L'ENSEIGNEMENT DE LA TRANSITIVITE A L'ECOLE ELEMENTAIRE

par le groupe "Présentation du Savoir Mathématique" de l'I.R.E.M. de Poitiers.

Préambule :

Le groupe "Présentation du Savoir Mathématique" de l'I.R.E.M. de Poitiers s'est donné comme objectif essentiel d'explorer les modes d'enseignement des mathématiques afin de rechercher des moyens de développer l'efficacité pédagogique. Le travail présenté ci-dessous a été effectué pour répondre à une préoccupation de maîtres d'application des E.N. de Poitiers : la transitivité bien qu'elle ne fasse l'objet d'aucun enseignement explicite intervient dans de nombreuses activités mathématiques et est souvent source de difficultés chez les élèves. Peut-on y remédier ?

Le document qui suit concerne le comportement des enfants au moment où ils se trouvent dans le système scolaire. Mais il est probable comme le suggèrent les études de psychologie génétique que l'élaboration des actes opératoires commence bien avant l'entrée dans le système scolaire. Dans la période préscolaire l'influence du milieu social estpratiquement sans partage. Il est donc essentiel de réfléchir aux moyens d'action qui s'offrent dès cette période de la formation de la pensée intellectuelle.

Il paraît utile de le rappeler pour situer les limites de cette étude.

I – LA TRANSITIVITE, MODELE D'UN RAISONNEMENT PRIVILEGIE.

1) Rappelons la définition mathématique de la transitivité. Etant donnée une relation notée , définie sur un ensemble E, on dit que celle-ci est transitive lorsque :

$\forall x \in E, \ \forall y \in E$ et $\forall z \in E$ $\quad x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z \longrightarrow x \mathcal{R} z$

C'est-à-dire : s'il y a une relation de x à y et de y à z alors il y a une relation de x à z.

La notion de transitivité intervient :

– dans les relations d'ordre liées aux activités de rangement

– dans les relations d'équivalence liées aux activités de classement, c'est-à-dire pour des relations respectivement du type :

– "a plus . . . que" ou "est plus . . . que" ou leurs réciproques
– "a autant . . . que" ou "est aussi . . . que"

Ces relations sont importantes dans la formation du concept de nombre, des concepts de grandeurs physiques (longueurs, masses, aires, volumes) des concepts géométriques.

Elles interviennent aussi dans de nombreux raisonnements démonstratifs pour établir des relations entre certaines données.

On peut aussi remarquer qu'elles peuvent porter

– sur des objets
  - classements pour dégager la notion de propriété absolue (couleur, forme, etc.)
  - classements et rangements pour dégager des propriétés relatives (longueurs, masses)
– sur des ensembles
  - classement d'ensembles pour définir le nombre sous son aspect cardinal
  - rangement d'ensemble pour l'aspect ordinal du nombre
  - rangement de classes d'objets
– sur des concepts ou des données conventionnelles
  par exemple relation d'égalité, de congruence, d'inégalité, de divisibilité pour le nombre.

2) La transitivité nous est apparue comme une démarche demandant la combinaison d'au moins 3 éléments.

Si on a $A = B$; $B = C$ ces deux égalités sur trois nombres permettent de construire le résultat $A = C$. Il s'agit donc d'un circuit long de pensée confrontant trois éléments pour en tirer un résultat. Cette opération nécessite le fameux détour bien connu des psychologues par un élément intermédiaire ("A et C sont tous les deux égaux à B"), sans lequel aucune conclusion n'est possible. La transitivité est donc intéressante du point de vue de la psychologie du raisonnement.

3) La transitivité est intéressante du point de vue de la psychologie génétique. Les psychologues généticiens ont montré la liaison entre l'acquisition de la notion fondamentale de conservation et celle de transitivité. De plus ces études ont été accompagnées d'expérimentations pédagogiques (1).

Or ces notions sont loin d'être acquises au début du cycle élémentaire par tous les enfants. Pourtant dès le C.E. certains exercices sont en rapport avec la transitivité sans aucune préparation concernant ce genre d'activité. Il est donc intéressant de savoir si certaines activités n'arrivent pas trop tôt ou mal à propos et s'il ne serait pas important de prévoir une préparation.

Bien plus, à l'entrée en sixième on demande à l'enfant de "reconnaître" et de nommer la relation transitive. Or on ne sait pas du tout comment cette notion est maîtrisée à cette époque de la vie de l'enfant.

4) La transitivité exige donc une opération intellectuelle de combinaison. Du point de vue de la psychologie génétique, elle permet, peut-être, de mettre en valeur l'importance de la chronologie dans la formation de la pensée. Elle présente enfin, à notre avis, un grand intérêt du point de vue de la psychologie spécifique des mathématiques.

A première vue, en effet, l'opération sur la relation transitive semble relativement simple parmi l'ensemble des activités d'un mathématicien. Il est évident par exemple, que les opérations de déduction par transformation légitimée d'une expression en une autre (par exemple, multiplier les deux termes d'une équation par un même nombre) sont infiniment plus nombreuses et plus complexes.

Mais c'est la simplicité même de l'opération en cause qui présente de l'intérêt. Comme elle est relativement facile à contrôler, elle permettrait peut-être de discerner dans les difficultés des élèves ce qui relève de la maîtrise de la relation transitive elle-même et ce qui tient au support auquel elle s'applique. En effet, la relation transitive peut conduire à combiner soit des relations d'ordre soit des relations d'équivalence, soit du matériel verbal, numérique ou concret comme nous l'avons déjà dit.

Or il est certainement intéressant de situer exactement ce qui fait difficulté pour l'élève, pour déterminer une pédagogie adaptée.

Le dispositif expérimental doit donc rendre possible les analyses que nous venons d'évoquer.

---

(1) GRECO in "Traité de psychologie expérimentale" Tome VII reprenant les expériences de SMELDSUND.
SMELDSUND E.E.G. Vol. IX p. 85 à 124 B.P.S.

II – PROCEDURE EXPERIMENTALE

Il s'agit donc d'étudier la maîtrise de la relation transitive en elle-même d'une part, suivant les classes de l'école élémentaire d'autre part, et en tenant compte du matériel auquel elle s'applique.

En faisant varier le support de la relation transitive nous avons pensé que deux types de résultats étaient possibles.

– soit les performances changent avec le support et il faut alors étudier le rôle joué par le support.

– soit les résultats équivalents dans toutes les situations et notre problème consistera à explorer les difficultés de la relation transitive elle-même.

Nous souhaiterions disposer de trois types de situations concernant des opérations sur des objets, sur des graphiques et sur du matériel symbolique. Une précédente recherche sur les schémas nous avait conduite en effet à constater la fonction importante de la situation graphique dans l'élaboration de la pensée de l'enfant (1). Or il nous a été impossible de trouver des situations graphiques significatives du point de vue de la transitivité. L'étude de cette difficulté nous a permis de mieux analyser les relations transitives portant sur des objets. Nous avons constaté que pour ce qui concerne ces situations matérielles il était relativement facile aux enfants de résoudre les problèmes que nous posions sans maîtrise de la relation transitive, par simple parcours perceptif. PIAGET a montré il est vrai qu'une perception non informée est totalement inefficace. L'enfant qui voit le niveau de l'eau dans deux vases penchés est incapable de dessiner ce qu'il a observé. Toutefois l'opération qui est en jeu dans l'aptitude à percevoir ne relève sans doute pas du phénomène de la transitivité. Comment se fait-il donc que c'est seulement dans le domaine des relations formalisées que nous trouvons des opérations ne pouvant être réalisées indiscutablement qu'au moyen du raisonnement transitif ? C'est évidemment que les situations formalisées et notamment mathématiques sont épurées de tout ce qui pourrait donner à l'esprit une autre possibilité de démarche. Il nous a semblé que nous avions mis en valeur ici un aspect très important des situations mathématiques. Il serait d'ailleurs peut-être possible de trouver chez les mathématiciens un culte de la démarche canonique.

Nous avons donc dû nous restreindre à deux types de situations, les unes mettaient en jeu des objets, les autres des symboles. Pour ce qui est des symboles nous avons cherché à saisir cette activité dans sa forme la plus simple, c'est-à-dire la représentation d'un objet par un signe (par exemple un nombre par une couleur) ou un symbole ne représentant rien d'autre que lui-même. On définit un signe dont la seule caractéristique est d'être plus grand que, par exemple.

Nous avons cherché aussi à mettre en jeu plusieurs types de relations d'ordre et d'équivalence et à faire travailler les enfants sur des objets très différents : nombres, expressions verbales, symboles, objets, etc.

a) Par ailleurs nous souhaitions donner à notre étude un caractère nettement diachronique. C'est pourquoi nous avons cherché à construire une batterie unique applicable à tous les enfants de la maternelle au cours moyen deuxième année en laissant les enfants aller aussi loin qu'ils le pouvaient dans la batterie à tous les niveaux. Les expérimentations ont souvent défini une limite à ne pas dépasser (par exemple, ils décidaient à priori qu'un test ne pouvait pas être passé à tel niveau). La difficulté est grande semble-t-il, pour un enseignant de substituer une attitude scientifique à une attitude pédagogique. Cela pose le problème de la validité des corrections.

b) Enfin, pour "situer" le mieux possible la place de l'apprentissage de la transitivité dans l'acquisition des connaissances mathématiques nous avons cherché à étudier la corrélation entre les résultats en mathématiques et les résultats à la batterie de test de transitivité. Pour cela nous avons proposé à toutes les classes sur lesquelles portait notre observation des tests de niveau mathématique qui nous ont permis de répartir les enfants en quatre classes : T.S. (très satisfaisant) S (satisfaisant), P (passable) et I (insuffisant).

III – LE TEST DE TRANSITIVITE.

Il comporte 10 épreuves décomposées comme suit :

– 4 épreuves de manipulations : les tours, les masses, les fils, les barres.
– 1 épreuve intermédiaire : les cartes.
– 5 épreuves symboliques : les couleurs, les nombres, les Grecques, les shadocks, les jojos.

Le nombre des opérateurs exigeait un protocole très rigoureux que nous présentons ci-dessous avec la description des tests.

Nous noterons que sauf pour la maternelle nous n'avons pas pu faire passer de prétests. Nos épreuves n'ont donc pas été soumises à un contrôle experimental suffisant.

La batterie comporte 10 tests dont voici le descriptif :

1 – LES TOURS.

– **Matériel :**

- un montage en forme d'escalier avec deux tours de couleur et de forme différente, mais de même hauteur.
- des cubes emboitables qui permettent de comparer les hauteurs des deux tours.
- du matériel divers (pour éviter de privilégier les cubes emboitables) : des perles, un bout de ficelle, deux baguettes de bois, etc.).

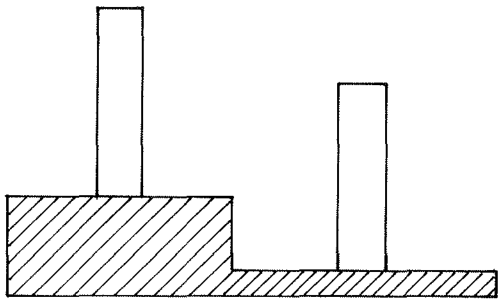
socle 

Schéma simplifié du test.

– **Déroulement :**

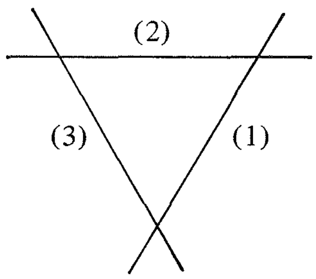
On dit à l'enfant : "Voici deux tours ; elles ne sont pas placées sur la même marche d'escalier ; tu ne peux pas les bouger.

On voudrait savoir s'il y en a une qui est plus grande que l'autre. Comment faire?"

2 – LES FILS.

– **Matériel :**

- un prisme de bois portant sur ses faces des fils de couleur (les fils de même couleur ayant la même longueur).



face (1) : fil noir < fil orange
(fils fixés au milieu de la face)

face (2) : fil orange < fil vert
(fils fixés à partir du haut)

face (3) : fil vert < fil violet
(fils fixés à partir du bas)

- 3 bobines de fils respectivement de couleur noire, verte et violette.

– **Déroulement :**

(On illustrera les propos à l'aide du prisme et des bobines).

"Le fil de la bobine noire a même longueur que le fil noir de l'appareil.

Le fil de la bobine verte a même longueur que les fils verts de l'appareil.

Le fil de la bobine violette a même longueur que le fil violet de l'appareil.

Les deux fils oranges de l'appareil ont même longueur.
Donc les fils de même couleur ont même longueur.
Tu vois que le fil vert est plus court que le fil violet.

(On montre la face (3)) Où vas-tu mettre la bobine noire pour que les bobines soient rangées de la plus courte à la plus longue?"

3 – **LES MASSES.**

– **Matériel :**

- un grand triangle épais rouge (bloc logique : O.C.D.L.) désigné par A.
- un cube (matériel multibase : O.C.D.L.) correspondant à un groupement de 6ème ordre en base 2, désigné par B
- une bouteille ("de pharmacie") très petite remplie d'eau, désignée par C.

tel que : $A < B < C$

- une balance Roberval.

– **Déroulement :**

Première version : du C.P. à C.M. 2

- On met A sur le plateau gauche de la balance et B sur le plateau droit.
  "tu vois que le triangle est moins lourd que le cube"
- On met C sur le plateau gauche et B sur le plateau droit
  "tu vois que la bouteille est plus lourde que le cube"
- On montre A et C à l'enfant
  "de ces deux objets lequel est le plus lourd ?"

Deuxième version : maternelle

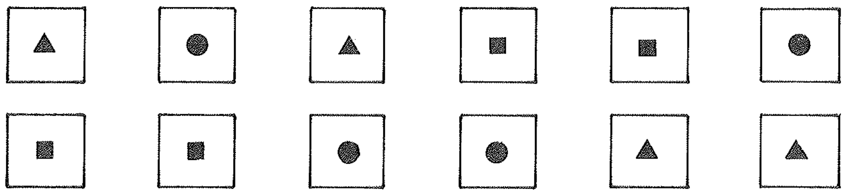
- On met A sur le plateau gauche de la balance et B sur le plateau droit.
  "tu vois que la balance penche du côté du cube"
- On met C sur le plateau gauche et B sur le plateau droit.
  "tu vois que la balance penche du côté de la bouteille"
- On met A sur le plateau gauche et C sur le plateau droit et on empêche la balance de fonctionner.
  "de quel côté va pencher la balance ?"

4 – LES CARTES .

– Matériel :

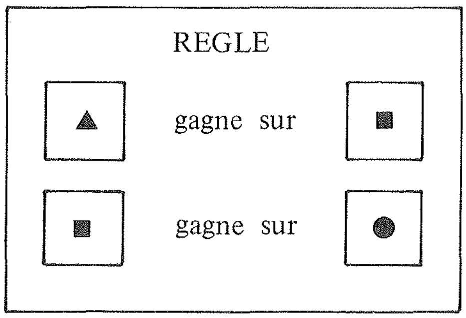
● 2 paquets de 6 cartes arrangées de la carte du dessus vers la carte du dessous (dessins visibles) comme suit :

Pl :
P2 :



dessus → dessous

– un carton comprenant la règle du jeu :



N.B. La règle aurait dû comporter une indication supplémentaire : les 4 figures sont en relation de supériorité ou d'infériorité entre elles. L'absence de cette donnée a pu gêner les élèves les plus rigoureux.

– Déroulement :

● deux adultes jouent; l'enfant est arbitre et possède le carton de la règle.

Règle du jeu : chaque joueur joue une carte ; l'enfant dit qui l'emporte et ainsi de suite dans l'ordre des cartes défini ci-dessus.

● si au 3ème coup l'enfant hésite, l'examinateur lui dit : "débrouille-toi avec la règle".

● si au dernier coup l'enfant hésite l'examinateur lui dit : "débrouille-toi avec la règle" ; lorsqu'il a pris sa décision l'examinateur lui dit : "explique pourquoi" ; à la fin on lui demande : "as-tu déjà joué à la bataille ?"

● éviter toute communication entre les enfants pendant le déroulement des tests.

5 – LES COULEURS.

– Matériel :

- 4 feuilles ((a) , (b) , (c) , (d)) sur lesquelles se trouvent des rectangles de couleur et des signes mathématiques :

Exemple : (feuille (a))

Vert	$>$	Bleu
Bleu	$>$	Jaune
Vert		Jaune

Sous les rectangles de couleur bleue se trouve un même nombre (exemple : 13)

feuille (b) :	feuille (c) :	feuille (d) :
rouge $>$ noir	rouge $<$ vert	blanc $<$ jaune
blanc $<$ noir	bleu $<$ rouge	blanc $>$ noir
blanc rouge	vert bleu	noir jaune

- 4 paquets de 3 étiquettes portant respectivement les signes suivants :

$\boxed{>}$ $\boxed{<}$ $\boxed{=}$

– Déroulement

Exemple de consigne (feuille (a))

"Regarde cette feuille, derrière chaque rectangle il y a un nombre (on lui montre le dessous du rectangle bleu).

- derrière les rectangles verts il y a le même nombre
- derrière les rectangles bleus il y a le même nombre (on lui montre ce nombre)
- derrière les rectangles jaunes il y a le même nombre.

Tu vois que le nombre vert est plus grand que le nombre bleu.

Tu vois que le nombre bleu est plus grand que le nombre jaune.

Voici 3 étiquettes, mets celle qui convient entre le nombre vert et le nombre jaune qui se trouvent en bas de la feuille".

– Remarques :

Possibilité de demander une explication si les résultats sont inégaux.

6 – LES BARRES.

– **Matériel** :

- un ensemble de barres emboîtées, de couleur différente, mobiles sous certaines conditions appelées "barres de Vergnaud" (1).

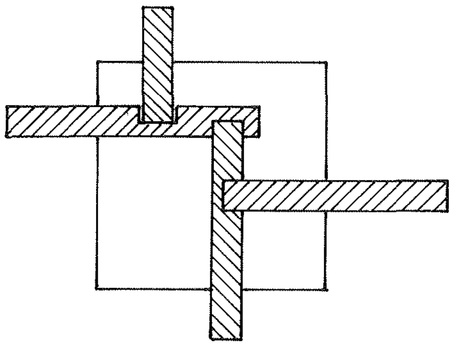


Schéma simplifié. (Le nombre de barres est plus important).

– **Déroulement** :

- Phase d'observation avec manipulation libre (2 mn)
- Phase d'observation sans manipulation. Consigne : "tu dois tirer sur la barre rouge en tirant sur le moins de barres possibles ; avant tu réfléchis (1 mn)".
- Manipulation
- Vas-y ! (2 mn)

On comptera le nombre de tentatives de déplacements et le nombre de déplacements effectifs.

– **Remarques** :

On obtient une réussite quand il n'y a aucune manipulation superflue.
Echec dans tous les autres cas (noter l'ordre des couleurs touchées)

7 – LES NOMBRES.

– **Matériel** :

- une feuille sur laquelle sont inscrites les expressions suivantes :

$21 \times 14 < 42 \times 8$

$31 \times 12 > 42 \times 8$

$21 \times 14 \qquad 31 \times 12$

---

(1) Ce matériel a été présenté au congrès de l'A.P.M. de Rennes par M. VERGNAUD.

et la consigne suivante : "Ecris le signe qui convient entre les nombres ci-dessus (> , < , =)"

On lit la consigne. On laisse 1 mn.

8 – LES GRECQUES

– Matériel :

- une feuille par élève comportant les informations suivantes :

α	plus fort que	λ
ψ	plus fort que	θ
θ	plus fort que	λ

- entoure les réponses exactes

ψ	plus fort que	α	$\boxed{\text{Vrai}}$	$\boxed{\text{Faux}}$	$\boxed{\text{Je ne sais pas}}$
α	plus fort que	ψ	$\boxed{\text{Vrai}}$	$\boxed{\text{Faux}}$	$\boxed{\text{Je ne sais pas}}$
ψ	plus fort que	λ	$\boxed{\text{Vrai}}$	$\boxed{\text{Faux}}$	$\boxed{\text{Je ne sais pas}}$
α	plus fort que	θ	$\boxed{\text{Vrai}}$	$\boxed{\text{Faux}}$	$\boxed{\text{Je ne sais pas}}$

9 – LES SCHADOCKS.

– Matériel :

- une feuille par élève comportant les informations suivantes :

  tous les schadocks sont des pépilos

  tous les pépilos sont des cacolacs

Souligne la conclusion parmi les phrases suivantes :

tous les pépilos sont des schadocks

tous les schadocks dont des cacolacs

tous les cacolacs sont des pépilos

10 – JOJO.

– Matériel :

- une feuille par élève comportant les informations suivantes :

JOJO est un sarmate. En voyageant en Moldavie, tu apprends que trois peuples vivent là-bas : les Vénitiens, les Sarmates et les Babions.

JOJO vit-il en Moldavie ?

– Déroulement :

On lit, on fait lire et on fait répondre.

IV – LES RESULTATS

TABLEAU DES REUSSITES A L'ENSEMBLE DE LA BATTERIE POUR LES DIFFERENTES CLASSES (1) DE L'ECOLE PRIMAIRE.

Classe / Test	Maternelle	C.P.	C.E. 1	C.E. 2	C.M. 1	C.M. 2
1	0,06	0,23	0,58	0,92	1	0,92
2		0,46	0,50	0,75	0,77	0,54
3	0,23	0,92	0,66	0,66	1	0,92
4	0,35	0,31	0,50	0,66	0,69	0,85
5		0,35	0,68	0,62	0,67	0,58
6	0,06	0	0,58	0,66	0,69	0,62
7			0,66	0,66	0,54	0,54
8					0,07	0,15
9				0,41	0,31	0,69
10			0,50	0,41	0,31	0,46
Totaux (1)		0,35	0,55	0,70	0,75	0,71

- Les résultats expriment le pourcentage de réussite (1 = 100% ; 0,80 = 80% de réussites).

- Certaines variations peuvent paraître importantes. Par exemple pour le test (1) : 1 en C.M. 1 et 0,92 en C.M. 2. Elles doivent être interprétées avec prudence sur un échantillon aussi petit. Comme elles ne correspondent qu'à un ou deux cas, elles peuvent être totalement accidentelles. Nous ne tiendrons compte dans notre interprétation que des variantes proches du 1/3 du pourcentage ou des tendances vraiment permanentes dans les résultats.

---

(1) L'échantillon des élèves ayant passé le test comporte 17 enfants de maternelle, 12 de C.P., 12 de C.E. 1, 12 de C.E. 2, 12 de C.M.1 et 12 de C.M. 2. Les 12 élèves ont été à chaque fois choisis de la manière suivante : 3 T S, 3 S, 3 P et 3 I.

A – INFLUENCE DES APPRENTISSAGES SYSTEMATIQUES ET DU NOMBRE D'ELEMENTS A COMBINER.

Le test (1) dit "Les tours" amenait l'enfant à imaginer un moyen pour comparer deux dimensions. Cette opération est totalement maîtrisée à partir du C.E. 2 (Tableau précédent). Or ce qu'il faut regarder c'est la **complexité** relative de cette opération qui demande **l'invention** d'un élément intermédiaire pour effectuer la comparaison demandée. Pourtant même chez les élèves dont les tests de niveau mathématiques donnent des résultats notés insuffisants, cette opération est bien réussie à partir du C.E. 2. Seuls les élèves notés TS et S aux tests de niveau ont un fort pourcentage de réussite globale sur l'ensemble du cycle élémentaire. Ces élèves sont donc les seuls à disposer très tôt d'une maîtrise élevée de l'opération demandée.

Les résultats du test 3 (les masses) qui était une comparaison de poids, présentent en C.E. 1 et C.E. 2 des valeurs proches de celles qui auraient été obtenues par un tirage au hasard.

Comment interpréter les résultats de ces deux tests ? On peut faire remarquer que les résultats du test 3 pouvaient être influencés par la présentation si l'enfant se laissait guider par les mots et les apparences sans effort de réflexion. C'est ce qui a dû se passer pour les élèves du C.P. Par contre dès qu'un élément de réflexion intervient il faut une bonne maîtrise de la relation transitive et de la notion de poids pour réussir l'opération, ce qui ne semble réalisé qu'au niveau du C.M. 1. On peut remarquer aussi que ces deux tests correspondent à un secteur d'enseignement intensif : celui de la mesure. On peut donc se demander si ce qui a été observé dans les résultats n'est pas plutôt que l'acquisition de la **notion générale de transitivité** , celle de connaissances spécifiques dans le domaine de la mesure. A un certain moment de la scolarité, la familiarité avec les opérations de mesure permet de faire des réponses correctes sans qu'on puisse parler d'une amélioration dans le domaine des opérations générales. On peut certes faire également l'hypothèse que l'enseignement intensif de la mesure développe la notion de conservation dont la liaison avec la transitivité semble avoir été mise en valeur. L'origine de la réussite semble donc difficile à déterminer.

Il était donc intéressant de comparer ces résultats avec ceux de deux autres opérations sur des objets qui ne correspondent pas à un enseignement scolaire systématique : le test des fils et le test des barres. Ces deux tests présentent en plus une combinatoire à plus de trois éléments (4 couleurs pour le test des fils, 6 planchettes pour le test des barres). Le contrôle des explications données par les enfant réduit considérablement le risque des réponses dues au hasard. Par contre la longueur des explications préalables bien que le protocole soit rédigé peut permettre des variations chez les expérimentateurs.

Or pour ces tests, les résultats indiquent une **absence de maîtrise complète** (résultats en C.M. 2 : 0,54 et 0,62). On constate aussi une nette différence de performance chez les très satisfaisants et les satisfaisants au test des fils et dans une moindre mesure au test des barres où il était difficile de discerner les réussites complètes.

Enfin on constate une légère avance des TS et S et même P sur les I aux résultats cumulés des épreuves portant sur des objets.

On a donc au total une maîtrise à peu près générale des tests dans des domaines dont la combinatoire est à 3 termes et dont les opérations portent sur des secteurs donnant lieu à un important enseignement scolaire.

L'importance du passage a plus de trois termes à combiner aurait dû être confirmée par le test n° 8 dit "Les Grecques" que nous avons en partie éliminé de nos calculs.

En effet ce test a été un échec à peu près total. Il semble que deux obstacles qui n'ont rien à voir avec la transitivité, mais qui sont très intéressants du point de vue de la présentation du savoir ont été insurmontables pour les enfants.

Le premier obstacle a été l'impossibilité pour les enfants de **nommer** les lettres grecques. Nous voulions évidemment définir des relations entre des objets dépourvus de toute valeur en dehors de ces relations. Mais les enfants ont, semble-t-il, perdu toute prise intellectuelle sur un matériel ainsi présenté.

Le deuxième obstacle a été de nature affective. L'enfant avait à choisir entre trois réponses : vrai, faux, je ne sais pas. Or, il semble que cette dernière réponse trop personnalisée apparaissait comme un aveu d'impuissance. Il aurait fallu mettre "on ne peut pas savoir".

Néanmoins, il faut signaler que cette épreuve a été réussie par quelques élèves de C.M. 2 et C.M. 1 classés "satisfaisants" ou "très satisfaisants" et par un "passable" mais qui a passé très brillamment l'ensemble de la batterie. Il semble bien donc que ce soit la combinaison de plus de trois termes qui a constitué, là aussi, la difficulté essentielle.

B – L'INFLUENCE DES RELATIONS COMPLEXES.

Comme on l'a vu, nous ne sommes pas parvenus à trouver de situations transitives de type purement graphique. Cela nous a conduits à distinguer des situations où l'esprit dispose de plusieurs moyens d'approche d'une réalité et notamment des analogies perceptives ou des parcours perceptifs. Il existe par contre d'autres situations où l'esprit ne dispose que d'un procédé de combinaison intellectuelle. Il faut pour cela supprimer toute coïncidence de symétrie, de position, d'aspect qui permet de trouver la réponse, sans effectuer la démarche cherchée. L'esprit se construit facilement des lois contingentes qui peuvent à la suite de coïncidences momentanées conduire au succès puis, dans d'autres circonstances, être une source répétée d'échecs (1).

Le test 4 dit "Les cartes" nous offre un bon exemple d'une situation incomplètement rigoureuse. L'enfant dans ce test dispose d'objets, des cartes, et d'une situation, la présentation de deux cartes dont l'une doit l'emporter sur l'autre. Mais il ne peut résoudre le problème qu'en appliquant une règle, c'est-à-dire une relation conventionnelle entre les figures et il ne peut déduire sa réponse que par un raisonnement portant sur les données dont il dispose.

---

(1) Brousseau. Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. IREM de Bordeaux - Mai 1977.

Malheureusement les figures les plus fortes sont à gauche de la carte et les plus faibles à droite. Une liaison peut alors s'établir entre faible à droite et forte à gauche qui permettra de résoudre le problème avec une donnée contingente.

Pour être assurés de la nature de l'opération effectuée nous avons demandé une explication à l'enfant lors de la deuxième opération transitive.

Nous avons ainsi un test où le raisonnement porte sur des relations conventionnelles et dans lequel le raisonnement est obligé sans que l'enfant soit impressionné ou gêné par la nécessité de connaître un système de signes compliqué.

Les résultats montrent :

– une progression sensible en fonction des classes (tableau) de 0,35 en maternelle à 0,85 en C.M. 2.

– une nette corrélation avec les niveaux en mathématiques.

Ce n'est cependant que progressivement que la réussite des TS et des S se confirme tandis que la proportion d'échecs est variable chez les P et les I. Il n'en reste pas moins que les résultats des P et I sont nettement moins affirmés à ce test que dans les épreuves portant sur des **situations scolaires d'une part** et même sur des objets.

Il semble donc bien se confirmer une
- *différence entre des situations habituelles et les autres*
- *et donc entre une maîtrise de la transitivité en général et dans certaines situations scolaires et peut-être également plus matérielles.*

Les tests 5 (les couleurs) et 7 (les nombres) renforcent les phénomènes mis en jeu dans le test précédent. En raison de l'inversion des signes dans les différentes lignes de données, les corrélations perceptives sont nécessairement une source d'erreur. Par ailleurs le caractère conventionnel des relations est renforcé bien que l'on indique que les couleurs correspondent à des nombres dans le test 5. Pour le test 7 on invite l'enfant à résoudre le problème sans recourir au savoir qu'il possède sur l'ordre des nombres.

Les résultats montrent :

– une progression massive au niveau du C.E. 1 suivie d'une stagnation durable pour les autres classes.

– des résultats très divergents suivant les niveaux. Les résultats globaux donnent

Test 5 (ensemble des 4 épreuves)	TS 0,79	S 0,61	P 0:25	I 0,37	
Test 7	TS 0,91	S 0,50	P 0,61	I 0,38	(1)

(1) L'entraînement scolaire ne semble plus avoir ici d'influence décisive.

On pourrait donc penser que c'est le fait d'avoir réalisé une situation exigeant un recours indiscutable au raisonnement qui explique la baisse des résultats. Nous avons montré le caractère particulièrement épuré des situations de ce genre et par conséquent la nécessité où elles mettent celui qui les vit à prendre un chemin déterminé. En fait l'interprétation paraît plus complexe. En effet les enfants ont paru à l'aise quand on leur présente des relations d'égalité. Ce serait donc la présence de relations d'inégalité qui aurait été la source d'obstacles.

Nous supposons donc que certains types de relations présentent un caractère plus complexe que d'autres et c'est le cas pour les relations d'inégalités. Malheureusement c'est ce type de relation que nous avons systématiquement introduit dans notre batterie malgré notre désir de variété.

D'où viendrait donc la complexité des relations d'inégalités ? de la nécessité de ranger les données dans un ordre déterminé pour pouvoir les combiner.

Ex. : soit $A = B$ $\quad A = D$ la réponse se lit immédiatement

soit $A > B$ $\quad A < D$

une mise en ordre seule rend la réponse possible : $D > A > B$

A notre avis c'est le même phénomène qui complique le raisonnement sur les données négatives. (1)

Cette analyse si elle est exacte complète la précédente et la renforce en insistant sur la difficulté des opérations comportant plus de trois éléments à combiner, ou plus de deux opérations à effectuer sur les mêmes données.

Il est probable aussi que l'absence de familiarisation avec l'usage des signes $>, <$, convention difficile à mémoriser, a été un obstacle supplémentaire.

C – LA TRANSITIVITE ET LE LANGAGE COURANT

Nous avons eu l'occasion de constater que la transitivité sur les objets ou des relations conventionnelles ou formalisées ne se présentait pas à l'esprit de la même manière. Avec l'usage du langage courant c'est un nouveau type de présentation qui s'offre à nous. Ainsi pour le test 10 intitulé JOJO qui pose un problème d'inclusion dans un ensemble, nous avons dû inventer des noms fantaisistes pour éviter les réponses résultant d'un savoir ou d'une illusion de savoir. Mais le caractère artificiel des mots employés et la difficulté de les mémoriser ou de faire jouer la pensée sur des lots peu familiers a rendu le test pratiquement inaccessible aux enfants. En plus le fait de répondre par oui ou par non donne une place trop grande et incontrôlable au hasard sauf en cas de réussites ou d'échecs massifs. Ce qu'il faut surtout retenir de ce test c'est la difficulté introduite par des termes ou des signes non familiers dans le travail intellectuel.

---

(1) On notera que les relations d'inégalité ne sont pas signalées comme sources de difficultés par les maîtres.

Le test 9 (les schadocks) se présentait sous la forme d'un syllogisme de la première figure. Il posait donc un problème d'inclusion mais là aussi nous avons du utiliser des termes imaginaires (Cf cacolacs) qui ont dérouté les enfants. Par ailleurs nous leur proposions trois conclusions, or le terme conclusion n'est pas forcément compris. Il aurait sans doute fallu trouver des formules plus proches du langage de l'enfant.

Les résultats se sont pas significatifs sans que nous puissions dire quel aspect du texte a perturbé les résultats. Il s'agit donc d'épreuves à revoir.

Mais il faut retenir que comme les relations sur les objets, le langage courant offre des situations auxquelles l'esprit peut faire face grâce à différentes ressources : mémoire, perception, coïncidence, etc.

D – LA SIGNIFICATION DE LA CORRELATION AVEC LES RESULTATS EN MATHEMATIQUE

Nous avons eu l'occasion de rappeler que les opérations sur la relation transitive ne sont pas les plus importantes en mathématique. Par ailleurs nous avons cru discerner une réussite réelle dans des domaines comme la mesure ou le rangement des poids sans qu'on puisse être assuré d'une maîtrise générale des opérations sur les relations transitives.

Nous ne reproduisons pas ici les calculs et les tableaux de corrélation entre test de niveau et test de transitivité. Mais celle-ci est **nette**. (autour de 0,60). Comment l'interpréter ?

Pour notre part, nous retiendrons deux constatations :

– d'une part nous avons mis en valeur l'influence du nombre d'éléments à combiner sur les résultats.

– d'autre part l'influence du support symbolique de certaines des opérations non pas parce qu'il comporte des éléments symboliques, mais surtout parce qu'il nécessite un certain type de combinaisons intellectuelles.

Ce serait donc à notre avis ces deux aspects communs à la transitivité et aux activités mathématiques qui expliqueraient la corrélation.

E – Y A–T'IL DES PALIERS DANS LES ACQUISITIONS INTELLECTUELLES ?

L'observation du tableau I des résultats par niveaux scolaires conduit encore à faire deux observations :

– Si les tests (1), (3), (4) dans une certaine mesure comportent une progression constante à travers les classes malgré un résultat surprenant en C.P. pour le test (3), les autres tests (2), (5), (6) et (7) notamment portant sur des relations à plus de trois termes ou sur des relations formalisées ont plutôt tendance à stagner.

– Presque tous les tests, sauf (2) et (3) révèlent un palier important au niveau du C.E.1. Nous rappelons que pour les tests (2) et (3) un biais important pouvait être introduit dans la présentation si l'on ne s'en tenait pas exactement au protocole. Ce palier correspond aux résultats de l'équipe de Piaget montrant une augmentation sensible de l'acquisition de la notion de conservation à laquelle serait liée celle de la transitivité vers 7 - 8 ans.

V – REFLEXIONS PEDAGOGIQUES

1 – LES OPERATIONS SUR LES RELATIONS TRANSITIVES SONT-ELLES CORRECTEMENT MAITRISEES A LA FIN DU CYCLE ELEMENTAIRE ?

On ne peut pas répondre de manière totalement affirmative à ce genre de question d'autant plus que notre échantillon prélevé dans des classes d'application était supérieur au niveau général de la population scolaire.

D'autre part si nous avons constaté un taux de réussites tendant à atteindre 100 % cela ne concernait que des opérations portant sur des notions faisant l'objet d'un enseignement intense : l'opération de mesure des longueurs et de rangement des poids.

On peut alors faire deux hypothèses.

Si la réussite particulière dans ces domaines est le fait de la répétition on peut avoir tout lieu de s'inquiéter. Les expériences de SMELSDSUND interprétées par GRECO (1) indiquent la fragilité de ce type d'acquisition. D'autre part il s'agit d'un enseignement d'un coût élevé puisque ce qui est acquis dans ce domaine de connaissance risque de ne pas se transférer à d'autres savoirs.

Si, ce qui est plus probable (2), la loi des relations transitives est correctement élaborée à la fin du cycle élémentaire ce sont les paramètres complémentaires mis en valeur qui doivent retenir notre attention : l'augmentation du nombre d'éléments à combiner ou le nombre d'opérations à effectuer sur les mêmes données.

On est frappé par le fait que l'enseignement de la mesure semble avoir un effet proche de l'efficacité absolue, alors que le même type d'enseignement dans le domaine des nombres aboutit à des résultats qui ne sont pas sensiblement différents de ceux qui portent sur une situation non scolaire : les couleurs.

On peut remarquer encore que le test (8) dont nous avons dit les défauts a été même pour les T.S. un obstacle à peu près totalement insurmontable.

---

(1) Traité de Psychologie T VII op. cit.
(2) Comme semblent le montrer les résultats au test (4)

On peut faire l'hypothèse que certaines présentations des données (nombre plus important de données, présentations inversées, etc.) exigent une procédure pratique qui n'est pas familière aux élèves. Ce ne serait donc pas le principe de la transitivité qui serait en jeu, mais les manipulations nécessaires pour appliquer le principe. N'y a-t'il pas là une **lacune pédagogique.** On enseigne certaines manipulations comme par exemple les quatre opérations parce que, dit-on, ça ne "s'invente" pas. Par contre d'autres habiletés de raisonnement sont totalement négligées comme celles qui consistent devant une série d'inégalités à se donner un procédé pour simplifier les combinaisons.

Dans la plupart des opérations de calcul, il serait peut-être opportun de distinguer ce qui relève du principe, de la rationalité si l'on veut, et ce qui relève du procédé. Quand un enfant se dit "les cartes à droite sont plus fortes, celles de gauche sont plus faibles", il se donne un procédé de calcul dangereux parce que contingent. Comment éviter ces phénomènes si on n'est pas attentif aux procédés mis en œuvre, ou totalement absents dans le travail des enfants ?

Il y a probablement d'autres domaines, notamment celui de certaines représentations spatiales, où l'absence d'un entraînement spécifique se fait sentir.

2 – REMARQUES SUR LA CONSTRUCTION DU SAVOIR.

Les situations que nous avons proposées aux enfants ne nous permettent pas de distinguer avec certitude ce qui relève de l'incapacité à mettre en œuvre certains procédés opératoires dont nous venons de parler et ce qui tient à la relation au savoir à proprement parler. Toutefois nous avons pu faire trois constatations.

– le test (5) les couleurs, montre qu'une combinaison à trois termes comportant un léger symbolisme introduit manifestement une donnée supplémentaire par rapport aux tests sur les objets si on en juge par les résultats.

– nous avons pu constater une perturbation très nette chez les enfants devant le symbolisme inattendu que nous avions introduit dans les tests (5 - 8 - 9 - 10) et une certaine difficulté à utiliser les signes ($<$ et $>$).

– il existe une zone importante d'acquisition en général au niveau C E 1 – C E 2, mais qui ne concerne cependant pas tous les élèves.

CONCLUSION

Nous n'avons pas cru passer sous silence les faiblesses de notre travail et notamment de notre batterie de tests. Les résultats que nous proposons paraîtront bien peu convaincants en raison de leur dispersion ou de la faiblesse des différences. Mais la pédagogie travaille dans un champ phénoménal complexe. C'est ce que nous avons appris ensemble au cours de ces deux années en élaborant ces tests et ces expériences et en apprenant progressivement les conditions d'une plus grande rigueur dans notre activité d'enseignants.