchir de ces exigences, en entrant plus franchement dans le monde des mathématiques, par le recours à la procédure 3 que nous formulerons maintenant :

3.1 on compte le **nombre** de bonbons à répartir, soit a, et on compte le **nombre** d'enfants entre lesquels doit se faire l'équirépartition, soit b ;

3.2 on effectue la **division** (dite euclidienne) de l'entier a par l'entier b, c'est-à-dire qu'on détermine le quotient entier q et le reste r tels que $a = bq + r$, $r < b$;

3.3 on regroupe les bonbons par paquets de q unités, paquets qui seront alors distribués aux b enfants

Il n'est pas facile de décider si, avec l'invention et l'exécution de la procédure 2, on passe d'une activité non mathématique (procédure 1) à une activité mathématique. Avec la procédure 3, en revanche, on a affaire à une activité authentiquement mathématique - qui fut même longtemps regardée comme fort savante[40].

Cette procédure permet une séparation encore plus poussée que la précédente. Si les étapes 3.1 et 3.3, en début et en fin de procédure, font le lien avec la réalité modélisée, l'étape 3.2 ne retient plus de la réalité que l'un de ses aspects, la cardinalité ou «numérosité», celle de l'ensemble des enfants, d'une part, celle de l'ensemble des bonbons, d'autre part. En d'autres termes, on construit un modèle de la réalité qui ne prend en compte que les aspects de cette réalité qui apparaissent pertinents par rapport à la question que l'on se pose à son propos.

Ce modèle, comme toujours dans l'activité scientifique, n'est pas l'image la plus complète possible du réel. Tout au contraire, il en fournit une image (volontairement) appauvrie, et c'est là ce qui fait sa force. Si l'on voulait exprimer ce fait en référence à l'activité du peintre, on pourrait dire que la modélisation se rapproche plus d'un visée de stylisation que d'une volonté d'hyperréalisme. Le modèle n'est pas à proprement parler une copie ou une reproduction du réel, mais un **ajout** au réel, une construction artificielle, mise en relation d'une manière déterminée, supposée adéquate, avec le réel[41].

Cette mise en relation intervient, dans l'exemple examiné, au cours des étapes 3.1 et 3.3, celle de la construction du modèle, d'une part, celle du retour au réel, d'autre part. Ces deux étapes délimitent une phase d'activité - l'étape 3.2 - qui se trouve libérée de tout rapport, autre que symbolique, à la réalité modélisée[42]. Pratiquement, cela se traduit par le fait que la personne chargée de mener à bien l'étape 3.2 peut ne jamais être en contact ni avec les enfants, ni avec les bonbons. Il suffira de lui communiquer les nombres a et b ; et il lui suffira de communiquer en retour le nombre q (et éventuellement le nombre r, à des fins de vérification par exemple). Son activité peut maintenant être complètement déconnectée de la réalité «concrète» à laquelle pourtant elle se rapporte. Au bruit des enfants se substitue le silence d'une salle de travail, où notre personnage, devenu mathématicien, se retrouve seul, face à un problème mathématique (quels sont les nombres q et r tels que...). A la manipulation effective des bonbons, qui exigeait une utilisation et un aménagement particuliers de l'espace de la pièce, fait place une organisation toujours la même - par exemple une table de travail, des feuilles de papier, un crayon[43].

V - LES OUTILS DE LA MATHEMATISATION.

5.1 La portée du schéma de modélisation.

En suivant les analyses précédentes, on aura reconnu que, dans notre enseignement, une activité mathématique authentique se rencontre bien **dès l'école primaire**.

Considérons un instant l'un de ces problèmes que les didacticiens classent parmi les problèmes additifs : «Paul a 8 billes ; il en gagne un certain nombre et a alors 13 billes ; combien en a-t-il gagné ?» Le système réel étudié n'est ici qu'**évoqué**. La résolution du problème passe par la construction d'un **modèle du système**.

A un premier niveau, le modèle sur lequel l'élève va travailler peut rester très concret (cela correspond à la procédure 2 de notre exemple) : il aligne sur son bureau 8 jetons rouges, puis rajoute un à un des jetons noirs jusqu'à obtenir 13 jetons ; il compte alors le nombre de jetons noirs rajoutés, qui est le nombre de billes gagnées par Paul[44].

A un second niveau - celui de notre procédure 3 -, la résolution du problème ne suppose plus que les instruments standardisés énumérés plus haut, papier et crayon. L'élève construit un modèle qui peut s'écrire $8 + \ldots = 13$ et qui préfigure la notation classique de l'équation du premier degré $8 + x = 13$. Par le travail sur ce modèle, il obtiendra alors la valeur cherchée, qui sera trouvée par un algorithme de résolution de l'équation obtenue : par exemple en énumérant les entiers à partir de 1, et en calculant les sommes successives jusqu'à obtenir 13 : $8 + 1$, $8 + 2$, $8 + 3$, etc. ; plus tard en effectuant la soustraction de 8 à 13 par un algorithme de calcul longuement étudié.

La notion de modélisation permet ainsi de prendre une vue d'ensemble sur l'activité mathématique, de l'école primaire à l'université. Grille de lecture et d'interrogation, elle fournit un cadre de référence au sein duquel il devient alors possible de faire surgir des différences significatives - entre arithmétique et algèbre notamment.

5.2 Les pratiques sémiotiques.

Les exemples précédents nous mettent en face de l'une des dimensions essentielles de l'activité humaine, présente dès le langage[45] : l'activité de **symbolisation** et l'usage réglé de **systèmes de signes** - qui permettent de «parler» de leurs référents en l'absence même de ceux-ci. C'est désigner là un problème que toute anthropologie ne peut manquer de rencontrer. Nous nous en tiendrons, sur ce thème difficile, au minimum nécessaire pour situer les questions que nous examinerons ensuite. Nous poserons d'abord comme un principe que toute activité emprunte sa forme et sa sustance concrètes à une pluralité coordonnée de **registres sémiotiques** ; ou, pour le dire autrement, que nulle activité humaine ne peut se statisfaire d'un code unique, qu'elle est dotée d'emblée d'une certaine **épaisseur sémiotique**. En même temps, elle laisse apparaître un ou plusieurs codes dominants, auxquels les autres registres sémiotiques, que nous dirons secondaires, se trouvent en quelque sorte assujetis. L'articulation de l'ensemble des registres ainsi mis en branle forme ce que nous nommerons un **complexe** sémiotique - où le registre de la langue naturelle est toujours présent, à titre au moins de métalangage.

Rappelons-nous à cet égard la procédure 2 relative à la distribution des bonbons : l'activité qui se déploie dans son exécution nous apparaît comme un mixte. Dans l'une au moins de ses modalités envisageables, elle recourt et à la langue naturelle écrite et orale (qui permettent de constituer la liste des noms et de la lire), et à un code symbolique graphique-spatial, celui des cercles mis en correspondance avec les noms, code «momentané», inventé pour la circonstance, mais que la répétition de l'activité dans un groupe social donné peut fort bien stabiliser durablement. Cette description demeure pourtant incomplète : on doit y ajouter un système de signes de nature gestuelle, à la rencontre du corps et de l'espace, dont elle suppose la bonne coordination - soit ce schème moteur répété qui consiste à déplacer les bonbons, d'une manière réglée selon le temps et l'espace, depuis le sac qui les contient primitivement jusqu'aux cercles entre lesquels il convient de les répartir.

Tout cela fait une activité qui, pour n'être pas encore mathématique au sens conventionnel que l'on peut donner à ce mot, est déjà fort complexe. L'exemple lui-même donne une idée d'un problème général en toute activté humaine : celui de l'usage adéquat de registres sémiotiques articulés ensemble - problème au cœur de tout apprentissage, quel qu'en soit le niveau. Mais l'examen comparatif que l'on peut faire alors de la procédure 3 apporte une autre leçon ; l'activité mathématique **resserre l'épaisseur sémiotique autour de codes spécifiques** - celui du numérique ici - sans toutefois éliminer la pluralité des codes : l'usage graphique de l'espace que montrait l'effectuation de la procédure 2, et qui suppose la maîtrise du geste adéquat, se retrouve ici, concentré dans l'espace normalisé de la feuille de papier où s'ordonnent les opérations ; la langue naturelle demeure cet écrin qui enchâsse et commente les autres pratiques sémiotiques, etc.

Dans ce resserrement autour d'un code privilégié, spécifique d'un type d'activité, on gagne en puissance d'effectuation dans le même temps que l'économie des moyens sémiotiques se fait à la fois plus parcimonieuse et mieux réglée : on a là la motivation, indéfiniment reconduite, des formalismes scientifiques, qui assurent à l'activité productrice de connaissances des langues bien faites, adéquates à leurs objets. L'invention de la «langue algébrique» constitue, de ce point de vue, un bond en avant dont on peut dire - à regarder son destin dans l'enseignement du collège - que sa portée et sa signification n'ont pas été, encore aujourd'hui, totalement mesurées.

5.3 L'adéquation des outils et des modèles.

Les pratiques sémiotiques que nous avons cernées dans les notations précédentes sont nécessaires déjà pour dégager, dans un réel plus ou moins indifférencié, les systèmes sur lesquels la mathématisation voudra avoir prise. Par leur stabilisation et leur articulation en des codes déterminés, elles permettent l'émergence de concepts, de méthodes, de procédures. Ce dégagement s'affine et se précise en se stylisant avec l'entreprise de modélisation. Le choix des moyens sémiotiques devient central : c'est lui qui déterminera le **contrôle** du processus de modélisation et de son résultat, le modèle et le travail du modèle.

Le premier sans doute des moyens de la modélisation de systèmes (naturels ou artificiels) est constitué par les nombres **entiers** (naturels). La familiarisation avec cet outil occupe longuement l'enfant à l'école primaire. Sa disponibilité ne va pas de soi - dans l'ordre de l'histoire comme dans celui de la formation du rapport au savoir mathématique[46]. Supposons-le acquis : si, comptant les billes rouges de Paul d'une part, ses billes noires d'autre part, j'en trouve respectivement 8 et 5 ; si, les comptant alors toutes ensemble, j'en trouve 13, j'aurai un modèle (numérique) des billes possédées par Paul sous la forme de l'égalité $8 + 5 = 13$. Sous cette égalité, qui pour nous va de soi, se cache une difficulté récurrente : le premier problème que pose toute entreprise de modélisation est celui de l'**adéquation** du modèle au système qu'il permet d'étudier (adéquation qui, on l'a vu, dépend du type d'étude que l'on entend mener).

Problème constant, même s'il est plus visible à d'autres niveaux d'étude : si j'ai 2 billes et que j'en gagne 3, j'aurai $2 + 3$ billes ; si, par 3 fois, je gagne 2 billes, j'aurai gagné 3×2 billes ; si on m'invite à choisir une bille dans chacun des lots d'un ensemble de 3 lots de 2 billes, mon stock s'enrichira seulement de 3 billes mais je pourrai faire cela de 2^3 façons différentes ; etc. On passe ainsi très vite de problèmes d'arithmétique de l'école primaire à de petits problèmes de combinatoire dont la difficulté augmente rapidement[47].

La question de l'adéquation se retrouve, en principe, au plus humble niveau. Elle y est résolue traditionnellement, pour tout un chacun, **par l'apprentissage de modèles standards permettant de faire face à des situations standards.**

Mais même le modèle additif le plus simple - que nous évoquions un peu plus haut - peut être examiné de ce point de vue, comme le fit autrefois Henri Lebesgue en soulignant que, dans la formation historique de tels modèles, l'expérience répétée fut le premier garant de l'adéquation, même et surtout en arithmétique élémentaire : «... nous savons sans hésitation, écrit-il ainsi, dans quels cas l'arithmétique s'applique, dans quels cas elle ne s'applique pas. Dans ces derniers cas, l'idée d'appliquer l'arithmétique ne nous effleure pas un instant ; nous ne pensons à appliquer l'arithmétique que lorsqu'elle s'applique, si bien que nous oublions qu'il y a des cas où elle ne s'applique pas : deux et deux font quatre, affirmons-nous. «Dans un verre je verse deux liquides, dans un autre deux liquides. Je verse le tout dans un vase, contiendra-t-il quatre liquides ? - C'est de la mauvaise foi, dites-vous, ce n'est pas une question d'arithmétique. - Dans une cage je mets deux animaux, puis encore deux animaux ; combien la cage contient-elle d'animaux ? - Votre mauvaise foi, dites-vous, est plus éclatante encore ; cela dépend de l'espèce de ces animaux, l'un d'entre eux pourrait dévorer les autres ; il faut savoir si le décompte doit avoir lieu immédiatement ou dans un an, alors que les animaux pourraient être morts ou avoir eu des petits. En somme, vous parlez de collections desquelles on ne sait si elles sont immuables, si chaque objet y garde son individualité, s'il n'y a pas des objets qui apparaissent ou qui disparaissent»[48].

Cest là en effet une condition pour que, selon l'expression de Lebesgue, «l'arithmétique s'applique». «A l'équation **un donne deux** de la reproduction, pourra ainsi écrire un biologiste dans un ouvrage de vulgarisation[49], se substitue l'équation **deux donne un** de la sexualité (...). La véritable équation de la sexualité est donc **un plus un donne un autre**» : nul paradoxe, bien sûr, en ces formulations qui tirent l'œil. Mais on va voir que le contrôle que permet l'arithmétique traditionnelle, et sa puissance même - sans contrôle de l'action il n'y a pas de puissance de l'action -, pâtissent de l'insuffisance des outils sémiotiques sur lesquels l'arithmétique s'est frileusement repliée.

VI - LE MONDE CLOS ET L'UNIVERS INFINI.

6.1 Outils arithmétiques, outils algébriques.

J'ai 23 billes, dont 7 billes bleues. Les autres billes sont noires. Combien ai-je de billes noires ? Le problème appartient au fonds le plus classique de l'arithmétique traditionnelle. Le contrat didactique, plus souvent que l'analyse de la situation mathématique, aide l'élève à le résoudre : j'ai 23 - 7, soit 16 billes noires.

En acceptant qu'ici l'arithmétique s'applique (que les billes ne se volatilisent ni ne se reproduisent), et n'était l'habitude longuement acquise, il faudrait recourir à quelque modèle formel sur lequel on travaillera pour obtenir la réponse : au plus haut niveau, l'équation $x + 7 = 23$; à un niveau moins élaboré, un schéma adéquat (en forme de diagramme de Venn), etc. La situation est plus nette encore s'agissant de la division[50].

L'arithmétique ancienne s'est flattée de faire l'économie de ces moyens formels, à défaut de se les rendre disponibles. Reprenons le problème selon le schéma de la modélisation. Le système étudié - l'ensemble des billes que je possède - est décrit par 3 variables : «le nombre total de billes», «le nombre de billes bleues», «le nombre de billes noires». Les valeurs de ces paramètres définissent un état du système. Nombre de problèmes, élémentaires ou non, sont alors, à l'instar de celui-ci, du type suivant : connaissant les valeurs de certaines variables, trouver les valeurs des autres variables. La connaissance de ces dernières valeurs s'obtient par la considération des relations qui gouvernent l'ensemble des variables.

L'arithmétique traditionnelle reconnaît ici une relation, qu'elle énoncera ainsi : «le nombre total de billes est égal au nombre de billes bleues augmenté du nombre de billes noires». Son outil essentiel est le langage ordinaire, augmenté du calcul **sur les nombres**. On ne calcule pas sur les énoncés du langage ordinaire : pour cela, on prêtera donc à l'arithmétique la vertu d'obliger à «raisonner» sur les énoncés du langage ordinaire, et on déniera au calcul toute autre valeur que celle d'une mécanique, qui peut seulement dérailler, et faillir.

L'algèbre fournit un moyen plus puissant, essentiellement lié à l'usage des **lettres** (pour désigner les variables) et à la possibilité de **calculer sur les expressions littérales** qu'elle conduit à former. Le «raisonnement» se fait calcul, «L'art», c'est-à-dire l'art analytique, l'algèbre, «a découvert très à propos l'usage de l'écriture», note Descartes dans la seizième de ses **Règles pour la direction de l'esprit**. Le problème précédent sera résolu par le calcul à partir de la relation $x + 7 = 23$; en retranchant 7 aux deux membres de l'égalité, on obtient en effet $x = 23 - 7$. Voilà **pourquoi** - selon le modèle utilisé - le nombre de billes noires est donné par la différence 23 - 7.

L'arithmétique, en revanche, demeure essentiellement un savoir oral, qui ne confie au papier que l'effectuation des opérations sur les nombres. Aussi ne dépasse-t-elle guère les problèmes du premier degré, dont elle a fait sa spécialité en s'y imposant longtemps à l'exclusion de toute autre approche. Son arsenal logistique est fait de formulettes (dont la règle de trois d'antique mémoire fournit un exemple emblématique) qui permettent de mémoriser et de mettre en œuvre des schèmes de calcul quelquefois fort habiles, telles les règles de fausse position. Cette habileté, que l'on peut admirer, s'explique par un manque, celui d'un formalisme adéquat.

Le problème suivant, bien dans la manière de l'ancienne arithmétique, éclairera ce point : un commerçant achète une pièce de drap au prix de 4 francs le mètre ; il en revend le cinquième 8 francs le mètre, le quart 7 francs le mètre, le reste 6 francs le mètre, et réalise ainsi un bénéfice de 424 francs. Quelle était la longueur de la pièce de drap ?

L'arithmétique traditionnelle opérait là-dessus par la méthode de **fausse position** : supposons que la pièce de drap ait été de 20 mètres ; le prix d'achat étant de $4 \times 20 = 80$ francs, le revenu de la vente est égal à

$$8 \times 4 + 7 \times 5 + 6(20 - 4 - 5) = 133 \text{ francs,}$$

Le bénéfice est de $133 - 80 = 53$ francs, soit 8 fois moins que le bénéfice effectivement perçu ; la pièce de drap mesurait donc $8 \times 20 = 160$ mètres.

La solution «par l'algèbre» a pour outil essentiel l'équation

$$8(x/5) + 7(x/4) + 6(x - x/5 - x/4) - 4x = 424$$

qu'il s'agit alors de résoudre par le calcul algébrique, et que l'arithmétique résolvait (par la méthode indiquée) sans la manipuler, **et sans même l'écrire** - ce qu'elle ne sait pas faire.

La solution arithmétique est ici économique, certes[51]. Elle deviendra ailleurs hasardeuse, voire impossible. L'univers mathématique de l'ancienne arithmétique est pour cela un monde clos. Les problèmes y sont stéréotypés, comme les solutions qu'elle enseigne à leur donner.

6.2 Paramètres et formules, variables et fonctions.

Par contraste, l'introduction des lettres (les «espèces» des auteurs anciens), synonyme de l'algébrisation du corpus mathématique, opère une ouverture indéfinie : on a dit ailleurs[52] comment ce qu'on peut nommer la révolution algébrique fut justement salué par ses promoteurs et ses contemporains. Mais la clé du succès ne tient pas seulement dans ce petit x qui figure l'inconnue du problème. D'emblée la puissance algébrique est mise en relation avec le fait de désigner par des lettres, à côté des quantités inconnues, que l'on recherche, les **quantités connues** elles-mêmes - les données.

Dans une note à sa traduction (1630) de **La nouvelle algèbre de M. Viète**, Vauzélard écrit[53] : «L'utilité que l'on tire de cete nouvelle Algebre, est admirable, au respect de la confusion, de laquelle sont farsies les Algebres des anciens (...), à cause qu'ils exerçoient et faisoient les operations de leurs Algebres par les nombres ; c'est pourquoy de ces Algebres ne peut estre nul Theoreme ny solution generale pour toute proposition semblable à celle dont elle doit estre tirée, comme il se fait en celle-cy nouvellement instituée, de laquelle les ratiocinations et operations se font soubs les especes».

Ce qui fait la force de l'algèbre, donc, c'est ce que nous nommerions aujourd'hui l'emploi de **paramètres**, soit les variables du système dont les valeurs sont supposées connues. En termes de modélisation, l'introduction des paramètres fait passer d'une modélisation «arithmétique», où les énoncés du langage ordinaire, quasi inertes du point de vue calculatoire, côtoient le seul calcul sur les nombres, à une modélisation (algébrique) où les énoncés en vernaculaire cèdent la place à des expressions littérales (ou numéro-littérales), sur lesquelles opère le calcul algébrique, et qu'on pourra évaluer en fin de calcul, en revenant alors aux nombres particuliers définissant l'état du système auquel on s'intéresse. Descartes, dans sa règle seizième déjà citée, a fort bien indiqué la logique de cette procédure abstrayante : «On doit aussi, note-t-il, faire un sommaire, où nous écrirons les termes de la question, tels qu'ils nous auront été proposés la première fois ; puis comment on les abstrait et par quelles notations on les désigne. De sorte, après avoir trouvé la solution grâce à ces notations elles-mêmes, nous appliquerons facilement cette solution, sans aucun secours de la mémoire, au sujet particulier dont il sera question, car rien ne peut jamais être abstrait que d'un sujet moins général».

Cette leçon a été progressivement perdue dans notre enseignement secondaire. Je possède r billes rouges et n billes noires, soit en tout t billes. Le système se modélise par la relation $t = r + n$. De là, j'obtiens aisément le nombre de billes noires possédées, n, en fonction du nombre total de billes, t, et du nombre de billes rouges, r, par la formule $n = t - r$. A propos d'un autre problème, tout aussi classique à un niveau légèrement supérieur[54], un auteur de la fin du XVIIIème siècle, reprenant le thème de l'algèbre comme mémoire[55], écrira ainsi : «en ne désignant aucun nombre en particulier, les nombres donnés passent sans altération d'une phrase à l'autre, tandis qu'en considérant des nombres déterminés, on effectue à mesure toutes les opérations qui se présentent sur ces nombres ; et quand on est parvenu au résultat, rien ne retrace comment le nombre 2, auquel on peut arriver par une infinité d'opérations différentes, a été formé par les nombres donnés 9 et 5».

L'emploi de paramètres remet à une place centrale, dès le niveau le plus élémentaire des études mathématiques, la notion de formule. Cette notion est immédiatement liée à celle de fonction : la mesure b du côté d'un rectangle d'aire S, dont l'autre côté a pour mesure a, est donnée par la formule $b = S/a$; supposons S fixé, et faisons varier $x = a$; la mesure de l'autre côté, soit $y = b$, est une fonction (homographique) de x, donnée par $y = S/x$.

La fonctionnalité du calcul algébrique qu'une perspective de renouvellement curriculaire doit viser suppose ainsi, précocement, l'emploi de **paramètres** ; suscite la réappropriation de la notion de **formule** (en mettant en avant autant leur **production** que leur mise en œuvre) ; et conduit à envisager la familiarisation, précoce tout autant, avec la notion de **fonction.** Le programme de recherche, que nous avions résumé plus haut en deux objectifs solidaires, reçoit ici une extension décisive.

REFERENCES.

BACHELARD G. (1928), *Essai sur la connaissance approchée,* Jules Vrin, Paris, quatrième édition 1973.

BACHELARD G. (1949), *Le rationalisme appliqué,* Presses universitaires de France, Paris, quatrième édition 1970.

CHEVALLARD Y. (1984a), «Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège - première partie : l'évolution de la transposition didactique», **Petit x**, n° 5, pp. 51-94.

CHEVALLARD Y. (1985b), *La transposition didactique - Du savoir savant au savoir enseigné,* La pensée sauvage, Grenoble.

CHEVALLARD Y. (1986), «Les programmes et la transposition didactique», *Bulletin de l'APMEP,* n° 352 (février 1986), pp. 32-50.

CHEVALLARD Y. et MERCIER A. (1987), *Sur la formation historique du temps didactique,* Editions de l'IREM d'Aix-Marseille, Marseille.

CHOQUET G. (1964), *L'enseignement de la géométrie,* Hermann, Paris.

DIEUDONNE J. (1964), *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire,* Hermann, Paris.

DOUADY R. (1986), «Jeux de cadres et dialectique outil-objet», *Recherches en didactique des mathématiques,* Vol. 7-2, pp. 5-31.

EKELAND I. (1984), *Le calcul, l'imprévu,* Editions du Seuil.

FEBVRE L. (1942), *Le problème de l'incroyance au 16ème siècle,* Albin Michel, Paris 1968.

FISCHER R. (à paraître), «The «Human Factor» in Pure and Applied Mathematics», in M.S. Arora, A. Rogerson et F. Mina (éds) : *Mathematics Education into the 21st Century.*

FREUD S. (1920), *Essais de psychanalyse,* Payot, Paris, 1976.

HOUZEL C. (1985), «Géométrie algébrique», *Encyclopaedia universalis,* n° 8, pp. 481-488.

LANGANEY A. (1979), *Le sexe et l'innovation,* Editions du Seuil, Paris.

LEBESGUE H. (1935), *La mesure des grandeurs,* Albert Blanchard, Paris, 1975.

LUTZ R. et GOZE M. (1985), «Analyse non standard», *Encyclopaedia universalis,* n° 2, pp. 13-16.

MOULOUD N. (1985), «Modèle», *Encyclopaedia universalis,* n° 12, pp.401-402.

RAYMOND P. (1975), *L'histoire et les sciences,* François Maspéro, Paris.

REEB G. (1981), «Analyse non standard (essai de vulgarisation)», *Bulletin de l'APMEP,* n° 328 (avril 1981), pp. 259-273.

SCHOENFELD A.H. (1985), *Mathematical Problem Solving,* Academic Press, Orlando.

SERRES M. (1972), *Hermès II - L'interférence,* Editions de Minuit, Paris.

SMITH D.E. (1925), *History of mathematics,* volume II, Dover, New York, 1958.

VALENTIN L. (1983), *L'univers mécanique - Introduction à la physique et à ses méthodes,* Hermann, Paris.

VAULEZARD (1630), *La nouvelle algèbre de M. Viète,* Fayard, Paris, 1986.

ANNEXE 1

L'EMPIRISME, SOLUTION ET PROBLEME.

L'affermissement de l'empirisme, qui est d'abord un fait, soulève un problème délicat d'analyse didactique. Pourquoi ce recours - spontané, c'est-à-dire impensé - à une telle «solution» empiriste ? Une solution, d'ailleurs, à quel problème ? Autant de questions sur lesquelles il convient de s'arrêter un instant - et qui, on le sait peut-être, ne valent pas que pour l'enseignement des mathématiques[56].

La clé de cette énigme se trouve, nous semble-t-il, dans le processus de transposition didactique[57]. L'une des contraintes majeures auxquelles se trouve soumis le système d'enseignement est celui de la **compatibilité entre savoir enseigné et savoir savant** - contrainte sous laquelle doit être résolu le problème de la viabilité, et de la viabilisation, des systèmes didactiques[58]. Or la viabilité didactique suppose, d'une manière générale, la conquête d'une **autonomie relative** de la sphère didactique par rapport à la sphère savante. Une telle autonomie est nécessaire parce que les régimes, savant et enseigné, du savoir, diffèrent. Les systèmes de contraintes didactiques internes ont en effet un caractère **sui generis**, qui impose leur loi spécifique au traitement du savoir à l'intérieur des systèmes didactiques. Telle est l'une des leçons qu'apporte, à cet égard, la théorie de la transposition didactique.

Il existe dès lors une véritable **contradiction** au cœur du problème fondamental de la viabilité didactique. D'une part, le savoir enseigné doit pouvoir se réclamer du savoir savant, et, tel un vassal à l'endroit de son suzerain, lui marquer son allégeance, faire reconnaître que, par un adoubement en bonne et due forme, il a été un jour installé dans une légitimité autant culturelle qu'épistémologique[59]. Mais, d'autre part, le savoir enseigné ne peut être le reflet pur et simple du savoir savant. Il doit d'une certaine façon, prendre ses distances, marquer sa spécificité, assumer des valeurs et des usages que le régime savant des savoirs reconnaît. C'est alors au problème didactique constitué par cette contradiction intrinsèque (et permanente) que l'option empiriste apporte une solution.

En affirmant en effet que le secret de la connaissance du monde se trouve dans les objets du monde, en réfutant - implicitement - cette idée essentielle que la connaissance constitue un **ajout** au monde des objets «réels», en lui donnant le statut d'**un certain regard**, plus aiguisé et plus justement discriminateur, sur les affaires du monde, l'empirisme affirme aussi que **toute connaisssance peut être engendrée en autonomie par rapport au savoir savant.**

Paradoxe et contradiction, cette conclusion, qui permet au savoir enseigné de se déployer dans une heureuse autarcie, peut se prévaloir de sa fidélité à la leçon de la sphère savante. Ici comme là, la production du savoir serait endogène ; n'emprunterait rien qu'elle ne puisse tirer de son propre fonds ; ne proposerait rien qu'elle n'élabore selon une logique productive autonome, tenue pour seul fondement et reconnue pour seule autorité. Bref, l'enseignement serait le recommencement de la science, sa seconde naissance.

Cette manière de fidélité, qui légitime le didactique au regard du savant, est aussi une manière de se défaire du savant, de le refouler en lui donnant le statut d'une geste primordiale, que l'enseignement rejouerait chaque jour, dans une autodétermination tout à la fois apprise du savoir savant, et négatrice du savoir savant[60]. Concrètement, pourtant, l'empirisme conduira à mimer les gestes de la production savante du savoir, en vidant ces gestes de la fonction stratégique que leur assignait la genèse savante dans laquelle ils étaient primitivement apparus. On sait ainsi que l'expérience, celle de la biologie, de la chimie ou de la physique savantes, présente dans la classe en représentation, y perd pourtant son rôle actif dans la dialectique de la construction du savoir : l'infidélité empiriste éclate. Car la science ne se recommence pas ; elle s'apprend, ou se continue[61].

La «solution» empiriste au problème didactique des relations entre le didactique et le savant n'est en fait, si l'on peut dire, que partiellement optimale. Ruse habile, elle permet de gagner des batailles, sans doute, mais laisse l'issue de la guerre indécise. Elle sera la cause directe de bien des revers ultérieurs, dont l'origine est, dans son principe, toujours la même. Le processus de transposition didactique transforme en objets d'enseignement des éléments pris au savoir savant. C'est en cela que la filiation savante du savoir enseigné apparaît le plus concrètement : on enseigne, par exemple, «les systèmes d'équations linéaires à deux inconnues», que les mathématiques savantes peuvent authentifier comme étant «des mathématiques». Mais, dans le même temps, à côté de tels invariants, se produisent des modifications fonctionnelles, des altérations notoires dans le **fonctionnement** de ces objets de savoir «savantoïdes». Les mots de la tribu mathématicienne sont (partiellement) conservés et, plus généralement, un certain nombre de signifiants (formalismes de calcul, etc.) sont effectivement maintenus ; pourtant, l'univers qu'il viennent de constituer, les relations dans lesquelles ils entrent apparaissent bientôt, à l'observateur mathématicien étranger à la sphère didactique, comme façonnant un monde mathématique étonnant, marqué localement d'aberrations mathématiquement inexplicables et, globalement, dissonant par rapport à la sphère savante. Manière de dire que les relations de compatibilité entre le didactique et le savant entrent alors en crise.

Une telle crise peut prendre des formes différentes, et revêtir une ampleur et une portée variables, sans doute. Mais il faut surtout souligner ici que cette crise couve en permanence au sein même du système d'enseignement ; que son versant externe, plus ou moins spectaculaire, est l'envers d'un avers beaucoup plus familier aux usagers du système ; qu'il y a, en somme, une **solidarité dans la crise**, qui unit en un destin partagé intérieur et extérieur.

ANNEXE 2

LA NOTION DE PROPORTION.

Supposons que nous voulions mathématiser - pour l'étudier - la notion intuitive de **proportion** - proportion des boules rouges dans une urne contenant des boules rouges et des boules noires par exemple. Le système étudié - l'urne - peut être décrit par des variables entières : nombre de boules rouges r, nombre de boules noires n, nombre total de boules t. (D'autres aspects du système - telle la localisation dans l'espace des différentes boules - sont regardés a priori comme non pertinents par rapport au type de phénomène que l'on veut étudier, et le modèle ne les prendra pas en charge). Dans un premier temps, on peut penser que la théorie mathématique à choisir est celle des expressions algébriques sur $\mathbb{N}$. On obtient ainsi une première égalité appartenant au modèle, $t = r + n$. Celle-ci permet de représenter certains phénomènes relatifs à la classe de systèmes étudiés, comme le **mélange de deux urnes** caractérisées respectivement par les triplets (r, n, t) et (r', n', t') : l'urne-réunion est alors caractérisée par le triplet

$$(r + r', n + n', t + t').$$

Les équations suivantes

$$t = r + n \,;\, t' = r' + n' \,;\, R = r + r' \,;\, N = n + n' \,;\, T = t + t' \,;\, T = R + N,$$

constituent un modèle (surabondant) du mélange d'urnes. De la même façon, on pourra représenter dans la même théorie mathématique le phénomène du **bourrage d'urne** (dans laquelle on introduit r' boules rouges supplémentaires) par le modèle formé des égalités algébriques suivantes :

$$t = r + n \,;\, R = r + r' \,;\, N = n \,;\, T = R + N.$$

Mais, dans ces deux cas, tant qu'on ne dispose pas d'une modélisation de la notion de proportion, on ne peut pas exprimer, ni donc étudier, **dans le modèle**, les variations (éventuelles) de la proportion des boules rouges. La connaissance intuitive que l'on a des systèmes étudiés ici fait que l'on sait - ou du moins que l'on pense - que le bourrage de l'urne par adjonction de boules rouges fait augmenter la proportion des boules rouges, même si on ne sait pas définir numériquement cette proportion : cette propriété nous semble en effet constitutive de notre notion de proportion. Si, dans le modèle que nous construirons, on ne pouvait **démontrer** cette propriété, nous serions amenés soit à revoir le modèle, soit à mettre en doute notre intuition à propos du phénomène considéré (les modèles permettent d'écarter bien des intuitions fausses, en mathématiques comme en physique). Observons cependant que nous pouvons déjà démontrer, dans le modèle élaboré jusqu'ici, une propriété suffisante en pratique pour inspirer une manipulation judicieuse du bourrage d'urnes : le nombre de boules rouges augmente. Cette propriété, de multiples fois vérifiée empiriquement, s'écrit maintenant

$$r + r' > r$$

et peut être démontrée vraie (dès que $r' > 0$). (On remarquera que cette démonstration est d'autre nature que la simple vérification du fait que si par exemple $r = 9\,456$ et $r' = 400$, alors $r = 9\,856$ est supérieur à $9\,456$). En revanche, il est plus malaisé de dire, «intuitivement», ce que sera la proportion des boules rouges dans l'urne issue du mélange de deux urnes. On peut encore imaginer qu'elle sera intermédiaire entre les proportions des deux urnes - mais tout le monde n'est pas spontanément d'accord à ce sujet, loin de là.

Prenons maintenant une situation légèrement plus complexe. Supposons que, partant d'une urne contenant un nombre pair (non nul) de boules rouges ainsi que des boules noires, on enlève la moitié des boules rouges. Si l'on se réfère à une propriété évoquée plus haut (l'adjonction de boules rouges fait monter la proportion des boules rouges), ainsi qu'à l'idée que la proportion est conservée par une «homothétie» de l'urne, on aboutit, en raisonnant «à l'envers», à cette conclusion : la proportion des boules rouges diminue. Mais comment se situe-t-elle alors par rapport à la proportion initiale ? Est-elle égale à la moitié de sa valeur, plus petite ou plus grande ? Pour y voir clair est net, un modèle calculatoire serait bien utile. On ne peut certainement pas modéliser la notion intuitive de proportion à l'aide des expressions algébriques à coefficients dans $\mathbb{N}$. Car on aurait alors $p = P(r, n)$, P étant un polynôme à coefficients dans $\mathbb{N}$. On sait que p diminue, pour r donné, lorsque n augmente («contre-bourrage de l'urne» !). Or un polynôme $P(r, n)$ à coefficients dans $\mathbb{N}$ est une fonction croissante de r (ce qui convient) mais ne peut pas être une fonction décroissante de n. On peut essayer de rechercher alors une expression de p à l'aide d'un polynôme $P(r, n)$ **à coefficients dans $\mathbb{Z}$**. Mais un tel modèle serait incapable de rendre compte de l'invariance de la proportion par homothétie. Il faut donc chercher ailleurs. Le premier moment de la modélisation concerne ce que l'on sait (ou croit savoir) de plus assuré concernant le système étudié. Outre les propriétés déjà énoncées, il y a la suivante : si l'on considère une urne ayant 2 fois plus de boules rouges que l'urne donnée et **même nombre total de boules**, la proportion des boules rouges est multipliée par 2. Il en est ainsi pour tout nombre k (dès lors que l'on a $kr < n$). Si l'on pose $p = f(r, t)$, on doit donc avoir : $f(r, t) = rf(1, t)$, pour tout $r < t$. Mais, dualement, on «sait» que, le nombre de boules rouges restant inchangé, si t est multiplié par k (par adjonction de boules noires), alors p est divisé par k, autrement dit $f(r, t) = kf(r, kt)$. Il résulte de là que $tf(r, t) = trf(1, t) = rtf(1, t) = rf(t, t)$. On sait de plus que la proportion est invariante par une homothétie de l'urne : $f(kr, kt) = f(r, t)$. On a donc $f(t, t) = f(1, 1)$ et par suite p est solution de l'équation $tp = rf(1, 1)$. Si l'on pose conventionnellement $f(1, 1) = 1$ (la proportion est égale à 1 lorsqu'il n'y a que des boules rouges), p est donné comme solution de l'équation $tp = r$. Cette équation n'a pas de solution dans $\mathbb{N}$ (sauf si $n = 0$). Il faut donc **étendre le système de nombres** et poser ici $S = Q+$. Dès lors, $p = f(r, t) = r/t$.

Cette égalité donne un **modèle mathématique** de la notion de proportion. La connaissance du **calcul algébrique sur Q+** permet alors d'entamer la vérification de certaines propriétés attribuées à la notion de proportion, et de conclure sur des questions laissées (plus ou moins) ouvertes par l'intuition. Reprenons les propriétés énoncées plus haut. Tout d'abord, celles qui ont été utilisées dans l'élaboration du modèle : la proportion est bien invariante par une homothétie de l'urne, puisque $r/t = kr/kt$; lorsqu'on multiplie par k le nombre de boules rouges, sans changer le nombre total de boules, la proportion est multipliée par k, $kr/t = k(r/t)$; lorsqu'on multiplie par k le nombre total de boules, sans changer le nombre de boules rouges, la proportion est divisée par k, puisque $r/kt = (r/t)/k$. Ensuite, celles qui ont été évoquées comme sûres, sans toutefois qu'on les ait utilisées dans l'élaboration du modèle : le bourrage de l'urne (par adjonction de boules rouges) fait bien augmenter la proportion : on a bien en effet

$$(r + r')/(t + r') > r/t,$$

puisque cette inégalité équivaut à $t(r + r') > r(t + r')$, donc à $tr' > rr'$, soit enfin à $t > r$, inégalité vérifiée dès que l'urne contient effectivement des boules noires (en fait, il ne servirait à rien, **du point de vue de la proportion**, de bourrer une urne ne contenant que des boules rouges !). Examinons enfin les problèmes laissés plus ou moins ouverts. Le mélange de deux urnes d'abord : les proportions p et p' des urnes mélangées étant supposées vérifier $p < p'$ (et, bien sûr, $0 < p, p' < 1$), la proportion de l'urne-réunion, $P = R/T = (r + r')/(t + t')$, est bien comprise entre p et p' (on le vérifiera) ; quant à la proportion p' de boules rouges dans l'urne obtenue en enlevant la moitié des boules rouges dans une urne de proportion p, elle reste supérieure à $p/2$ (résultat dont la démonstration est laissée au lecteur).

NOTES.

1. La première partie de ce travail a paru dans **petit x** en 1984 (voir Chevallard 1984a) nous y renvoyons le lecteur.

2. Sur la notion d'empirisme, voir notamment Chevallard 1984a, § VIII.

3. Voir en particulier Schoenfeld 1985, pp. 160-181.

4. Cette question sera abordée plus largement dans la troisième partie de ce travail (à paraître).

5. Sur l'empirisme de cette conception du passage du numérique à l'algébtique, voir Chevallard 1984a, pp. 77-78.

6. Nous avons dû renvoyer en annexe (voir l'**annexe 1**) un développement plus difficile concernant les rapports de l'empirisme et de l'enseignement des sciences. Bien que nous nous y référions à plusieurs reprises dans ce qui suit, le lecteur pourra, en première lecture, ignorer cette annexe. Je tiens à remercier Graciela Ricco d'avoir attiré mon attention sur le problème qui s'y trouve abordé.

7. Voir l'annexe 1.

8. Voir l'annexe 1.

9. Voir l'annexe 1.

10. L'explicitation de ce point suppose des développements qui ne peuvent trouver leur place ici.

11. Notons que les techniques usuelles de décomposition en éléments simples font un usage exemplaire de ce que nous avons appelé la dialectique du numérique et de l'algébrique (Chevallard 1984a, § VII).

12. Sur cette question, voir Chevallard 1986.

13. Les termes de syntaxe et de sémantique sont pris ici au sens de la logique mathématique plutôt qu'en leur acception linguistique.

14. C'est ainsi que, dans son livre **L'enseignement de la géométrie** (Hermann, Paris, 1964), Gustave Choquet évite, par quelques remarques rapides, le problème du numérique, supposé toujours-déjà résolu, au moins jusqu'au point indispensable aux utilisations qui en sont faites.

15. On se reportera ici à Chevallard 1985a.

16. Cette question sera examinée plus en détail dans la troisième partie de ce travail (à paraître).

17. Sont ainsi écartés les systèmes Z/nZ, C, etc.

18. En l'absence d'une relation d'ordre compatible avec les lois additive et multiplicative, cette propriété permettra de définir une première extension de la classe de systèmes de nombres définie ici (Z/pZ avec premier, C, etc.).

19. On la rapprochera, par sa forme, de la propriété par laquelle on définit les corps algébriques clos. Voir aussi, **infra**, la note 21.

20. Prendre pour SN l'ensemble des réels n + m 2, où n et m sont des entiers positifs ou nuls : on a $2 + \sqrt{2} > 3 + 2\sqrt{2}$, mais la différence de ces deux nombres, soit $-1 + \sqrt{2}$, n'appartient pas à SN.

21. Le passage de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{R}$ (défini comme corps ordonné, archimédien et complet) n'entre pas dans cette catégorie, mais on peut montrer que les mathématiques du collège se satisfont d'un domaine de calcul qui soit un sous-corps de $\mathbb{R}$ dans lequel, pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à 3,

et pour tout couple de nombres (a, b), si $P(a) < 0$ et $P(b) > 0$, alors P s'annule entre a et b. Toutefois, un tel domaine de calcul ne permet pas de mesurer les angles, et cette opération exige le passage effectif au corps des réels complet. Voir Dieudonné 1964, chapitre I et annexe I.

22. Soulignons que l'introduction (actuellement implicite) du corps des réels au niveau du lycée prolonge cette ligne de développement. Elle est en fait contemporaine de l'extension des types de manipulation que l'on peut faire sur les nombres, avec, notamment, l'apparition des fonctions transcendantes élémentaires. Ajoutons aussi que, avec le développement de l'analyse non standard, l'analyse réelle peut être rendue plus agréable encore par le passage à un surcorps de $\mathbb{R}$ où existent notamment des infiniment grands et des infiniment petits. Voir par exemple Reeb 1981 ou Lutz et Goze 1985.

23. Où $\mathbb{R}$ désigne un sous-corps adéquat du corps des réels.

24. La question des domaines d'emploi du calcul algébrique sera examinée de manière plus systématique dans la troisième partie de ce travail (à paraître).

25. Pour une présentation générale des notions de **système** et de **modèle**, nous renvoyons le lecteur aux articles correspondants de l'**Encyclopaedia universalis.**

26. Cette question n'est pas aussi évidente qu'il peut paraître. On a ainsi longtemps considéré que les phénomènes électriques relevaient de la biologie, voire de la chimie, non de la physique. Voir Bachelard 1949, chapitre VIII.

27. Valentin 1983, pp. 15-16. On notera la manière nettement empiriste de présenter le processus de construction du modèle : «En **regardant attentivement** ce mouvement du pendule...» (c'est nous qui soulignons). Un simple «regard attentif» porté sur la chose étudiée permettrait donc d'en pénétrer l'essence ! Là encore se vérifie notre affirmation (voir l'annexe 1) selon laquelle l'empirisme devient une seconde nature de quiconque se fait enseignant.

28. Un calcul immédiat (qui tient compte de l'équation aux dimensions du poids P et du fait que le coefficient f(A) est sans dimension) montre que l'expression $M^x L^y P^z f(A)$ a pour dimension $x + z$ par rapport à la masse, $y + z$ par rapport à la longueur, $-2z$ par rapport au temps ; l'expression T ayant la dimension 1 par rapport au temps et 0 par rapport à la masse et à la longueur, on en déduit les égalités indiquées. L'application de l'analyse dimensionnelle au cas du pendule simple est ancienne : elle est due, semble-t-il, au mathématicien français Joseph Bertrand (1878). Voir Bachelard 1928, chapitre VI.

29. Ibid., p. 16. Nous parlons ici en termes de connaissance du système étudié (connaissance que le modèle permet de produire) plutôt qu'en termes de **prédictivité** du modèle. Cette dernière notion, familière au physicien, pose en effet de délicats problèmes épistémologiques (dont on peut penser au demeurant que leur étude a sa place dans l'éducation scientifique contemporaine). Dans le cadre même de l'usage classique des modèles, la prédictivité est toujours **conditionnelle** et liée à la notion de système pseudo-isolé : le pendule dont la longueur a été quadruplée aura une période deux fois plus grande, à condition que rien ne survienne dans le temps (par exemple des perturbations liées à une série de chocs aléatoires) qui modifie de manière imprévue (par le modèle) l'état du système ; la prédictivité est ici plus théorique que réelle, quelle que soit l'ensemble des variables intégrées dans le modèle. En outre, dans le cas de systèmes non-classiques, en dépit du caractère déterministe du modèle, le comportement du système peut apparaître typiquement aléatoire, donc imprévisible : la prédictivité se perd, alors même que le modèle conserve son caractère explicatif, et permet notamment d'expliquer pourquoi la prédiction est difficile, voire impossible (on songera ici aux modèles météorologiques) : voir là-dessus Ekeland 1984. Enfin, la prédictivité théorique que permet le modèle peut induire une prise de décision (consciente) ou une rétroaction (plus ou moins inconsciente) de la part des acteurs humains ayant prise sur l'évolution du système, dans le but d'éviter ce que le modèle révèle, que la révélation porte sur l'état présent ou sur un état futur «théorique» (on songera ici aux modèles et aux évolutions démographiques par exemple). L'accent est alors mis bien plus sur la connaissance apportée par le modèle que sur son caractère prédictif stricto sensu ; à la limite, un système humain contient proprement un ensemble de modèles de lui-même, dont l'utilisation (météorologique, démographique, économique, etc.) détermine l'évolution du système (voir Fischer, à paraître).

30. Les termes de mathématique et de mathématisé sont empruntés à Raymond 1975, pp. 63-71.

31. Comme le fait Jean Dieudonné dans son livre déjà cité.

32. Sur ce point, voir Bachelard 1949, pp. 91-97.

33. Voir Smith 1925, pp. 446-448.

34. On trouvera dans l'**annexe 2** une modélisation mathématique de la notion de proportion.

35. On retrouve ici le thème du «jeu de cadres», développé par Régine Douady (voir Douady 1986).

36. Voir Houzel 1985, p. 481a.

37. Dans l'exemple donné ici, Descartes prend appui sur la théorie de la géométrie du plan qu'apporte le corpus euclidien, modèle régional qui, au demeurant, se développera ensuite - sous le nom de géométrie synthétique («pure») - plus ou moins en opposition au modèle analytique (cartésien).

38. Serres 1972, p. 163.

39. L'exemple traité ici est mathématiquement élémentaire, mais épistémologiquement fondamental (en partie parce qu'il s'attache à un problème élémentaire...). Nous n'avons pas hésité à le présenter longuement, avec tout le détail qui nous a paru nécessaire, afin d'en tirer parti à de multiples reprises dans les développements qui suivent.

40. Sans parler même de la division, la multiplication resta longtemps hors de portée du commun des mortels. L'historien Lucien Febvre rapporte l'anecdote suivante : «Je me souviens toujours de la belle histoire du secrétaire d'un Président de la Chambre des Comptes, sommé brutalement par une bande d'avoir à ouvrir sa porte : «Si tu n'ouvres pas, nous sommes ici 50 qui te donnerons chacun 100 coups de bâtons». L'interpellé répond aussitôt : «Comment ! 5 000 coups de bâton !» Et Tallemand, qui raconte l'histoire, de s'émerveiller : «J'admire la présence d'esprit de cet homme, et il me semble qu'il fallait être secrétaire d'un Président de la Chambre des Comptes pour faire le calcul si prestement !. Le calcul, l'impossible calcul : 100 × 50». (Febvre 1942, p. 363).

41. Chez Platon, le paradigme est l'objet facile, à valeur propédeutique, sur lequel on s'exerce en vue de saisir adéquatement un objet dont la compréhension offre une difficulté supérieure : ainsi le pêcheur à la ligne nous donne une image du sophiste, le tisserand du... souverain. L'origine de la notion de modèle se trouve dans la technologie : «le modèle est d'abord la «maquette», l'objet réduit et maniable qui reproduit en lui, sous une forme simplifiée, «miniaturisée», les propriétés d'un objet de grandes dimensions, qu'il s'agisse d'une architecture ou d'un dispositif mécanique ; l'objet réduit peut être soumis à des mesures, des calculs, des tests physiques qui ne sont pas appliqués commodément à la chose reproduite» (Mouloud 1985, p. 401).

42. Cette libération devient complète avec l'**expérience de pensée**, qui peut procéder librement («dans la tête») ou, comme aujourd'hui l'ordinateur, se concrétiser en une véritable simulation (laquelle suppose un modèle, qui se substitue au système, réel ou imaginé, que l'on a en vue).

43. L'activité mathématique est, certes, une activité concrète ; mais d'un genre particulier. En grec, **mathêma** signifie étude, **manthanein** signifie étudier : le mathématicien se livre à l'étude. Qu'on s'en réjouisse ou qu'on s'en désole, son activité n'est pas une activité de plein air ; ou, du moins, c'est une activité qui peut, par nature, se retrancher du monde.

44. Comme on le sait, c'est à une variante de cette procédure que nombre de commerçants recourent pour rendre la monnaie.

45. Pour une analyse devenue classique, voir Freud 1920, pp. 15-20.

46. Que l'on songe ici, à titre d'exemple moins familier, à cette conséquence de l'absence, tout au long de l'enseignement secondaire et au-delà, du concept de cardinal transfini : la difficulté à accepter l'idée qu'il y ait (entre 0 et 1 par exemple) plus de réels que de rationnels.

47. Je dois choisir une bille dans chacun des lots d'un ensemble de 3 lots de 2 billes. Ces billes ne diffèrent que par la couleur. Celles du premier lot sont, l'une verte, l'autre rouge ; celles du second lot sont rouges ; celles du troisième lot sont, l'une verte, l'autre noire ; entre combien d'ensembles de billes différents ai-je le choix ?

48. Lebesgue 1935, pp. 5-6.

49. Langaney 1979, p. 18.

50. Voir Chevallard 1986, pp. 38-40.

51. On remarquera en passant que l'équation (du premier degré) à laquelle on aboutit ici est déjà relativement complexe (pour un élève de quatrième par exemple). Par contraste, la solution arithmétique est nettement plus facile : grâce à l'usage pertinent de ses formulettes, l'arithmétique est ainsi capable de relatifs tours de force - qui en ont fasciné plus d'un.

52. Chevallard 1984a.

53. Vaulézard 1630, p. 15, note g.

54. Le problème posé est le suivant : trouver deux nombres sachant que leur somme est 9 et leur différence, 5.

55. Voir Chevallard 1984a, p. 57.

56. Voir ainsi le travail de S. et M.H. Johsua, «Le rapport à l'expérimental dans l'enseignement des sciences» (à paraître dans **Recherche en didactique des mathématiques**).

57. Nous faisons usage dans ce qui suit de notions présentées dans Chevallard 1985b, auquel nous renvoyons le lecteur.

58. Sur les notions de viabilité et de viabilisation, voir Chevallard 1986.

59. Et culturelle parce qu'épistémologique.

60. On comprend ainsi que, pris dans le jeu incertain où cette solution les entraîne, nombre d'acteurs de la scène didactique aient pu réagir à la théorie de la transposition didactique en regrettant que s'y introduise, «artificiellement» selon eux, des considérations sur le savoir «savant», dont on ne saurait trop en quoi il est savant, etc., en une dénégation du savoir savant qui vaut adhésion à la solution empiriste

61. On mesurera la difficulté du problème de la construction d'un enseignement non empiriste en observant que le paradigme historique du temps didactique, soit l'épistémologie cartésienne (voir Chevallard et Mercier 1987), se présente comme un refus savant du monde savant. Cette dénégation de l'historicité de la formation du savoir savant, conforme aux principes selon lesquels le savoir savant s'organise, peut aboutir dans la sphère savante - c'est le cas chez Descartes - à un rationalisme pur. Dans la sphère didactique, il conduit directement aux formes d'empirisme dont nous esquissons ici la description.