ASPECTS ANALYTIQUES ET ASPECTS ANALOGIQUES DE LA PROPORTIONNALITE DANS UNE SITUATION DE FORMULATION

Sidi-Bekaye SOKONA
Equipe de didactique des mathématiques et de l'informatique,
Université Joseph Fourier BP 53X, 38041 Grenoble Cedex

INTRODUCTION.

1. Importance de la notion de proportionnalité.

La notion de proportionnalité est sans doute l'une des notions mathématiques les plus importantes que nous rencontrons du primaire au collège. Ses nombreuses applications dans différents domaines (mathématiques, physique, biologie, chimie, économie,...) lui font jouer un rôle essentiel dans l'enseignement. La mise en place de certaines notions mathématiques telles que les notions de fraction, d'échelle, de pourcentage,... lui sont assujetties. Il faut également souligner son utilisation dans la vie courante.

La notion de proportionnalité est l'une des notions qui pose le plus de problèmes dans l'enseignement des mathématiques. Elle a été l'objet de plusieurs recherches dont les résultats ont le plus souvent convergé vers une même conclusion : son acquisition par les élèves s'effectue sur une longue période; et la prise en compte par les élèves de certaines propriétés qui lui sont liées n'intervient que tardivement. Comme l'a montré le groupe de **Karplus** (1970 à 1981), la maîtrise du schème des proportions est fortement liée à l'âge des élèves et le taux de maîtrise reste le même quelque soit l'âge : environ 30% des élèves de 13 à 14 ans et 50% des élèves de 16 à 17 ans (et ces pourcentages sont difficilement dépassés).

2. Utilisation de propriétés de la proportionnalité par les élèves.

2a. Les deux classes de procédures (analytique et analogique).

Si f est une application linéaire telle que :

a	c
$b = f(a)$	$x = f(c)$

La procédure de type "scalaire" exploite la propriété $f(kx) = kf(x)$ ou $f(c)/f(a) = c/a$. L'opérateur qui permet de passer de b à x est le même que celui qui permet de passer de a à c (procédure de type analogique).

La procédure de type "fonction" utilise le coefficient de proportionnalité $k=f(c)/c=f(a)/a$. L'opérateur qui permet de passer de c à x est le même que celui qui permet de passer de a à b (procédure de type analytique).

«petit x» n° 19 pp. 5 à 27, 1989

* **G. Vergnaud** (1979) a étudié les comportements des élèves du 1[er] cycle face à un problème faisant appel à deux sortes de variables ; les durées et les consommations correspondantes de mazout par un système de chauffage central. Il distingua deux classes de procédés de comparaison utilisées par les élèves. Il s'agissait de la procédure de type "scalaire" et la procédure de type "fonction".

Quatre situations avaient été construites dont deux favorisaient l'utilisation de la procédure de type scalaire et les deux autres favorisaient la procédure de type fonction .

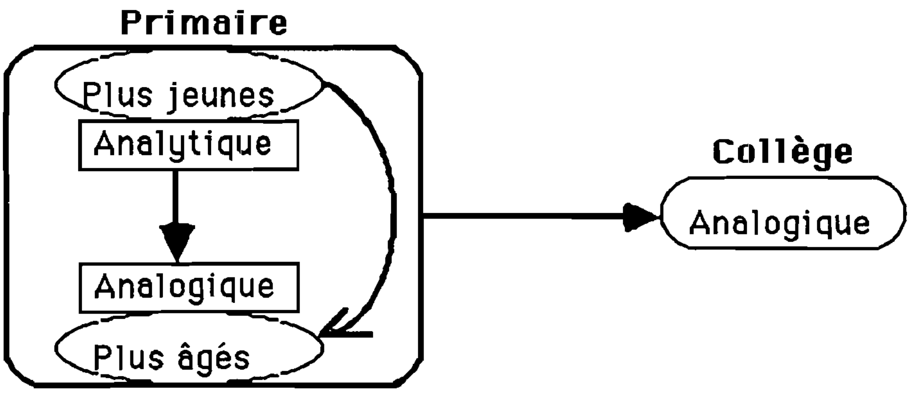
L'analyse des résultats a montré que les élèves préféraient plutôt utiliser la procédure de type scalaire, même dans les situations où elle était d'un emploi plus difficile .

* **G. Ricco** (1978), dans sa recherche "les premières acquisitions de la fonction linéaire" indique que l'emploi de l'opérateur fonction (opérateur multiplicatif) est antérieur à celui de l'opérateur scalaire chez les élèves du primaire (âgés de 7 à 11 ans) et que l'opérateur scalaire n'est employé que plus tardivement (chez les élèves les plus âgés, c'est-à-dire 9-11 ans).

Ce résultat qui semble contradictoire à celui de **G. Vergnaud** correspondrait à une évolution des procédures (de l'analytique vers l'analogique) au sein du primaire même (des plus jeunes aux plus âgés) et du primaire au collège.

Nous pouvons schématiser cette évolution de la façon suivante :

Schéma 1.



* Dans une série de publications, **Ch. Morin** (1984, 1985, 1986) et ses collègues ont étudié les conduites des élèves face à un problème faisant appel aux variables masses et longueurs. Les élèves avaient à calculer la longueur correspondant à une masse fixée à un ressort. L'analyse des résultats indique que la procédure scalaire est toujours plus employée par les élèves du premier cycle. Ces recherches confirment les résultats déjà obtenus par **G. Vergnaud**.

Une autre expérimentation, menée en 1987, visait à tester chez des élèves de 6[ème] la capacité de reconnaître une situation de proportionnalité. L'exercice proposé comportait deux parties distinctes : une première portant sur une situation de proportionnalité (comportant deux questions), et une seconde, sur une situation affine non proportionnelle.

Les principales procédures observées pour les deux questions de la première partie (la situation de proportionnalité) ont été des procédures de type scalaire et de type fonction et la décomposition additive. Les procédures faisant appel à une "valeur intermédiaire" ajoutée par les élèves pour les besoins du calcul n'ont été observées qu'avec la première question; certains élèves sont arrivés à l'emploi de l'unité comme valeur intermédiaire. L'absence de procédures "valeur intermédiaire" dans les solutions de la deuxième question exprimerait chez les élèves un manque de maîtrise de ces procédures. Leur emploi semble être lié à la nature et à la taille des nombres du problème.

* Le groupe de **Karplus** (1983), a distingué les modes de raisonnement utilisés par les élèves à partir de problèmes demandant la comparaison des teneurs en sucre de boissons préparées en mélangeant un certain nombre de cuillerées de sucre et de jus de citron.

Les procédures furent analysées selon les deux types de comparaison ; la procédure de type scalaire (comparaison sucre-sucre et jus de citron-jus de citron) et la procédure de type fonction (comparaison sucre-jus de citron pour la première boisson et sucre-jus de citron pour la seconde). Il s'est avéré que les élèves utilisent surtout des méthodes de comparaison de type fonction. Ce qui est contradictoire avec les résultats de **G. Vergnaud**.

Une explication de cette contradiction peut être donnée au niveau des cadres liés aux différentes tâches, le cadre numérique et le cadre des grandeurs (au sens de **R. Douady**, RDM Vol. 7.2, 1986).

Si des grandeurs G et G' sont mesurées avec la même unité; dire que b vaut k fois a ou bien que c vaut k' fois a a du sens aussi bien dans le cadre numérique que dans le cadre des grandeurs (a et c étant des mesures de la grandeur G et b une mesure de la grandeur G'). Dans la tâche proposée par **Karplus** les procédures de type scalaire et de type fonction se traduisent toutes par une comparaison de nombre de cuillerées. Dans ce cas la distinction entre les cadres (numérique et des grandeurs) ne se pose pas.

Si les grandeurs sont mesurées avec des unités différentes, b vaut k fois a n'a du sens que dans le cadre numérique. Seul c vaut k' fois a a du sens dans les deux cadres. Dans de cas le cadre des grandeurs pose un problème. Les élèves évitent pour cela des comparaisons impliquant explicitement les grandeurs.

Nous estimons que l'élève, dans sa comparaison, tient compte des deux cadres. C'est pourquoi la comparaison entre mesures d'une même grandeur apparaît plus naturellement chez les élèves.

* Les recherches de **Nœlting** (1980) sur la proportionnalité lui conduisent à distinguer des stades et des mécanismes de développement inhérents à la maîtrise du schème des proportions. Les tâches proposées aux élèves demandaient une comparaison de teneurs en jus d'orange de boissons préparées en mélangeant une certaine quantité d'eau et de jus d'orange.

Le chercheur décrit 4 stades de développement dont un stade symbolique (se situant vers l'âge de 2 ans) qui correspond à la capacité d'identification des éléments rentrant dans la composition de la boisson. Les trois autres stades (stade intuitif - stade opératoire concret - stade opératoire formel) ont été subdivisés chacun en des sous-stades caractérisés par des formes de pensée distinctes.

Malgré le but fixé (préciser les processus d'acquisition du raisonnement proportionnel) cette recherche fournit d'importants éléments d'étude sur les procédures de résolution des élèves. Des stratégies traitant le problème comme un problème de fraction ou de rapport ont été développées par des élèves. La première consistait à une comparaison de proportion de jus d'orange (ou d'eau) contenues dans les boissons; cette comparaison nécessitait une réduction à un même dénominateur des fractions construites. La seconde était basée sur une comparaison de rapports formés par des quantités de jus d'orange et d'eau. Cette dernière demandait un passage obligatoire par l'unité pour la comparaison. Si cette étude ne donne pas les fréquences d'utilisation des procédures, elle fournit par contre une description détaillée de celles-ci.

3b. A propos de l'enseignement de la proportionnalité.

Une analyse détaillée mettant en lumière l'importance de la notion de proportionnalité et des difficultés liées à son enseignement est faite par la **COPREM** (1986) à partir de recherches effectuées. La notion est présentée dans trois cadres : le cadre numérique, le cadre des grandeurs et le cadre graphique.

Le texte comporte des recommandations (développer l'interaction entre les cadres cités précédemment,...), des exemples de situation problème portant sur différents aspects de la proportionnalité (proportionnalité simple, proportionnalité multiple, composition de proportionnalités), des exemples de scénarios d'enseignement (périmètre et aire de rectangles, problèmes de vitesse moyenne, agrandissements et réductions).

Le texte ainsi produit fournit un outil essentiel à l'enseignement de la proportionnalité au niveau de la scolarité obligatoire. Il met alors à la disposition de l'enseignant un "riche matériau qu'il pourrait adapter à son tempérament propre et à ses élèves".

* Le groupe de **Ch. Morin** (1986), après les premiers travaux - Une préexpérimentation sur le thème de "proportionnalité" de la cinquième à la seconde (1984) - Analyse d'un problème affine, étude des contradictions (1985) - Etude du comportement d'élèves du second degré devant un problème lié à la proportionnalité (1986) - s'est proposé d'expérimenter quatre situations didactiques avec des objectifs précis. Le groupe de recherche voulait dans des situations de communication "d'inter-groupe" et "d'intra-groupe" permettre l'utilisation des méthodes analogiques et favoriser le passage à des méthodes analytiques chez les élèves.

Les quatre situations, le "Puzzle" et les "Balances" en 6^{e}, le "plan" en 5^{e} et les "Règles" en 4^{e} ont été suivies le plus souvent de post-tests, ce qui permettait de faire une évaluation des différentes situations par rapport aux objectifs fixés.

L'un des soucis dans cette recherche était de donner un caractère concret aux exercices. Les élèves étaient dans des situations pratiques dans lesquels ils étaient tous actifs; chacun d'eux exécutant une partie du travail commun. Il faut également souligner le souci constant de lier les activités à un chapitre du programme scolaire de la classe et de rester dans le cadre de ce chapitre.

De façon générale, lors des différentes activités, les procédures les plus souvent rencontrées tenaient des procédures analogiques. Même si les séances "mise en commun" avec le professeur ont vu l'adhésion des élèves aux méthodes analytiques, ils sont restés cependant attachés aux procédés analogiques. Il arrivait souvent qu'ils jonglent avec les deux méthodes, suivant les cas, pour effectuer certains calculs.

Malgré le caractère concret donné aux exercices, ces quatre situations n'ont pas favorisé le passage à des méthodes analytiques.

* Des situations d'apprentissage en classe de sixième ont été menées par une équipe de l'IREM de Besançon (1985-1986). Le groupe a utilisé une vingtaine de situations recouvrant trois cadres : le cadre numérique, le cadre géométrique et le cadre graphique. L'un des objectifs de cette expérimentation consistait à développer un "savoir-faire" chez les élèves (recherche de données pertinentes, organisation et traitement des données, choix de procédures adéquates,...).

Un prétest proposé avant toute situation d'apprentissage a permis de repérer les procédures utilisées par les élèves. Les procédures "additives" et de "passage à l'unité" ont été les plus fréquemment employées. Mais une légère préférence des élèves est allée en faveur des procédures additives.

Un test final destiné à contrôler l'effet de l'enseignement effectué n'a pas donné un résultat satisfaisant. Le nombre important de non-réponses (plus de 50%) à la dernière partie de l'épreuve (partie portant sur les calculs) a incité les expérimentateurs à la prudence dans l'analyse des résultats. Ce test a tout de même montré le bon comportement des élèves sur la première partie portant sur "l'exploration des graphiques".

4. La situation problème posée aux élèves.

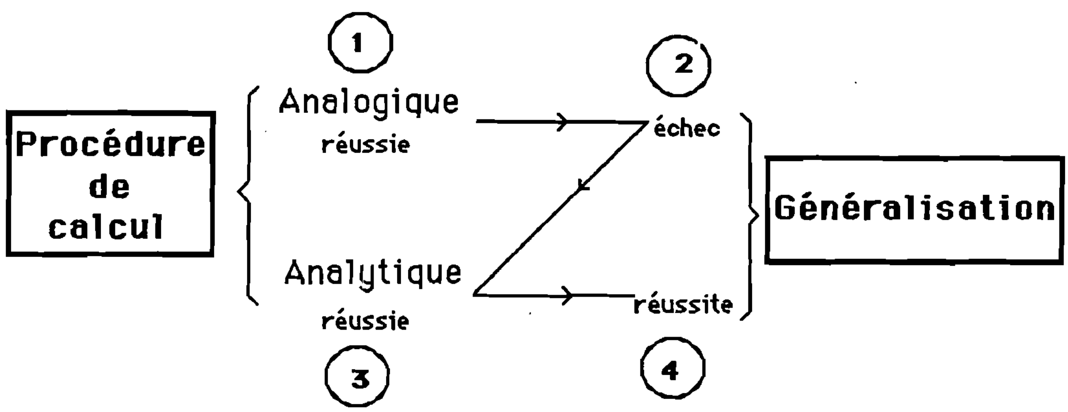
4a. Objectif.

Pour construire notre tâche, nous avons fait l'hypothèse que les procédures analytiques sont plus performantes et se prêtent plus facilement à une situation de généralisation que les procédures analogiques. La formulation de la méthode de calcul du coefficient de proportionnalité (analytique) paraît a priori plus simple à rédiger que celle relevant de procédures analogiques. En effet l'invariance du coefficient de proportionnalité permet une formulation simple du calcul de l'image d'un élément quelconque. Quant à la procédure analogique, l'opérateur calculé dépend toujours du couple d'éléments choisis; ce qui rend plus difficile la formulation de cette procédure.

Nous pensions que la tâche permettrait aux élèves utilisant des procédures analogiques d'effectuer un retour sur leurs procédures de calcul lorsqu'ils se trouvaient confrontés à des difficultés de généralisation, c'est-à-dire lorsqu'ils auraient à expliquer la procédure de calcul pour un cas quelconque non donné sous forme numérique. Ce retour devrait permettre le passage de l'analogique à l'analytique, il produirait un effet rétroactif sur les procédures, ce qui amènerait les élèves à se reporter sur des procédures analytiques.

Le schéma suivant donne le comportement (suivant 4 étapes) que nous souhaitions provoquer chez ces élèves:

Schéma 2 :



La tâche que nous avons proposée aux élèves fait suite aux recherches de Ch. Morin sur la proportionnalité dont l'un des buts était de favoriser l'utilisation des procédures analytiques chez les élèves. En fait les situations qu'elle a utilisées n'ont pas permis l'emploi de ces procédures. Nous avons pensé qu'un problème posé en des termes plus abstraits où une généralisation est demandée devait favoriser l'utilisation des procédures analytiques.

A cette fin, nous avons modifié l'énoncé suivant dans la tâche utilisée par **Ch. Morin** ("l'étude du comportement des élèves du second degré devant un problème lié à la proportionnalité."). Ci-dessous l'énoncé utilisé par **Ch. Morin** :

Différentes masses sont suspendues à un élastique. Pour chaque masse, on mesure la longueur de l'élastique.
Les résultats sont consignés dans le tableau suivant :

Masse en kg	0	0,4	0,8	1,2	1,6
Longueur en mm	520	547	574	601	628

1.) Ces données permettent-elles de trouver la longueur de l'élastique pour une masse de 0,3kg ? Si oui, donnez la réponse ; sinon, expliquez pourquoi.
2.) Même question pour une masse de 1,32kg .

4b. Le texte.

Voici le texte modifié par nous :

Différentes masses sont suspendues à un élastique. Pour chaque masse, on a mesuré la longueur de l'élastique .
Les résultats sont consignés dans le tableau suivant :

Masse en kg	0	0,4	0,8	1,2	1,6
Longueur en mm	520	547	574	601	628

Rédigez à l'intention d'autres élèves de votre âge la méthode qui permet de trouver la longueur de l'élastique pour n'importe quel poids inférieur à 1,6kg.

4c. Condition de passation.

L'expérience a été menée avec des élèves de deux collèges de la région grenobloise en 3ème et en 6ème pour l'un et en 3ème pour l'autre. Vingt élèves du premier collège (collège A, dont dix de chaque niveau) et douze du second (collège B) ont été observés. Ils étaient répartis en petits groupes de deux, travaillant chacun devant un observateur. Les moyennes d'âge étaient de 12 ans pour les élèves de 6ème et de 15 ans pour ceux des 3ème.

La passation de la tâche a eu lieu dans trois modalités différentes. Les deux premières concernaient les élèves de 3ème. Elles ont été exécutées avant tout enseignement de la notion de proportionnalité. La dernière a été faite avec les élèves de 6ème ayant déjà reçu l'enseignement de la "proportionnalité" dans l'année en cours.

Les interventions permises aux observateurs ne devaient avoir pour but que de relancer la recherche des élèves ou d'amener le groupe à aller au bout de leur pensée (c'est-à-dire à expliquer clairement certaines notions données de façon confuse.). L'observateur dans son action devait éviter de dévier ou de bloquer la démarche des élèves.

Pour l'analyse de la tâche, nous avons disposé des feuilles de travail des élèves, de l'enregistrement des communications verbales et des notes prises par les observateurs. Signalons que chaque groupe de travail disposait d'un texte de l'énoncé, d'une seule feuille de travail (servant également de brouillon, en vue de recueillir toutes les traces écrites).

CHOIX DES CARACTERISTIQUES DE LA TACHE.

1. Les variables.

Nous entendons par variable toute caractéristique de la tâche dont une variation entraînerait une modification de comportements de l'élève. Les changements de valeurs auront, dans ce cas, pour effet de provoquer des changements de procédures de l'élève.

Pour une valeur d'une variable donnée une procédure peut être adéquate ou non. Le choix de la procédure la plus adéquate se trouve donc sous la commande des variables.

Nous distinguerons les variables liées aux outils et aux conditions de travail de celles liées au problème. Si les unes favorisent l'interaction entre les élèves d'un même groupe, les autres favoriseraient l'apparition de la plupart des procédures. Une autre variable non moins importante est le niveau de la classe des élèves interrogés.

On distingue trois catégories de variables : les variables liées aux conditions et aux outils de travail-les variables liées au problème-les variables liées aux niveaux des classes.

1a.Les variables liées aux conditions et aux outils de travail.

• Travail en binôme ;
• Une seule feuille de papier par binôme ;
• Rédaction d'un texte unique par binôme.

La modalité de travail à deux fournit un matériau d'étude riche grâce aux échanges verbaux entre élèves. Jouant sur "l'interaction sociale", nous espérons créer un contexte favorable aux débats de validation entre élèves de points de vue différents (**Balacheff N., Laborde C.**, 1985). Autrement dit l'interaction entre les élèves (d'un même groupe) permettrait d'activer la recherche et d'arriver à une meilleure formulation, au sens où, si les deux partenaires ne seraient pas d'accord sur une formulation, ils la modifieraient jusqu'à la rendre plus claire. Pour favoriser davantage cette interaction nous avons demandé la rédaction d'un texte unique avec une seule feuille de papier disponible par binôme, ce qui permettrait aux élèves d'un même groupe, de confronter leurs idées, de mettre éventuellement en défaut les arguments insuffisants de l'un et de les améliorer, enfin de prendre une décision (juste ou erronée) pour la rédaction du problème.

La demande d'un "texte rédigé à l'intention d'autres élèves" (une situation de communication "invoquée") est l'un des facteurs les plus importants. Les élèves seront confrontés à la tâche de formuler un message qui doit être compréhensible par d'autres élèves, donc suffisamment clair pour ces derniers, rédacteurs du message. Pour s'assurer que leur message est bien compréhensible, ils tenteront de corriger, de le dépouiller de toute ambiguïté et de le reformuler (**Brousseau**, 1986). Ils chercheront d'expliciter davantage la démarche à suivre pour résoudre le problème et de ce fait nous pourrons peut être recueillir des informations sur la représentation qu'ils se font du problème. On s'attend à ce que l'explicitation à laquelle ils s'adonnent entraîne une évolution des procédures (**Laborde C.**, 1982).

1b.Les variables liées au problème.

• Rédaction d'un texte qui demande une méthode générale indépendante des exemples numériques.
• Situation affine non proportionnelle;
• Tableau dans lequel l'écart entre deux valeurs consécutives est constante ;
• valeurs entières des nombres qui mesurent les longueurs ;
• Valeurs décimales des nombres (à un chiffre après la virgule) mesurant les masses;

• La présence du "zéro" (comme origine des masses) et de la valeur correspondante non nulle (520 comme origine des longueurs);
• L'absence de valeur "un" parmi les masses données dans l'énoncé.

La première variable (rédaction d'un texte...) interviendrait au niveau de l'aspect "formulation" du problème et du langage employé (langage naturel ou expression symbolique). Elle pourrait également influencer les procédures envisagées, et même provoquer une évolution vers des procédés analytiques. Les autres variables concernent surtout les "procédures de calcul".

Certaines démarches (penser que la relation entre masses et longueurs est une relation de proportionnalité) aboutiront à des contradictions dont le franchissement nécessite une bonne représentation du problème de la part de l'élève. La plus évidente serait la résolution directe avec le couple (0;520). Cette évidence que nous soulignons ici peut ne pas paraître comme telle pour l'élève. Cela dépend de la représentation qu'il se fait du nombre "zéro". S'il le considère comme un "rien" (qui ne joue aucun rôle, un cas à part), il l'évitera tout simplement en choisissant un autre couple. Ce comportement des élèves est favorisé par le fait qu'on les fait travailler le plus souvent sur des situations proportionnelles et rarement sur celles qui nécessite la résolution d'au moins une opération pour mettre en évidence les grandeurs proportionnelles.

La présentation des données sous la forme d'un tableau pourrait amener les élèves à penser à une situation de proportionnalité. Cette idée sera d'autant plus forte dès qu'ils auront constaté les écarts constants des valeurs successives des masses et des longueurs. Ce qui revient à dire que "l'écart constant" pourrait être utilisé comme une stratégie pour reconnaître une situation de proportionnalité.

La différence de nature entre les valeurs des masses et des longueurs (valeurs entières pour, décimales pour les autres) amèneront probablement les élèves à faire des conversions (exprimer les masses en grammes) pour obtenir des valeurs entières des masses. En fonctionnant sur des entiers, ils se sentiront ainsi à l'abri de certaines erreurs ou de difficultés de calcul. Ils espèrent alors éviter les difficultés d'opérer sur des décimaux.

L'absence de la valeur unitaire de la masse parmi les données du problème pourrait défavoriser l'emploi de la procédure "recours à l'unité". Même si les élèves la calculaient, elle ne serait pas aussi attractive que si elle était donnée au départ. C'est-à-dire que son calcul n'implique pas obligatoirement une utilisation rationnelle de cette valeur unitaire de la part de l'élève. Elle apparaîtra probablement comme un cas isolé parmi d'autres.

1c. La variable liée aux niveaux scolaires des élèves.

Les deux niveaux scolaires (6e et 3e du collège français) correspondrait au stade "des opérations formelles" dans le développement de la notion de proportionnalité de **Nœlting** (1980). Nous supposons que les élèves de 6e dont la moyenne d'âge est de 12 ans se situent au début du stade et ceux de 3e (âgés de 15 ans en moyenne) y évoluent déjà.

Le choix des classes extrêmes (6ème et 3ème) permettra d'étudier l'évolution des méthodes de résolution d'un niveau à un autre plus élevé. Il permettra également de comprendre le mode de traitement que font les élèves des différentes propriétés apprises sur la notion de proportionnalité.

Certaines procédures (produits d'un enseignement plus élaboré) avec usage d'expressions symboliques pourront être observées chez les élèves de 3e. L'emploi d'expressions familières (langue naturelle) seraient certainement plus fréquent chez les plus jeunes.

2. Analyse des procédures de résolution possibles.

Nous distinguerons deux aspects dans les procédures : l'aspect calcul procédural et l'aspect de généralisation. Les deux interviennent certainement dans la mise en place d'un moyen de résolution, mais ils n'interviennent pas de la même façon. Le premier, que nous nommons "procédure de calcul", concerne les démarches par lesquelles les élèves interprètent et traitent les données du problème. Il permet de dégager les éléments pertinents (ou non) susceptibles d'intervenir dans la généralisation. L'élève pourrait s'en servir pour vérifier certaines propriétés qu'il estime liées à la situation. Cet aspect ne nécessite pas une formulation, il peut apparaître sous forme de calcul (qui peut être exécuté par écrit ou oralement). Le second aspect "procédure de généralisation" est formulé; il porte sur les moyens mis en œuvres par l'élève pour donner une généralisation (juste ou erronée) de la solution proposée.

2a. Procédures de calcul.

A partir des recherches déjà effectuées nous tentons de décrire les procédures de résolution possibles.

• La résolution exige d'abord un travail préliminaire très important qui consiste à passer d'une situation affine à une situation proportionnelle. Les élèves doivent confectionner une correspondance entre masses et allongements de l'élastique qui peut prendre la forme d'une liste ou d'un tableau.

masses en kg	0,4	0,8	1,2	1,6
allongement en mm	27	54	81	108

L'élève pourra rajouter une colonne supplémentaire (contenant l'inconnue) selon sa procédure. Ce tableau n'est pas obligatoirement dressé par l'élève, il peut donner une liste dans laquelle il mettra en correspondance masses et allongements. Le tableau réduit à deux lignes et deux colonnes serait de la forme :

masses	a	m
allongements	b	y

où (m,y) est la colonne de l'inconnue y, et (a,b) une quelconque des autres colonnes

Ce tableau réduit n'est pas lui aussi obligatoirement confectionné par l'élève. Seules les valeurs qu'il utilisera pourraient s'arranger sous forme d'un tel tableau.

• **Résolution** : L'élève peut s'engager vers l'une ou l'autre des voies suivantes :

_ R, **procédure de la règle de trois** : D'après Dupuis, son utilisation nécessite le respect de certains rites : présentation de la solution en trois lignes, la dernière conduisant au résultat, emploi de mot clefs (**Dupuis C., Pluvinage F.**, 1981). Par exemple :
* l'allongement produit par une masse (a) est (b) ;
* " " " de 1kg vaut (a) fois moins : b/a
* " " " m vaut m fois plus : (bxm)/a

Dans la pratique, l'élève résume le plus souvent la règle de trois à la dernière ligne. Il pose le rapport (bxm)/a ou (mxb)/a , calcule le produit bxm ensuite son quotient par a.

_ C, **procédure produits en croix** : Il s'agit de former une équation en utilisant l'égalité dite des "produits en croix".

$$\begin{array}{ccc} a & & m \\ & \times & \\ b & & y \end{array} \qquad a \times y = b \times m$$

Ces deux premières procédures apparaissent comme des "recettes" apprises à l'école; elles sont surtout liées à une pratique économique.

_ P, **procédure des rapports proportionnels** : Elle s'illustre comme suit :

a	m
b	y

$$\frac{y}{m} = \frac{b}{a} \qquad \text{ou} \qquad \frac{y}{b} = \frac{m}{a}$$

∗ La procédure basée sur le premier rapport permet de déterminer le rapport de proportionnalité. On le désignera sous le nom de P_1.

∗ La procédure basée sur le second rapport détermine un opérateur scalaire, mais que l'élève ne reconnaît pas comme tel. Elle sera désignée par P_2

_ O, **procédure du calcul d'un opérateur** : C'est la procédure de détermination d'un opérateur (opérateur fonction - opérateur scalaire).

∗ O_1, **opérateur fonctionnel** : Elle tient compte du fait que c'est le même opérateur qui permet de passer de a à b et de m à y.

$$\begin{tikzcd} a \arrow[d, bend right, "\times\frac{b}{a}"'] & m \arrow[d, bend left, "\times\frac{b}{a}"] \\ b & y \end{tikzcd}$$

ce qui permet le calcul $y = m \times \frac{b}{a}$

∗ O_2, **opérateur scalaire** : Elle exploite les propriétés de l'application linéaire qui n'est pas nécessairement explicitée par l'élève. C'est le même opérateur qui permet de passer de a à m et de b à y.

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, bend left, "\times\frac{m}{a}"] & m \\ b \arrow[r, bend right, "\times\frac{m}{a}"'] & y \end{tikzcd}$$

ce qui permet le calcul $y = b \times \frac{m}{a}$

_ U, **procédure recours à l'unité** : Elle consiste à calculer mais en précisant qu'il s'agit de l'image de 1.

Même si le recours à l'unité produit un opérateur, il est nécessaire de ne pas le confondre avec la procédure O, "calcul d'un opérateur". Dans le premier cas l'élève calcule de façon explicite l'image de 1 ("si je connais pour 1 je connais pour tout"; dit par un élève dans une situation proposée par Ch. Morin; 1986).

Tandis que dans le second cas, l'élève cherche un opérateur qui lui permet de passer d'un élément d'un espace à l'élément correspondant de l'autre espace sans faire la moindre allusion à l'unité.

_ d, **décomposition additive** : L'élève décompose le nombre mesurant la masse considérée en une somme de nombres dont il connaît (ou sait calculer) les longueurs correspondantes à chacun des termes.
Cette procédure relève de la propriété $f(x+x')=f(x)+f(x')$ de l'application linéaire.

_ L, **procédure fonction linéaire** : L'allongement y est une fonction linéaire de la masse m :

$y = k.m$ où k est un réel
On détermine k pour $m = a$ et $y = b$
Ensuite $y=(b/a)xm$ où $k = b/a$

_ A, **procédure de la fonction affine** : La longueur y est une fonction affine de la masse m :

$y = k.m + q$ où k et q sont des réels
On détermine k et q en résolvant un système de deux équations à deux inconnues.

Remarque : On peut s'attendre à ce que ces deux dernière procédures qui exigent une connaissance plus élaborée ne soient certainement rencontrées qu'avec des élèves de 3ème ; Et que même chez ces derniers elles soient les moins nombreuses.

Nous regrouperons les procédures selon deux classes de procédures (distinction déjà faite par **Vergnaud** et adoptée par **Ch. Morin** dans "étude du comportement d'élèves du second cycle devant un problème lié à la proportionnalité") :

- les procédures analogiques où l'on exprime une relation entre des éléments d'un même espace qu'on rapporte ensuite aux éléments correspondants de l'espace associé;

- et les procédures analytiques par lesquelles on exprime une relation qui est applicable à tout couple d'éléments associés des deux espaces.

Ce qui nous amène à la classification dans le tableau qui suit :

Tableau I

ANALOGIQUES		ANALYTIQUES
- P2, rapports proportionnels (scalaire)		Niveau 1. - P1, rapports proportionnels (fonctionnel) - O1, opérateur fonctionnel
- O2, opérateur scalaire	U, recours à l'unité	Niveau 2. - R, règle de trois - C, produit en croix
- d, décomposition additive		Niveau 3. - L, fonction linéaire - A, fonction affine

Nous distinguons dans la classe des procédures analytiques trois niveaux correspondant à une hiérarchie des outils apportés par l'enseignement. Le premier niveau est lié au coefficient de proportionnalité. Le second apparaît comme un outil de calcul mis à la disposition de l'élève dont la bonne manipulation donne à coup sûr le résultat escompté. Et le troisième lié lui aussi au coefficient de proportionnalité, demande un niveau de connaissance plus élevé chez l'élève.

Nous estimons qu'il est raisonnable d'adopter une position intermédiaire entre la classe procédures analogiques et celle des procédures analytiques pour la procédure "recours à l'unité" car elle pourrait appartenir à chacune des deux classes puisque pouvant s'interpréter :

- Comme une procédure analogique

$$\begin{array}{c} 1 \xrightarrow{\times m} m \\ \hline u \xrightarrow[\times m]{} y \end{array}$$

- Ou comme une procédure analytique

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[d, "\times u"'] & m \arrow[d, "\times u"] \\ u & y \end{tikzcd}$$

2b. Procédures de généralisation.

On peut penser qu'un processus de généralisation passe par l'élaboration d'une règle, d'un théorème, d'une formule,... valable pour un ensemble d'objets donnés.

Vu les niveaux des classes prévues pour l'expérimentation, on ne peut s'attendre à une procédure traitant le problème dans sa globalité.

Nous prévoyons pour cette phase de la résolution du problème deux catégories de procédures : les méthodes traitant des cas particuliers et les méthodes générales.

a°) **Méthodes traitant des cas particuliers** : Il en existe deux sortes :

• **"Exemple prototypique"** : Il s'agit de traiter des cas isolés sans se poser le problème de généralisation. L'élève se donne une masse et se propose de trouver la longueur correspondante. Il pourrait tout de même fonctionner sur plusieurs exemples: ce qui ne signifie pas pour autant un souci de généralisation.

Un autre cas de figure est le suivant : Le fait que les masses soient mesurées par des nombres à un seul chiffre décimal, amènerait l'élève à déterminer toutes les masses mesurées par des nombres à un chiffre après la virgule et à calculer les longueurs correspondantes. C'est la "détermination exhaustive des décimaux à un chiffre après la virgule". L'élève se limite à ces valeurs non pas qu'il ignore d'autres valeurs (décimales), mais il se conforme à une situation créée par le contexte du problème.

• **"Exemple générique"** : Là également l'élève fonctionne sur un cas particulier, mais à la différence du premier, il se pose le problème de généralisation. En fonctionnant sur un (ou plusieurs) exemple(s) numérique(s), il s'assure que la méthode utilisée peut être adaptée à tout autre exemple. Pour résoudre alors le problème de généralisation, il poserait tout simplement "on procède ainsi pour n'importe quel cas". L'exemple ainsi traité est mis pour une famille de cas répondant à la situation.

b°) **"Méthode générale"** : On distingue deux sortes. La première consiste à poser une formule et la seconde tente à dégager la suite d'opérations à effectuer pour passer d'une masse quelconque à une longueur.

Types de langage-Expressions

Il faut distinguer trois formes d'expression chez les élèves. La première certainement la plus fréquente consiste à n'utiliser la "langue naturelle" dans l'expression de la démarche à suivre, la seconde est à cheval sur la première et les expressions symboliques et la dernière est l'utilisation des expressions symboliques.

- **Type I, langue naturelle** : Il se manifestera probablement chez les élèves de 6ème. Il consiste à décrire une suite d'actions successives ou à produire une explication de type statique des différentes phases nécessaires à la résolution du problème.

Exemple avec le recours à l'unité :
On calcule l'allongement que fait l'élastique pour une masse de 1kg :
27 : 0,4 = 67,5.
On multiplie la masse par 67,5 , on rajoute ensuite 520 pour obtenir la longueur que fait l'élastique.
Les calculs sont données par des expressions numériques mais la procédure à suivre est exprimée uniquement en langue naturelle.

- **Type II** : Il est intermédiaire entre le langage naturel et le langage symbolique. La substitution des lettres aux inconnues n'est pas obligatoire. Le résultat est énoncé sous une forme qui rappelle une "règle" ou une "formule" ou encore un "théorème".

Exemple avec les rapports proportionnels, P_1
allongement = 67,5 x masse
longueur = 520 + allongement

- **Type III, expression symbolique**: Les inconnues sont désignées par des lettres. On cherche alors à établir une relation en énoncé symbolique entre ces inconnues.

Remarque : Les deux premiers types de langage ne sont pas à confondre. Le premier est plus spontané chez l'élève tandis que le second est le fruit de l'enseignement dans certaines matières telles que la physique, la biologie, etc...

ANALYSE DES DONNÉES RECUEILLIES DANS L'EXPÉRIMENTATION.

Pour la plupart des élèves le problème de formulation ne s'est pas posé pas a priori. La démarche la plus courante a consisté à chercher sur des valeurs numériques et à procéder ensuite à la formulation du résultat. Ceci nous a amené à distinguer les procédures de calcul d'une part et les procédures de formulation d'autre part.

Rappelons que le matériau d'étude a été les résolutions d'élèves (échanges verbaux, calculs effectués) et le message final réalisé.

Evolution générale des procédures de calcul.

Les recherches sur des valeurs numériques sont faites à l'aide de procédures de calcul qui sont des moyens mis en œuvre (une opération ou une suite d'opérations) pour aboutir à une résolution (correcte ou erronée) du problème. Ces procédures de calcul dégagées ici n'ont pas été nécessairement explicitées en tant que telle par les élèves. Elles ont eu pour but de dégager tous les éléments susceptibles d'être utilisés dans la formulation.

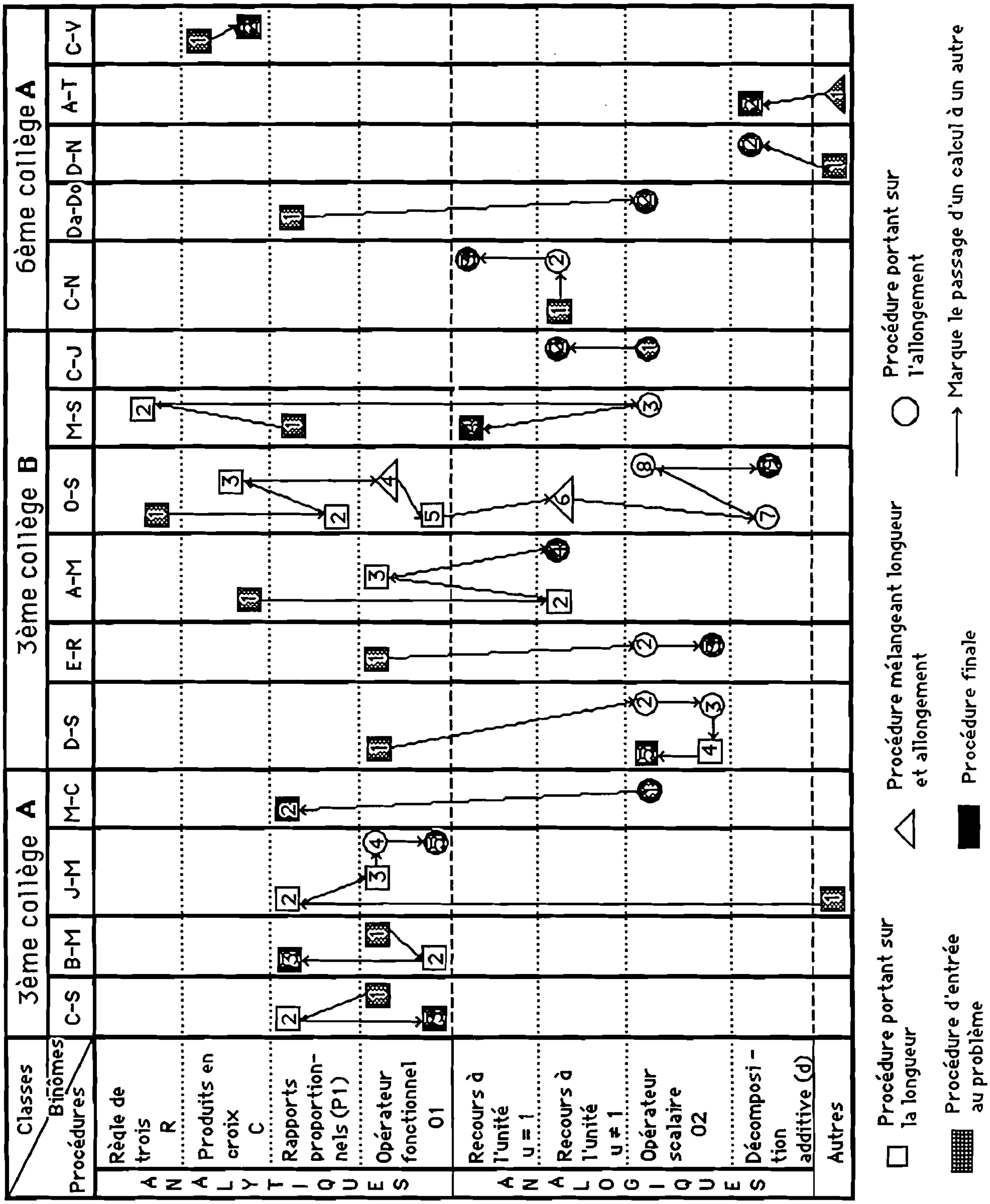
Nous avons répertorié tout au long du travail des élèves 51 calculs de longueurs et d'allongements; ce qui correspond au nombre total d'apparition de procédures de calcul utilisées par l'ensemble des binômes. La distribution de ces procédures entre les deux grandes classes de procédures (analogique et analytique) est presque équilibrée. Il n'existe pas de différence significative d'emploi entre les deux classes de procédures. Nous avons pu remarquer 25 emplois de procédures analytiques et 23 emplois de procédures analogiques.

Trois autres procédures n'ont pas pu être classées. Elles ont porté sur des valeurs extrêmes (1,6kg pour les masses et 520mm ou 628mm pour les longueurs) :

628 : 16 et 628 : 520 (opérations non effectuées)
520 x 1,6 = 832
27 + 0,4 = 27,4 et 520 : 27,4 (opération non effectuée).

Le tableau suivant donne l'évolution générale des procédures de chaque binôme:

Tableau II



La classification suivante des "calculs" effectués nous permet d'apprécier les différences des nombres d'apparition des procédures analytiques et des procédures analogiques dans chacune des classes concernées : "calculs erronés et calculs pertinents" d'une part et "calculs d'entrée au problème et calculs finals" d'autre part. Ici, nous désignons par "calcul" les opérations effectuées pour déterminer une longueur ou un allongement quelconque que les élèves se proposent de trouver.

-**"calculs erronés et calculs pertinents"** : Nous avons appelé "calcul erroné ou résolution erronée" toute détermination incorrecte d'une longueur ou d'un allongement, dans le cas contraire, le calcul est dit pertinent. Nous soulignons tout de même que la pertinence d'un calcul ne correspond pas nécessairement à une résolution correcte (ou entière) du problème.Parmi les 51 calculs effectués 39 sont erronés et 12 sont pertinents.

* Les **"calculs erronés"** portent le plus souvent sur un calcul impliquant directement masses et longueurs; ce qui fait penser que les élèves supposent implicitement la proportionnalité entre masse et longueur, on en a observé 30 cas. Les procédures les plus utilisées ont été des procédures analytiques. Il y a eu 22 cas d'emploi de procédures analytiques et 6 cas seulement employant des procédures analogiques.

Parmi les résolutions portant sur l'allongement , il y en avait 5 qui faisaient intervenir des procédures analogiques et une seule faisait appel à l'analytique.

Exemple : binôme, Béatrice (B) - Marque (M) ; 3ème Collège A.
Dans cet exemple le binôme traite le problème comme s'il y avait proportionnalité entre masse et longueur.

Les élèves cherchent le nombre qui permet de passer de la ligne des masses à celle des longueurs et fournissent rédaction suivante :
547 : 0,4 = 1367,5
1367,5 X 0,4 = 547
1367,5 X 0,8 = 1274

X 1367,5

M en kg	0,4	0,8	1,2
L en mm	547	1274	

ça marche pas pour tout.

* Les **"calculs pertinents"** portent sur des cas particuliers. Ce sont des calculs donnant lieu à des déterminations correctes de longueurs que les élèves se proposent de trouver.Ils peuvent, par exemple, considérer une masse de 0,32kg et se proposer de calculer la longueur correspondante. 12 calculs ont été effectués au total; un seul a été résolu à l'aide d'une procédure analytique et le reste a été traité avec des procédures analogiques. A ce niveau, on peut constater un comportement favorable à l'emploi des procédures analogiques. On pourrait penser que les élèves emploient surtout des procédures analogiques lorsqu'ils cherchent à donner du sens au problème.

Exemple : binôme, Daniel (Da)-Domenico (Do), 6ème Collège A.
Le binôme remarquant la différence (0,4kg) des masses successives et des longueurs successives (27mm), décide de trouver les longueurs pour les différentes masses suivantes : 1kg ; 1kg400 et 0,5kg (ce dernier est jugé plus dur).

Le procédé de calcul utilisé peut s'interpréter de la façon suivante :

$1 = 0,8 + 0,2$
donc $L(1) = L(0,8) + Al(0,2)$ et $Al(0,2) = Al(0,4) : 2$
$1,4 = 1 + 0,4$
donc $L(1,4) = L(1) + Al(0,4)$
$0,5 = 0,4 + 0,1$
donc $L(0,5) = L(0,4) + Al(0,1)$ et $Al(0,1) = Al(0,4) : 4$

- **"calculs d'entrée au problème et calculs finals"** : Nous avons essayé ici de suivre l'évolution des procédures utilisées par chacun des binômes. Les calculs d'entrée au problème indiquent les premières réactions des élèves; ils nous permettent de déceler la classe de procédures qui vient à l'esprit des élèves au moment où ils prennent leur première décision de calcul. Les calculs que nous nommons par "calculs finals" sont les derniers essais de élèves au moment où nous arrivons en fin de séance. D'autres calculs auraient pu éventuellement apparaître si les élèves avaient pu continuer, puisque rares sont les binômes qui ont rendu leur travail avant la fin de la séance.

* **Calculs d'entrée au problème** : parmi les 15 calculs effectués 12 se rapportaient à un calcul direct sur la longueur (comme s'il y avait proportionnalité entre masse et longueur), deux portaient sur l'allongement et un mélangeait longueur et allongement.

Deux des trois binômes qui n'ont pas cherché directement sur la longueur se ramènent à celle-ci dès les deuxièmes calculs; il s'agit des binômes M-C (3ème Collège A) et A-T (6ème Collège A). Le troisième binôme, C-J du 3ème Collège B, arrive à une résolution correcte du problème.

Le recours direct aux longueurs est apparu comme une démarche nécessaire pour la résolution du problème. Les élèves ont investi des outils appris sur la proportionnalité à la situation problème comme si, elle était, elle aussi, une situation de proportionnalité. Cet investissement passe par une application massive des procédures analytiques; il ressemble à une imitation des pratiques usuelles de la classe pour des exercice d'apparence extérieure semblable. On a observé 9 emplois de procédures analytiques contre 3 emplois de procédures analogiques.

* **calculs finals** : à ce niveau l'usage des procédures analogiques devient important; il dépasse largement celui des procédures analytiques (10 analogiques contre 5 analytiques). En même temps le recours aux allongements devient important en nombre; 7 calculs directs sur la longueur ont été effectués contre 8 calculs faisant appel à l'allongement. Ce résultat peut laisser croire que lorsque les élèves se font une bonne représentation du problème, ils utilisent plutôt des procédures analogiques.

CONCLUSION SUR L'ÉVOLUTION DES PROCÉDURES DE CALCUL.

Il est remarquable que les procédures analytiques soient celles qui apparaissent le plus dans les résolutions erronées et dans les "calculs d'entrée au problème". L'importance du nombre d'apparition de ces procédures (voir tableau 2) expliquerait que les élèves cherchent une résolution directe du problème en appliquant systématiquement des propriétés liées à la notion de proportionnalité. C'est après échec qu'ils se ramènent à des procédures analogiques. Ce qui a pu accroître le nombre de "calculs pertinents". Ce comportement voudrait certainement dire que les élèves aboutissent davantage à une résolution correcte dans les procédures analogiques que dans les procédures analytiques. On pourrait penser que lorsqu'ils se font une bonne représentation du problème, ils se détournent des raisonnements analytiques et utilisent plutôt des raisonnements qui relèvent de l'analogie.

Les procédures "opérateur fonction" et "opérateur scalaire" ont été celles qui sont apparues le plus fréquemment. L'une a été utilisée dans 12 calculs et l'autre dans 11. Une différence de comportement que nous avons pu constater chez les élèves sur ces deux procédures est qu'ils aboutissent davantage à un calcul correct lorsqu'ils utilisent un opérateur scalaire. En effet sur 12 calculs utilisant l'opérateur fonction un seul a été pertinent. Par contre parmi 11 calculs effectués à l'aide de l'opérateur scalaire on retrouve 5 pertinents.

La procédure "recours à l'unité u=1" a été très peu utilisée. Elle apparait deux fois seulement. Nous avons constaté l'emploi de deux autres unités (u=100 et u=0,1).

L'emploi de la procédure "recours à l'unité u≠1" a été plus fréquent que celui du "recours à l'unité u=1".

Les moyens de formulation et de généralisation

La formulation des résultats obtenus par des procédures analogiques ne và pas sans problème. Les difficultés de généralisation de ces résultats n'ont pas amené les élèves à revenir sur leurs procédures de calcul et d'envisager d'autres qui seraient surtout analytiques (réaction qu'on escomptait produire avec le problème proposé). Mais des stratégie développées par les élèves ont permis de contourner les difficultés de généralisation auxquelles ils ont été confrontés. 3 moyens de généralisation utilisés par 11 binômes ont été mis en œuvre. Il s'agit des procédures : -"Exemple(s) prototype(s)" - "Exemple générique" - "Méthode générale".

-"Exemple(s) prototypique(s)": les élèves abordent le problème comme s'ils avaient l'intention de faire un traitement complet de tous les cas envisageables. Conscients de l'importance du nombre des cas, ils en examinent quelques uns sans prétendre à une généralisation. Le nombre de binômes ayant utilisé cette procédure est de 4.

Exemple : binôme, Ana-Thierry (A-T), 6ème Collège A.

On a compris que dans la première ligne ont n'aller de 0,4 en 0,4 c'est à dire que
0,4 + 0,4 = 0,8 + 0,4 = 1,2
0,4 = 547 donc on ajoute pour 0,5
1 = 548 0,7 = 550
Ex : entre 0,5 et 0,7 il y a 0,2 de différence donc 248 + 2 = 550

- "Exemple générique" : à la différence de la précédente procédure, les élèves posent implicitement le problème de la généralisation. L'exemple traité est un représentant d'un ensemble de cas répondant à la question (*on procède ainsi pour tout autre cas*). 4 binômes ont eu recours à cette procédure.

Exemple : binôme, Olivier-Samir (O-S), 3ème Collège B.

Tu sais que pour une masse de 0,4kg l'allongement de l'élastique est 547mm et tu sais aussi qu'à chaque fois qu'on augmente ou que l'on diminue cette masse de 0,4kg, l'allongement de l'élastique augmente ou diminue (respectivement) de 27mm donc tu peux trouver n'importe quel allongement tant que la masse est inférieure à 1,6kg.
Ex : (0,4kg -----> 547mm) par hypothèse ci-dessus.
J'essaie de trouver l'allongement pour une masse de 1kg.
1kg = 0,4 + (1,5 x 0,4) donc l'allongement est de :
547 + (1,5 x 27) = 547 + 40,5 = 587,5

-"Méthode générale" : les élèves essayent de dégager la suite des opérations à faire pour passer d'une masse quelconque à une longueur, ou bien, ils posent une formule qui rend compte de la procédure. Cette procédure a été utilisée par 3 binômes.

Exemple: binôme, Cédric-Nathalie (C-N), 6ème Collège A.

Pour 1kg, la longueur de l'élastique est de 587,5mm . Pour trouver la longueur de l'élastique avec d'autres masses, il faut soustraire 520 à 587mm (erreur : 587,5mm au lieu de 587) ce qui donne 67,5mm. Il faut ensuite multiplier 67,5 par la masse en kg. Il faut ensuite, additionner se résultat à 520mm pour trouver le résultat de la longueur de l'élastique.

Ces binômes ne sont pas arrivés à une généralisation. Ils n'ont pas pu reconnaître les grandeurs proportionnelles mises en jeu dans le problème. Ils ont tous (sauf un, qui est revenu à la longueur après un travail sur l'allongement) cherché sur la longueur durant tout le temps de travail.

Une observation des démarches permet de mettre en lumière les causes de l'apparition de certaines procédures de généralisation et de connaître en même temps leur nature.

La résolution d'un cas particulier est en général suivie de celle d'un autre et elle nécessite chacune une procédure de calcul. Lorsque la procédure utilisée dans le premier exemple est maîtrisée, elle est reconduite pour le second exemple et ainsi de suite. Les exemples se multiplient, ils vont des plus simples aux plus complexes. On assiste alors à une mise à l'épreuve (ou à un test) de la procédure; ce qui, augmente en cas de réussite, la confiance à accorder à cette dernière. On peut dire que les élèves élargissent le domaine de vérification de la procédure; ceci correspond à un élargissement du domaine des cas particuliers traités. Cette situation conduit le plus souvent à une généralisation de type "Exemple générique" ou de type "Méthode générale".

Deux des trois binômes qui ont utilisé une méthode générale comme moyen de généralisation ont eu de tel comportement. Il s'agit des binômes J-M (3ème collège A) et E-R (3ème Collège B). Les de calcul utilisées par les deux binômes ont été celle du calcul d'un "opérateur fonctionnel" pour le premier et celle du calcul d'un "opérateur scalaire" pour le second.

Le troisième binôme, C-N, 6ème Collège A, a utilisé des procédures de calcul très proches : le "recours à l'unité u=0,1" et le "recours à l'unité u=1" (On a eu à remarquer chez ce binôme une confusion entre 0,1 et 1).

Quatre binômes ont utilisé "l'exemple générique" pour généraliser. L'un d'eux (binôme, C-J, 3ème Collège B) a utilisé pendant leur travail deux procédures de calcul semblables; "l'opérateur scalaire" et puis le "recours à l'unité u=100". Un autre, le binôme O-S (3ème Collège B), a utilisé d'abord la "décomposition additive" ensuite "l'opérateur scalaire" et revient après à la "décomposition additive".

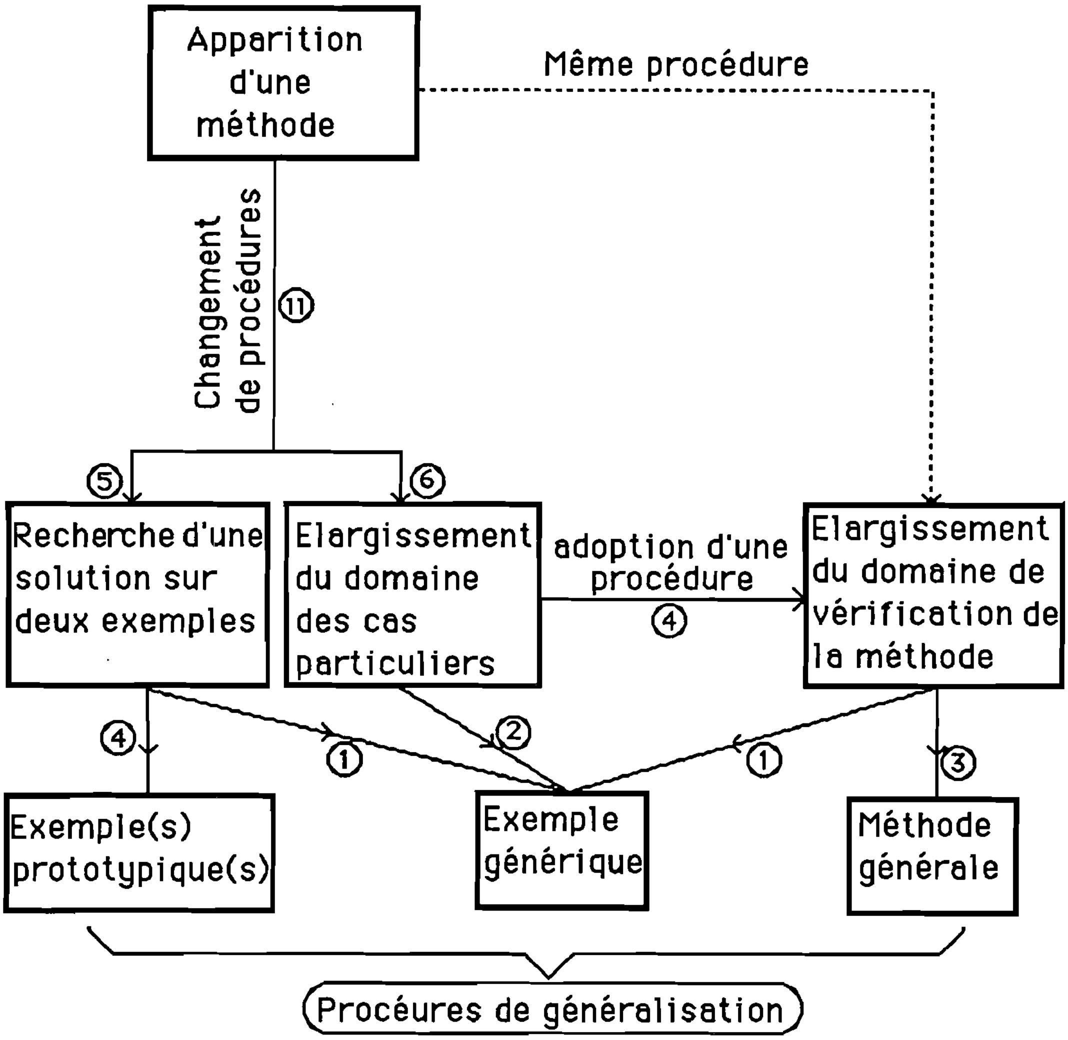
Dès qu'une procédure est maîtrisée, elle est adoptée et une généralisation de la forme "Exemple générique" ou "Méthode générale" peut apparaître.

En nous référant à ce que nous venons d'annoncer, nous pourrions faire l'hypothèse que lorsque la procédure utilisée dans un exemple précédent n'est pas maîtrisée, on pouvait observer un changement de procédure pour un nouvel exemple. Avec la diversité des exemples et des procédures une généralisation n'est pas simple. Le type de généralisation qui pourrait alors apparaître serait la procédure "Exemple(s) prototype(s)".

Il n'en a pas été ainsi pour les quatre binômes qui ont utilisé "l'exemple prototype" pour généraliser. Ils n'ont eu à employer chacun que deux procédures de calcul tout au long de leur travail. Ce qui signifie que la schéma évoqué ci-dessus ne convient pas pour décrire exactement la démarche qu'ont eue ces élèves. Leur comportement pourrait s'expliquer par le fait qu'ils s'en tiennent généralement au premier raisonnement le plus plausible et cherchent rarement au delà de ce raisonnement.

Le schéma suivant nous donne les voies possibles pour les différentes formes de généralisation:

Schéma 3



* Les chiffres encerclés représentent le nombre des procédures de calcul utilisées pour chaque étape.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Examen de manuels scolaires français de 6ème

L'enseignement actuel en France est fait de manière à mettre l'accent sur le coefficient de proportionnalité. Comme le présentent les ouvrages scolaires de 6ème, la notion de proportionnalité est le plus souvent introduite à partir de suites finies. La relation existant entre les suites (passage de l'une à l'autre par multiplication par une constante ou par division par une constante.) définit la notion.

Les critiques que nous formulons sur les manuels scolaires que nous avons examinés sont de deux sortes :

la première est que dans les situations de proportionnalité qu'ils proposent, ils mettent en évidence le coefficient de proportionnalité, mais ne le rapprochent pas de la valeur unitaire. Ce qui peut produire un blocage chez les élèves lorsqu'ils doivent donner du sens à ce coefficient. Les élèves ne sauront le définir qu'à partir de l'utilisation qu'on en fait (permettre le passage d'une suite à une autre.).

- La seconde porte sur les exercices. Les exercices proposés sont de deux natures :

• La première catégorie d'exercices porte sur des suites proportionnelles de plus de deux termes. Un tableau est utilisé pour représenter des suites. Ces exercices servent à familiariser les élèves avec le calcul et l'utilisation du coefficient de proportionnalité. Un risque est qu'ils peuvent favoriser chez les élèves des automatismes plutôt que de leur donner un moyen efficace pour analyser les situations de proportionnalité.

Nous avons pu remarquer que les exercices visant à éviter les applications "stéréotypées" des propriétés de la proportionnalité sont rares. Il s'agit d'exercices qui nécessitent au préalable un calcul pour dégager les grandeurs proportionnelles.

• La seconde concerne la détermination d'un terme manquant (la "quatrième proportionnelle"). La plupart des exercices portant sur cette situation favorise l'application de la règle de trois et des produits en croix (appelés croix magique par le manuel, **Faire des mathématiques, A. Deledicq, C. Lassave; 1986**), car le calcul d'un opérateur (scalaire ou fonction) n'est pas simple. Ces deux procédures ne donnent guère du sens au coefficient de proportionnalité; elles visent à faciliter les opérations dans un cadre purement numérique. En plus, il y a davantage d'exercices où le calcul d'un opérateur scalaire est plus simple que celui du coefficient de proportionnalité.

Les résultats généraux

La situation conduite n'a pas eu l'effet escompté (l'évolution des procédures des élèves vers des procédures analytiques). En effet on a pu observer chez les élèves :
- la résolution directe du problème à l'aide de procédures analytiques au début du travail, d'où l'importance du nombre d'apparition de ces procédures;
- l'importance des procédures analogiques pour donner du sens au problème en un second temps.

Les élèves ne se sont pas vraiment posé les problèmes de formulation et de généralisation. Ils ont surtout cherché sur des valeurs numériques et tenté ensuite une formulation du résultat obtenu.

Retour sur l'expérimentation

Pour que les élèves arrivent au terme d'une solution correcte, plusieurs conditions devaient être remplies:
- La reconnaissance de l'absence de proportionnalité entre longueurs et masses;
- La maîtrise des deux grandes classes de procédures (analytique et analogique). Il était important que les élèves sachent réaliser des calculs pertinents en utilisant l'une ou l'autre des catégories, afin de pouvoir passer d'une catégorie à l'autre et de comparer leur performance. L'absence de maîtrise des propriétés de la proportionnalité a empêché le retour sur les procédures que l'on pensait a priori privilégié par la situation de formulation;
- La nécessité de savoir distinguer longueur et allongement d'une part et la masse (0,4kg) et la variation de la masse (0,4kg) d'autre part.

Avec la réalisation de ces conditions, on pouvait espérer voir les élèves se ramener à des procédures analytiques après échec (ou difficulté éventuelle) dans la formulation d'une procédure analogique. Ceci devait les amener à reprendre les calculs déjà effectués en employant une procédure analytique et à tenter une nouvelle formulation. On est donc placé devant une situation paradoxale : pour permettre l'évolution des procédures des élèves de l'analogique vers l'analytique, il faudrait qu'ils maîtrisent déjà suffisamment l'analytique.

Perspective d'avenir

L'analyse de la situation révèle que la connaissance qu'ont les élèves de la proportionnalité ne leur permet pas d'avoir un contrôle suffisant des procédures qu'ils envisagent. En cas d'échec, ils cherchent rarement à comprendre pourquoi; Ils s'orientent généralement vers une autre procédure qui peut être semblable à la précédente. Cette conduite semble provenir d'une production stéréotypée de mode de résolution de problèmes faisant appel à la proportionnalité. Il est vrai qu'à l'apprentissage d'une notion, une phase de familiarisation est nécessaire. Cette phase doit permettre aux élèves de produire de façon explicite les outils déjà appris. Elle doit éviter de produire chez les élèves une conduite d'automate. Il s'agira de ne pas retomber dans le phénomène "règle de trois" dont l'utilisation passe par un "dressage" (**C. Dupuis, F. Pluvinage; 1981**).

Plusieurs recherches indiquent que l'utilisation des procédures de type scalaire est plus spontanée chez les élèves. L'enseignement devrait donc prendre en compte cette spontanéité, et proposer des situations qui permettent aux élèves de donner du sens au coefficient de proportionnalité.

Cette action pourrait partir de la valeur unitaire qui s'interprète à la fois comme procédure scalaire et procédure fonction. On pourrait apprendre aux élèves à l'utiliser dans un premier temps comme procédure scalaire et dans un second temps comme procédure fonction, ensuite faire le rapprochement "valeur unitaire" - "coefficient de proportionnalité".

Mais il est nécessaire que des tâches plus diversifiées soient présentées, dans lesquelles les élèves pourront confronter les différentes procédures et enfin les comparer.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

BALACHEFF N., LABORDE C., 1985, Interaction sociale, *Mugny G., 1985 , Psychologie sociale du développement cognitif,* P.283, Peter Lang, Bern.

BODIN A., 1987, La proportionnalité en classe de sixième, *petit x n° 13,* p.55-77

BROUSSEAU G., Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherche en didactique des mathématiques*, Vol.7.2, P.33-115

DOUADY R., Jeux de cadres et dialectique outil-objet, *Recherche en didactique des mathématiques*, Vol.7.2, P.5-31

DUPUIS C., 1981, La proportionnalité et son utilisation, *Recherches en didactique des mathématiques,* Vol.2.2, p. 165-212

GROUPE DE FORMATION, 1986, Proportionnalité, *polycopié IREM de Montpellier*

IREM DE DIJON, 1977, Fraction-proportionnalité, *in : l'enseignement des mathématiques du C.M au cycle d'observation, compte-rendu du colloque inter-IREM.*

IREM DE RENNES, 1981,Du cours moyen à la sixième-Fractions numériques, opérateurs et proportionnalité. *Bulletin d'information de l'IREM de Rennes 11, 13, 23*

JULO J., 1982, Acquisition de la proportionnalité et résolution de problème, *thèse de 3ème cycle, IREM de Rennes.*

KARPLUS R., PULOS S., STAGE E., Proportional reasoning of early adolecents, *in acquisition of mathematics concepts and processes* , ed. Les R. , Landau M., Academic Press.

LABORDE C., 1982, Langue naturelle et écriture symbolique: deux codes en interaction dans l'enseignement mathématique, *Thèse, IMAG, Grenoble.*

LARIVEE S., ROULIN J-L., Approche développementale du schème des proportions, *polycopié Ecole de psycho-éducation, Université de Montréal*

MORIN CH., 1983-1984, Une pré-expérimentation sur le thème "Proportionnalité", de la cinquième à la seconde, *polycopié IREM de Montpellier*

MORIN CH., 1985, Analyse d'un problème affine, Etude des contradictions, *polycopié IREM de Montpellier*

MORIN CH., 1986, Etude du comportement d'élèves du second degré devant un problème lié à la proportionnalité, *polycopié IREM de Montpellier*

MORIN CH., Quatre situations didactiques autour de la proportionnalité, *polycopié IREM de Montpellier*

MORIN CH., 1987, La classe de mathématiques au jour le jour, *apmep Bulletin n°360*

NŒLTING G., 1980, The development of proportionnal reanoning and the ratio concept, *Educational Studies in Mathematics,* 11-2.

PEZAR M., A propos de l'enseignement de la proportionnalité, *IREM de PARIS VII*

RICCO G., 1978, Le développement de la fonction linéaire chez l'enfant de 7 à 12 ans, *Thèse de doctorat de 3 ème cycle*

RONALD J. R., 1987, A Study of the Use of Ratios in Science Problème Solving, *Science education,* Volume 71, Issue N°4, P.565-570

ROUCHIER A., 1980, Situations et processus didactiques dans l'étude des nombres rationnels positifs, *Recherches en didactique des mathématiques* Vol.1.2, p.225-75

GIACOBBE J., MARTHE P., METREGISTE R., RICCO G., ROUCHIER A., VERGNAUD G., 1979, Acquisition des "structures multiplicatifs" dans le premier cycle du second degré, *IREM d'ORLEANS*