LOGO GEOMETRIQUE ET L'ECOLE ELEMENTAIRE

André MYX
Ecole Normale
69000 Lyon

POURQUOI LOGO GEOMETRIQUE ?

Une rapide enquête qualitative auprès des enseignants montre qu'avec LOGO, certains **concepts géométriques** peuvent être préparés, abordés ou consolidés. En premier lieu, la nature propre de LOGO nécessite (ou encourage...) une bonne maîtrise du concept d'angle ou plutôt de la mesure de l'angle orienté d'une rotation. Simultanément, il est possible d'appréhender d'autres notions telles que les polygones réguliers et quelques transformations simples du plan.

La mise en œuvre du langage lui-même nécessite une assez grande **activité algorithmique** : selon l'agencement conçu par l'enfant des primitives et plus tard des procédures, l'observateur (l'enseignant, le psychologue) peut observer l'enfant qui affine, organise la solution d'un problème posé. Certaines structures de programmation sont plus ou moins reconnues et réutilisées dans des épreuves de compréhension des programmes ou dans des épreuves de construction de programmes ; citons les quatre grands groupes structuraux les plus fréquemment (spontanément ?) rencontrés dans les productions des élèves : structure séquentielle simple (l'élève échafaude peut-être son raisonnement autour d'une analyse de type descendant mais sa réalisation ne fait pas appel au caractère procédural du langage ; structure itérative simple (naturelle pour les polygones réguliers...) ; structure modulaire simple (on découpe l'action, on programme chaque brique séparément) et enfin structure modulaire itérative.

"petit x" n° 18 pp. 81 à 95, 1988

Distinguons tout de suite - pour la clarté de l'exposé - deux **types d'activités autour de LOGO** :

- la construction imposée : une figure géométrique entièrement déterminée (à une isométrie près) est proposée à l'enfant qui doit la réaliser à l'écran ;
- la construction libre autour d'un projet, en général figuratif, allant du petit village à la forêt de sapins...

Nous nous intéressons ici à la construction de figures imposées en distinguant plus tard la nature même de cette figure. Il semble en effet judicieux de distinguer par exemple la production de polygones réguliers de n côtés de la construction/résolution d'un triangle dont on fixerait certains éléments, angles ou côtés.

QUELLE(S) GEOMETRIE(S) MET-ON EN ŒUVRE ?

Très rapidement, le professeur de mathématiques a identifié en LOGO deux géométries déjà organisées à l'école élémentaire bien avant l'introduction de l'outil informatique.

- Une géométrie de **type analytique** : le plan - c'est-à-dire l'écran - est muni d'un repère x'ox, y'oy. On peut «positionner» la tortue en un point quelconque de ce plan. Les activités sont centrées autour de problèmes de repérage et d'expression analytique (par des nombres) de transformations simples.

Les notions premières sont alors celles de POINT (primitives FPOS, POS, POINT...), de SEGMENT (si on ne lève pas le crayon en M, le segment [MN] sera dessiné si l'on déplace la tortue en un autre point N).

Il s'agit là du plan métrique puisqu'à chaque segment [MN], nous associons la DISTANCE d(M, N).

Cette piste est peu explorée à l'école élémentaire pour diverses raisons (ainsi par exemple manque-t-il dans le lot des primitives celles retournant le tracé d'un cercle de centre et de rayon donnés et la distance euclidienne entre deux points). Certains didacticiels - EUCLIDE semblent apporter une réponse à cette préoccupation [il ne semble pas toutefois que la mise en œuvre de ce logiciel puisse correspondre aux préoccupations du Cours Moyen].

- Une géométrie de **type COLIN-MAILLARD.**

(On rappelle qu'à colin-maillard on bande les yeux d'un enfant et qu'on peut le diriger vers un point précis en lui donnant des indications pour son déplacement).

Le plan de l'écran n'est pas orienté a priori comme précédemment. Il existe en revanche un objet apportant sa propre orientation : la TORTUE.

Ainsi se trouve apparemment mêlées deux géométries, l'une de type GLOBAL, l'autre de type LOCAL. L'environnement logo de type papertien (cf. littérature nord-américaine) a favorisé l'éclosion d'une géométrie de type LOCAL : le **cercle** par exemple est alors considéré comme «limite» d'un polygone dont on multiplie le nombre de côtés selon ... la finesse d'un tracé attendu ; mais rappelons aussi que

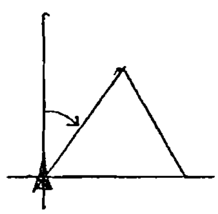
REPETE : N [AV : L TD 360 / : N] ne dessine pas un cercle, même si le pouvoir séparateur de l'écran peut nous en donner l'illusion !

Cette géométrie LOGO favorise l'emploi des primitives de mouvements relatifs : AV, RE, TD et TG.

A ce stade déjà vont apparaître dans les réalisations d'enfants (et d'adultes) des constructions portant en elles des insuffisances, des erreurs. Le rôle du maître n'est-il pas d'identifier la nature de l'erreur commise (syntaxique, sémantique ou logique) puis d'agir ou non suivant sa nature, c'est-à-dire finalement suivant le contrat didactique passé.

Jugeons-en en examinant les trois propositions de triangle équilatéral suivants

E1

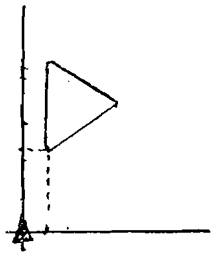


TD 30 REPETE 2 [AV 40 TD 120] AV 40
|------| |--------------------------------| |------|

Pour les deux côtés obliques la base du triangle mettre le triangle sur sa base.

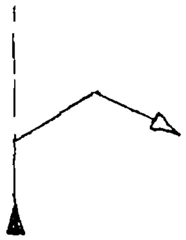
Ici l'écriture proposée est l'effet d'une connaissance antérieure qui avait eu son intérêt... mais qui se révèle inadaptée pour un réinvestissement ultérieur de l'objet «triangle équilatéral» ; cette insuffisance se constitue donc en obstacle ; il reste à l'exploiter, ce qui est une tâche délicate pour un enseignant peu averti.

E2



FPOS [10 40] REPETE 3 [AV 40 TD 120]
|----------------|
Car le premier triangle équilatéral à dessiner se trouve à cet endroit... Gare donc si ce FPOS est écrit dans le corps de la procédure définissant le triangle !

E3



REPETE 3 [AV 40 TD 60]
Erreur tout à fait classique à propos de cette figure...

Très tôt, LOGO va ainsi engendrer un grand nombre d'erreurs (de différentes natures) ou d'**obstacles** (E1 et E2) qui peuvent être bénéfiques - soulignons-le encore - si la pédagogie du maître le permet.

«FAIRE DE LA GEOMETRIE» A L'ECOLE ELEMENTAIRE OU AU COLLEGE... AVEC LOGO.

Au niveau le plus élémentaire, c'est certainement savoir RECONNAITRE, CLASSER et surtout **CONSTRUIRE** des figures dont on impose certains éléments.

Les anciens professeurs de mathématiques élémentaires (MATH-ELEM...) appelaient **problèmes spéculatifs** ces exercices de construction. Associés aux problèmes sur les «lieux géométriques» (ensemble de points remarquables), ils exigeaient de la part des élèves une approche par **analyse-synthèse**.

L'une des grandes familles de problèmes spéculatifs était réservée au délicat «défi» de la **résolution de triangles**.

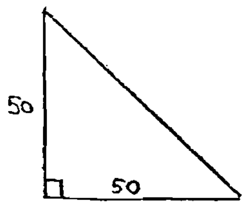
L'état actuel de ce qui se fait en logo géométrique, les productions graphiques les plus courantes dans les classes, presque tous les ouvrages parus nous incitent à penser que LOGO géométrique induit implicitement des comportements de résolution de figure. En effet, toute construction est obtenue par un tracé plus ou moins complexe d'une figure composée de lignes polygonales.

Prenons l'exemple du triangle et de son tracé.

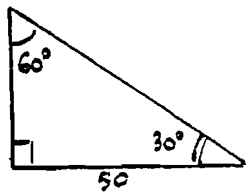
Les habitudes LOGO ne semblent favoriser que le triangle équilatéral «absolument fermé sur lui-même» dans sa définition

REPETE 3 [AV 40 TD 120].

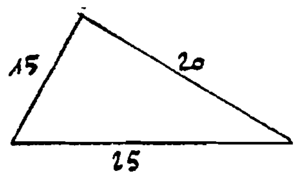
Un élève de cours moyen ou de sixième pourrait-il néanmoins **construire** (ce qui permettrait de préciser le sens de ce mot) les deux triangles suivants ?



triangle rectangle isocèle



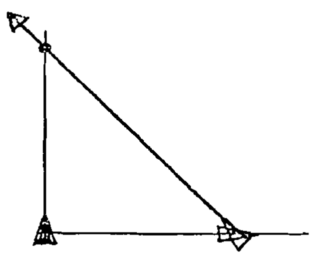
l'équerre du tableau noir



un triangle connu...

Cet exercice nous pose le problème du «statut» des constructions géométriques ?

Ainsi, un point ne peut-il être que l'un des **sommets d'une ligne brisée** (AV : x TD : y AV : z TD : t...) ou bien peut-on le considérer comme **l'intersection de 2 lignes**, de deux droites ?



AV 50 RE 50
TD 90
AV 40
TG 135
AV 60

L'exemple de la définition, de la construction de droites parallèles, est également révélateur si nous voulons reconsidérer **LOGO** géométrique sous l'aspect d'OUTIL de dessin (indépendamment de toute philosophie particulière sur la construction des connaissances telle que l'expose Papert par exemple).

Pour mener à bien cette réflexion, il est conseillé de (re)lire le premier livre des éléments d'Euclide... Nous (re)voici plongé dans le vrai débat des problèmes spéculatifs.

- Que choisir pour définitions premières ?

Le point (intersection de lignes) ; la droite... et le cercle...

- Quels «postulats» de constructibilité demander ?

Les constructions autorisées ; l'existence de certaines figures par leur construction ; les outils autorisés :

- règle et compas seuls,
- utilisation de l'équerre, du double décimètre,
- un grapheur...

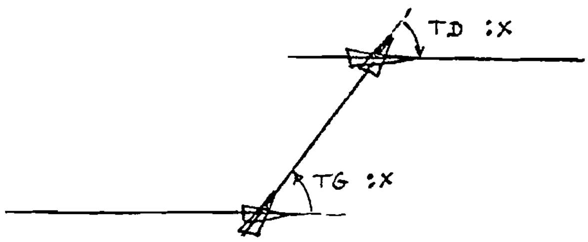
- Quelles solutions LOGO donner pour
  - résoudre un problème de construction,
  - décrire les étapes d'une démonstration ?

Situation 1 : **Tracer deux droites parallèles.**

Hormis qu'on rencontre cette situation dans le tracé de polygones tels que le carré ou le rectangle (pour lesquels on n'assiste jamais à un discours sur le parallélisme des côtés opposés), il est rare que cette construction soit proposée pour elle-même ; logo fait qu'on se pose de moins en moins souvent des questions telles que

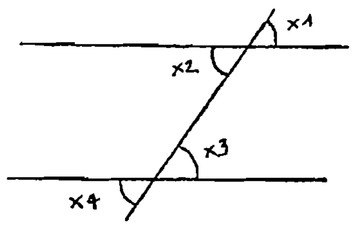
- «c'est quoi deux droites parallèles ?»
- «comment dessiner deux droites parallèles».

Une réponse logo à cette dernière question pourrait être un dessin tel que :

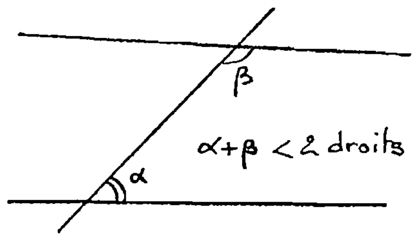


TD : x annulant l'effet de TG : x, les droites d et d' sont de la même direction...

Nous reconnaissons là la situation d'angles **alternes** ($x_2 = x_3$) (Proposition 27 du premier livre des éléments d'Euclide).



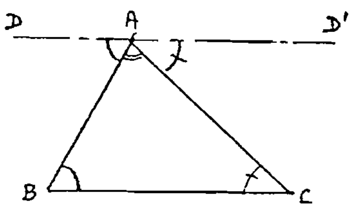
Ces deux droites sont parallèles, cela résulte du POSTULAT 5 d'Euclide dont voici l'énoncé :



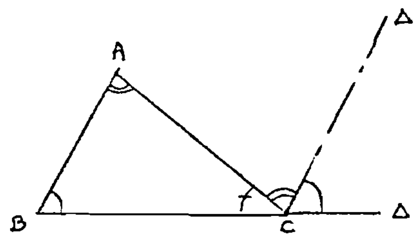
Si une droite tombant sur deux droites fait les **angles intérieurs** du même côté plus petits que deux droits ; ces droites, prolongées à l'infini, se rencontrent du côté où les angles sont plus petits que deux droits.

Situation 2 : **Montrer que la somme des angles intérieurs d'un triangle vaut 180°** (2 droits).

Les deux figures ci-dessus illustrent que cette propriété est issue du **postulat 5** d'Euclide.



Pourquoi AD et AD' sont-elles deux demi-droites opposées ?



(Proposition 32 des éléments d'Euclide).
L'angle extérieur est égal à la sommes des deux angles intérieurs et opposés.

BILAN D'ACTIVITES POSSIBLES EN LOGO GEOMETRIQUE A L'ECOLE ELEMENTAIRE OU AU COLLEGE.

Distinguons trois possibilités.

1 - LOGO, instrument de dessin.

L'OUTIL LOGO graphique doit permettre la réalisation de figures «fondamentales» du monde géométrique (pas seulement les polygones réguliers) ; il convient d'éclairer selon une démarche différente la géométrie de la règle et du compas.

2 - LOGO et les macro-primitives.

Certaines figures non-accessibles à un groupe donné d'enfants peuvent être apportées sous formes de procédures de dessin (analysables dans une seconde étape) ; par l'emploi de ces macro-primitives, on juge de la qualité d'analyser algorithmiquement et d'organiser une figure complexe (que l'enfant a pu décomposer en éléments plus simples).

3 - LOGO et les transformations.

Les transformations géométriques simples sont apparemment abordables par le biais de Logo, essentiellement la translation, la rotation et les diverses symétries (plusieurs approches ont été expérimentées).

- L'instrument de dessin.

Faut-il retrouver dans LOGO l'approche traditionnelle à la règle et au compas ?

Certes non ! à cause du compas ou plutôt de la difficulté de tracer un cercle de centre et de rayon donnés.

L'outil LOGO dispose donc

—→ d'une **règle** (graduée ou non) par les primitives AV et RE

—→ d'un **rapporteur** (gradué en degré) par les primitives TD et TG.

Toutes ces activités de dessin géométrique vont - si elles sont bien posées - renforcer chez l'enfant une meilleure compréhension du concept si difficile d'**angle** (sa mesure).

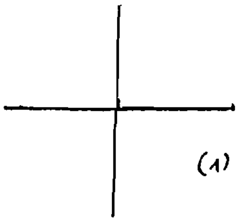
Nous avons vu - notamment par l'exemple très important de la «résolution de triangle» - que nous pouvions dépasser la réalisation de dessins de polygones réguliers, parfois induite par LOGO lui-même où tout un environnement amené avec LOGO converge vers cette «virtuosité graphique».

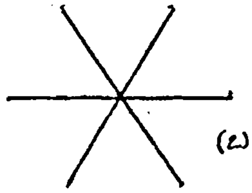
LOGO est donc aussi une planche à dessin, pas tout à fait classique (choix des primitives) sur laquelle il serait bon également de projeter des notions aussi importantes que

- parallélisme de deux droites,
- droites parallèles coupées par une sécante ; analyse des angles,
- géométrie du triangle,
- etc.

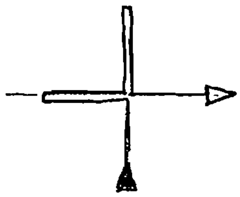
L'outil a bien évidemment ses limites ; le dessin est parfois «en avance sur la pensée» ; non que le dessin tortue aille trop vite (il est possible d'en réduire la vitesse d'exécution), mais le **faire-n'importe-quoi-en-LOGO** a parfois un tel éclat graphique qu'on peut s'en contenter, voire l'encourager dans des activités dites libres ou encore au sein de projets si vastes qu'on ne peut pas juger de la qualité mathématique, ni de l'apport géométrique pour l'enfant.

Nous avons vu que LOGO pouvait induire certains types de résolution de figures et de ce fait offrir implicitement une «échelle de valeurs» dans la réussite de l'épreuve de la réalisation de programmes. Voici un exemple tout à fait classique : réaliser une croix (voire une croix plus complexe).


(1)

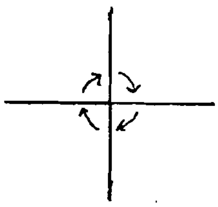

(2)

a) LOGO induit fortement quelques tracés types de ces objets.
Sur la première croix, plusieurs démarches sont à coup sûr observables :
- tracés «unicursaux»

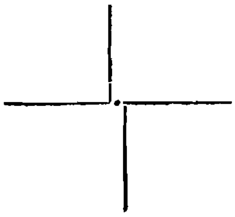


la simplicité de la figure engendre naturellement ce type de résolution (ce serait différent pour la croix (2)).

- tracés structurés (selon une approche transformationnelle)



rotation d'un quart de tour



symétrie-point

b) LOGO peut exclure certaines possibilités d'analyse de figure (en vue d'une construction ultérieure).

La croix (1) est rarement considéré comme un ensemble de deux segments perpendiculaires en leur milieu (image mentale possible : couple de deux diagonales d'un carré). Sans ordinateur cette figure se trace à l'aide du compas (de l'équerre) et du double-décimètre éventuellement.

La croix (2) exigerait dans une approche classique (hors logo) une analyse angulaire plus précise qui fait que ces deux figures (1) et (2) sont inégalement riches dans une résolution par les outils traditionnels du dessin : règle et compas.

Cette richesse géométrique semble - sur ce point - échapper à LOGO lorsqu'on montre à l'évidence que (1) et (2) sont de même nature :

(1) REPETE 4 [AV 20 RE 20 TD 90]

(2) REPETE 6 [AV 20 RE 20 TD 60] qu'on peut évidemment généraliser sans difficulté mais aussi sans grand gain géométrique. (Voir annexe 2 sur le théorème du tour complet) (s'agit-il vraiment d'une évidence dans le concept de transformation ?).

- LOGO et les macro-primitives.

Grâce à la nature procédurale du langage LOGO, nous approchons un problème de construction en livrant aux élèves un lot de procédures pré-établies appelées macro-primitives. Nous pouvons déceler dans cette démarche deux possibilités initialement distinctes.

a) macro-primitices de **tracé géométrique.**

Dans certaines situations problèmes le maître peut avoir envie de donner directement des macro-primitives pour dessiner des polygones réguliers : hexagone régulier, carré et triangle équilatéral de même arête.

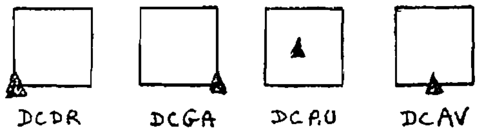
Le projet consiste alors à réaliser une figure plus complexe en agençant ces briques élémentaires (pensons aux frises, aux pavages, aux mosaïques).

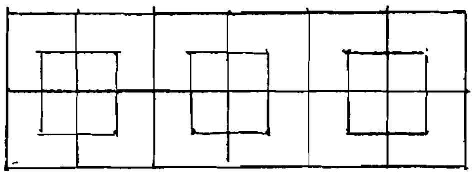
Sans entrer dans une analyse très élaborée, nous apercevons que triangle et hexagone sont associés à des réseaux à mailles triangulaires (on privilégie l'angle de 30° et ses multiples) alors que le carré est lié à la maille carrée (angle de 45°, 90°... etc.).

D'où la difficulté et l'intérêt de la situation proposée : l'enfant va se trouver devant des obstacles dont le franchissement lui apportera une meilleure connaissance des concepts en jeu.

b) Macro-primitives pour privilégier l'**élaboration d'algorithmes de résolution** (*).

(*) Voir l'article de Patrick Mendelsohn (CNRS Grenoble) dans ce numéro.





Un exemple simple en est donné par
- un ensemble de procédures dessinant des carrés de même côté par rapport à la position de la tortue :

DCGA : dessine un carré à gauche de la tortue

etc.
- et par un ensemble de procédures pour déplacer la tortue :

SPAV : saute un pas en avant d la tortue

etc. ainsi que

SDPAV : saute un demi-as à l'avant de la tortue

etc.

Les objets à dessiner ne possèdent pas en eux-mêmes de richesse géométrique mais leur organisation interne peut être décrite de diverses façons et donner lieu à des modes de programmation différents.

Les productions des enfants sont à coup sûr très diverses ; les «styles» d'organisation de la pensée algorithmique doivent être observés et il peut être riche de noter comment ils évoluent dans leur conception des algorithmes.

Nous voyons qu'à ce prix les deux types de macro-primitives précédemment étudiés peuvent être associés dans une progression «LOGO géométrique»...

- LOGO et les transformations.

LOGO graphique dessine des objets sur l'écran.

Si nous plaçons - par procédure - une figure sur l'écran en (A), puis ensuite en (B) après avoir déplacé la tortue, avons-nous pour autant réalisé une translation ?

Il en est de même pour la rotation d'une figure («effet rosace» bien connu des débutants en LOGO).

Transformer une figure, c'est **agir** sur cette figure (en réalité sur tout le plan) alors que LOGO ne peut que **redessiner** la même figure en différents endroits de l'écran.

Analysons une démarche tout à fait classique en LOGO graphique :

a) On crée une procédure (POUR F) anticipant ainsi le dessin d'une figure appelée F.

b) Cette figure est dessinable à volonté sur l'écran selon l'alternance.

F ; <séquence de déplacement de la tortue> ; F ; <...> ; ...

c) Le dessin terminé est analysé en terme de transformations. Rien n'autorise à penser que la mise au point de la <séquence de déplacement de la tortue> relève pour l'enfant d'une pensée transformationnelle.

Certains auteurs de logiciels ont essayé de contourner cette difficulté en créant des ensembles de macro-primitives associées aux diverses transformations ponctuelles planes accessibles aux élèves de l'école élémentaireou du collège.

La critique semble venir du fait que le choix fait interdit de «déposer en les désignant» des figures sur l'écran.

Il reste à creuser cette piste et à imaginer des utilitaires allant dans ce sens ; par exemple un «friseur» pour rendre compte des sept groupes de frises...

ANNEXE 1 : LES GEOMETRIES

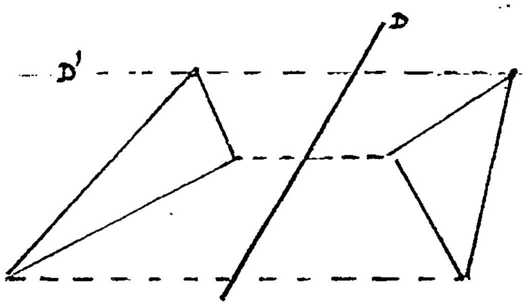
Nous savons depuis la fin du XIXème siècle (cf. CAYLEY et KLEIN) qu'une géométrie X se définit par une relation d'équivalence :

«Figures X-ment **équivalentes**».

Une figure F se TRANSFORMANT en une autre F', il s'agit de mettre en évidence les propriétés de F qui se retrouvent dans F'.

Dans la géométrie construite à l'école élémentaire où l'on aborde **translation**, **rotation** et **symétrie** par rapport à une droite (pliage), l'**INVARIANT** est la longueur des segments (bien sûr, bien d'autres propriétés sont conservées, comme l'angle droit, le parallélisme... etc.).

Mais signalons qu'un élève de CM2 ou de sixième peut tout à fait envisager, dessiner deux triangles **équivalents** au sens de l'invariant qu'est l'AIRE
(ici ct = b 6 h/2).



Les deux triangles ci-contre se correspondent dans une SYMETRIE OBLIQUE d'axe D et de direction D'.
La figure nous montre que longueurs et angles ne sont pas des invariants pour cette transformation.

Pour mémoire rappelons les différents **espaces géométriques** intéressants pour la mathématique.

GEOMETRIE	INVARIANT PRINCIPAL	ESPACE
géométrie métrique	conservation des longueurs	espace CARTESIEN
géométrie des similitudes	conservation des angles et des **rapports** des longueurs des segments	espace EUCLIDIEN
géométrie affine	parallélisme égalité des rapports des longueurs	espace affine (ou ARGUESIEN)
géométrie projective	la ligne droite cf. alignement de 3 points	espace PROJECTIF
géométrie topologique	invariants topologiques cf. note H. Poincaré 1913	espace topologique

Citons H. Poincaré (texte 1913).

«Qu'est-ce qu'une figure mal faite ? Celle que peut exécuter un dessinateur maladroit : il altère les proportions plus ou moins grossièrement ; ses lignes droites ont des zigzags inquiétants ; ses cercles présentent des bosses disgracieuses. TOUT CELA NE FAIT RIEN ; cela ne troublera nullement le géomètre, cela ne l'empêchera pas de RAISONNER.

Mais il ne faut pas que l'artiste inexpérimenté représente une courbe fermée par une courbe ouverte, trois lignes qui se coupent en un même point par trois lignes qui n'ont aucun point commun, une surface trouée par une surface sans trou. On ne pourrait plus se servir de sa ligne et le raisonnement deviendrait impossible.

L'intuition n'aurait pas été gênée par les défauts du dessin qui n'intéresseraient que la géométrie METRIQUE ou PROJECTIVE ; elle deviendra impossible dès que ces défauts se rapporteront à la TOPOLOGIE».

Ailleurs, POINCARE parle de la géométrie topologique comme celle de la membrane de caoutchouc qu'on peut déformer sans la déchirer.

ANNEXE 2 : A PROPOS DU THEOREME DU TOUR COMPLET...

Cf. «Jaillissement de l'esprit» (S. Papert, p. 101 et suivantes, Flammarion 1981).

«Que peut-il bien y avoir de commun entre le carré et le triangle, si nous nous mettons à la place de la tortue ?...».

Papert répond :

«Nous prenons le départ et nous aboutissons au même point et tournés dans la même direction...».

«Dans l'intervalle nous avons fait un tour complet..., soit donc 360°...».

Ainsi posé le théorème du tour complet devient EFFICACE (page 101) : l'enfant peut l'utiliser POUR DE BON...» ...Il est plus GENERAL...» «Il est plus INTELLIGIBLE...».

Evidemment, il s'agit de produire graphiquement polygones réguliers et rosaces de polygones (illustrations centrales du livre de Papert), ce théorème peut et doit être rapidement découvert et mis en œuvre...

Là encore, il faut veiller à ne «pas mélanger les genres», c'est-à-dire bien préciser sa géométrie.

- Si nous voulons que l'enfant se lance dans des **projets (plus ou moins libres) de dessins** (fleurs, rosaces...), il est alors important de leur livrer très tôt le **théorème du tour complet**, ou plutôt sa matérialisation dans l'écriture de la procédure des polygones réguliers :

REPETE : N [AV : x TD 360 / : N].

- Si nous désirons qu'il accède à un embryon de culture géométrique, alors il est peut-être préférable de se poser des problèmes de **constructions géométriques** mettant en œuvre des droites (segments), des **angles** (rotations de la tortue).

Ainsi le théorème du tour complet pourra-t-il se pratiquer, par exemple, dans des constructions de mise en évidence de la somme des angles intérieurs d'un triangle.