

ACTIVITES AU C.M.

Bernard REY

Mise en application dans une classe de CM 1 (Ecole de Villancourt – Pont-de-Claix) d'un thème développé par Claude HAMEAU dans le Journal des instituteurs du 1er octobre 1978.

Le lecteur pourra trouver des compléments d'ordre mathématique dans cet article.

Première séance : problème de pagination, trous dans des feuilles pliées.

– **Matériel :** feuilles vierges de papier très fin.
machine à trous (perforatrice.)

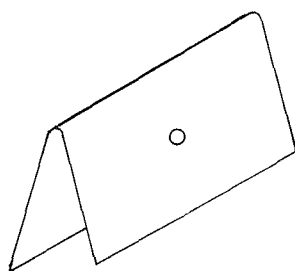
– **Organisation de la classe :** les enfants travaillent par groupe de table.

Déroulement :

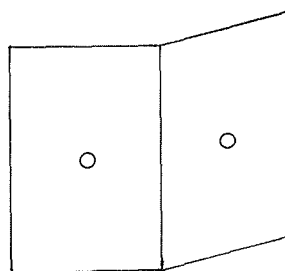
Pour débiter la séance je fais, devant les enfants, quelques manipulations : (j'ai devant moi des feuilles et une perforatrice).

– *1ère manipulation :*

1 feuille de papier pliée, perforée.



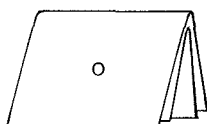
1 pliure



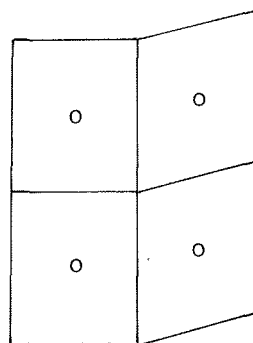
2 trous.

– 2ème manipulation :

1 feuille de papier pliée en deux deux fois de suite et perforée.



2 pliures



4 trous.

– 3ème manipulation :

1 feuille de papier pliée en deux trois fois de suite et perforée.

3 pliures

8 trous.

Les enfants travaillent par groupe avec 4 feuilles et une perforatrice. Ici les élèves vont devoir manipuler et ainsi devenir actifs. Les enfants plient la feuille, mise à leur disposition, en 4 et la perforent selon mes consignes.

(mes interventions seront précédées de la lettre M
les interventions des enfants seront précédées de la lettre E).

M – A votre avis, combien va-t-on pouvoir compter de trous ?

E – 12 trous.

M – Pourquoi ?

E – A la première pliure on a trouvé 2 trous, à la deuxième pliure on a trouvé 4 trous, à la troisième pliure on a trouvé 8 trous ; on a rajouté 4 à chaque fois, donc ici on va compter 12 trous.

E – C'est faux, de 2 trous pour la première pliure, à 4 trous pour la deuxième pliure on n'a pas rajouté 4.

M – Alors ?

E – ?

– Les enfants se rendent compte de leur erreur, mais sont incapables de donner la bonne réponse. A cet instant j'ai demandé aux enfants de déplier leur feuille et de compter les trous obtenus.

- On trouve 16 trous : perplexité pour beaucoup, certains ont compris.
- Les enfants manipulent avec une autre feuille, font cinq pliures et une perforation.

M – Combien va-t-on trouver de trous ?

- Les réponses sont partagées :

E – On va trouver 20 trous (certains élèves ont encore en tête l'idée d'ajouter 4)

E – On va trouver 32 trous.

- Vérification (on déplie la feuille et on compte).

On fait le même travail avec 6 et 7 pliures (pour 8 pliures le travail n'est plus possible, l'épaisseur de papier plié devenant trop importante pour passer dans la perforatrice).

E – Les enfants donnent tous de bonnes réponses pour 6 et 7 pliures, mis à part un garçon qui n'a pas compris et ne comprendra toujours pas avec les explications de la classe et de moi-même.

M – Sans faire de manipulations comment va-t-on prévoir le nombre de trous pour 8 et 9 pliures ?

E – On multiplie par 2.

M – On multiplie quoi par 2 ?

E – Le nombre de trous obtenus à la pliure précédente.

M – Il faudrait maintenant, faire apparaître tous nos résultats.

E – On va faire un tableau.

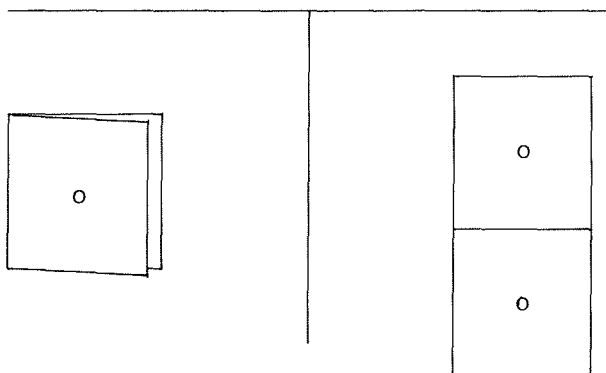
La réponse a été donnée par une petite fille qui répondait à mes interrogations en proposant systématiquement un "tableau", quel qu'il soit. Dans la situation actuelle, elle ne voyait pas comment l'organiser, mais sa réponse correspondait plus à un automatisme créé dans des classes antérieures qu'à une idée précise.

D'autres enfants reprennent cette "idée"; quelques façons de concevoir le tableau s'établissent.

M – On va chercher deux par deux une façon d'établir ce tableau, et vous ferez apparaître les solutions trouvées jusqu'à 10 pliures.

(Après un moment de travail sur un cahier d'essai, un enfant ayant levé la main, vient au tableau).

Il expose ses trouvailles :



C'est-à-dire que pour ce garçon la première colonne représentait le nombre de pliures, et la deuxième colonne, le nombre de trous obtenus. Il voulait représenter tous les résultats sous forme de schéma. Mais il s'est rendu compte par lui-même qu'il était très difficile de procéder ainsi.

Voici la représentation finalement retenue :

Nombre de pliures	Nombre de trous obtenus avec une perforation
...	...
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
.	.
.	.
.	.
.	.
10	1024

En faisant le tableau avec les enfants, j'avais laissé un blanc (...) au dessus de 1 pliure, et au dessus de 2 trous pour qu'il y ait une réaction. Celle-ci n'a pas eu lieu.

En fin de séance nous sommes arrivés à la représentation suivante :

M – A quoi est égal 4, 8, 16 ?

E – $4 = 2 \times 2$ $8 = 4 \times 2$ $16 = 8 \times 2$

M – Au lieu de dire $8 = 4 \times 2$ on ne pourrait pas dire autre chose ?

E – $8 = 2 \times 4$

M – Oui, et encore ?

E – $8 = 2 \times 2 \times 2$ $16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$

M – D'accord.

Nombre de pliures	Nombre de trous obtenus avec une perforation
0	1
1	$2 = 2 \times 1$
2	$4 = 2 \times 2$
3	$8 = 2 \times 2 \times 2$
4	$16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$
5	$32 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

L'attention baissait de plus en plus, alors j'ai clos la séquence par une deuxième question.

M – A quoi correspond le blanc laissé dans les deux tableaux.

E – ?

M – Observons ces deux tableaux, dans la 1ère colonne qu'est-ce que l'on a ?

E – 1, 2, 3, 4, 5 . . .

M – Et avant le un, que trouve t-on ?

E – Zéro.

M – Alors ? . . .

E – On met zéro dans la 1ère colonne au dessus du un.

M – Alors maintenant si on perfore la feuille combien de trous allons-nous trouver ?

E – Un trou.

Deuxième séance :

Rappel de la fin de la séquence précédente.

Nombre de pliures	Nombre de trous obtenus avec une perforation
0	1
1	2
2	$4 = 2 \times 2$
3	$8 = (2 \times 2) \times 2$
4	$16 = (2 \times 2) \times (2 \times 2)$
5	$32 = (2 \times 2) \times (2 \times 2) \times 2$
.	.
.	.
.	.

Les parenthèses ont été ainsi écrites au tableau à la suite d'une demande formulée par les enfants. Ils tenaient aux parenthèses ("On voit plus clair").

A cet instant j'ai introduit la notation de puissance qui n'était pour eux pas à retenir mais à utiliser s'ils le désiraient. Contrairement à mes appréhensions, après quelques exercices de "gymnastique", cette notation fut vite comprise et acceptée par une majorité.

On a composé le tableau suivant :

Nombre de pliures	Nombre de trous obtenus avec une perforation
0	2^0
1	2^1
2	2^2
3	2^3
4	2^4
5	2^5
.	.
.	.
.	.

Réactions : « C'est facile on prend le nombre des pliures que l'on met en haut du deux de la 2ème colonne.»

«Tiens c'est marrant on trouve toujours des 2 dans la 2ème colonne mais avec des chiffres, en haut, différents.»

Ce n'est qu'à ce moment que les enfants se sont aperçus que l'on faisait intervenir constamment un 2 dans la 2ème colonne mais avec des puissances différentes.

Puis je leur ai raconté la légende du jeu d'échecs (distribution d'un jeu d'échecs et des pièces, on compte le nombre de cases).

«Je souhaite, aurait dit l'empereur, que pour la 1ère case on me donne un grain de blé, pour la 2ème on me donne 2 grains de blé, pour la 3ème 4, et ainsi de suite en doublant jusqu'à la 64ème case».

—Distribution d'un damier photocopié, les enfants ont rempli une dizaine de cases du damier.

(à ce propos, le lendemain, intéressés, plusieurs enfants avaient cherché le résultat sur des machines, ils avaient vu leurs recherches vouées à l'échec, les machines à calculer ne comprenant pas assez de chiffres pour aller jusqu'à la 64ème case).

M — De quelle façon va-t-on établir nos résultats ?

La forme du tableau fut votée à l'unanimité.

numéro de la case	nombre de grains
1	1
2	2
3	$4 = 2 \times 2$
4	$8 = (2 \times 2) \times 2$
5	$16 = (2 \times 2) \times (2 \times 2)$
⋮	⋮
⋮	⋮
⋮	⋮

E — Au n° 1 de la case correspond 1 grain
 Au n° 2 de la case correspond 2 grains
 Au n° 3 de la case correspond 4 grains

M — Ne pourrait-on pas marquer d'une façon plus claire tous nos résultats de la 2ème colonne ?

E — Avec des puissances.

1 → 2 ⁰	} Les élèves établissent tous ces résultats d'une façon très simple.
2 → 2 ¹	
3 → 2 ²	
4 → 2 ³	

Ici contrairement à l'exemple vu plus haut à 1 ne correspond plus 2¹ mais 2⁰.

On n'écrit plus en puissance le chiffre (n) de la 1ère colonne mais (n - 1)

$$\begin{aligned} \text{c'est-à dire : } 1 &\rightarrow 2^{(1-1)} = 2^0 \\ 2 &\rightarrow 2^{(2-1)} = 2^1 \\ &\text{etc...} \end{aligned}$$

M – J'aimerais connaître le nombre de grains obtenus à la 64ème case.

Après quelques instants de réflexion la réponse vient : $64 \rightarrow 2^{63}$.

Les enfants ne se rendent pas compte du nombre énorme que cela représente.

$\rightarrow 2^{63}$ c'est 2 multiplié 63 fois par lui-même, c'est grand.

Les élèves sont restés ébahis devant cette réalité.

(2^{63} s'écrit avec dix neuf chiffres)

Troisième séance : "Association" de différents nombres de la 2ème colonne.

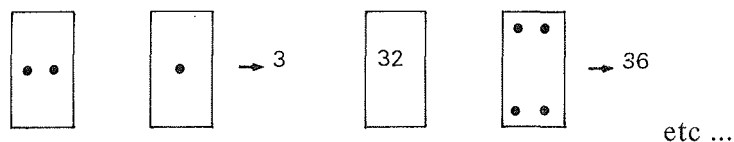
– **Matériel :** Jeu de cartes constitué des premiers éléments de la liste des nombres correspondant au nombre de grains, c'est-à-dire la liste des puissances de deux.

– **Organisation de la classe :** Les enfants sont répartis en 5 groupes de 4 ou 5.

– Je demande aux enfants de tirer au hasard 2 cartes et de me dire combien ils trouvent en calculant la somme des 2 nombres inscrits.

L'activité est lancée, tous les groupes associent différentes cartes :

Exemples



(Mon jeu de cartes était fait de la façon suivante :

– jusqu'au nombre 16 les cartes ressemblaient à des rectangles de domino

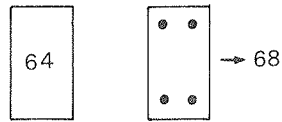
– à partir de 32, les nombres étaient inscrits sur la carte.)

– L'exercice est recommencé plusieurs fois mais rien n'apparaît.

M – Tous les nombres obtenus de l'association de 2 cartes, ne les retrouve-t-on pas dans une des deux listes : numéro de la case, nombre de grains ?

E – Dans la 1ère liste correspondant aux numéros des cases du jeu d'échecs.

E – Oui, mais si on associe 64 et 4 on obtient 68, et 68 n'est pas dans la 1ère liste puisqu'il n'y a que 64 cases.

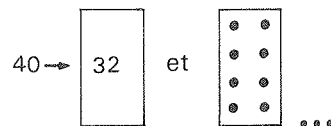


Après ces remarques très pertinentes, j'eus quelques hésitations, ressenties par les élèves ; j'ai répondu qu'on pouvait très bien imaginer un jeu d'échecs immense avec beaucoup de cases, donc en associant 2 cartes on trouverait toujours un numéro de case correspondant.

J'ai très bien senti que cette réponse ne convenait pas à la classe. Mais voilà je ne pouvais pas dire autre chose !

M – La consigne va changer, ce n'est plus à partir de 2 cartes que l'on forme un nombre, mais il faudra à partir d'un nombre, trouver des cartes telles que la somme de leurs nombres soit ce nombre.

Ex : 40, 100, 31, 73.



– les enfants ont pris cela comme un jeu et j'ai même instauré au niveau de la classe des petits concours :

5 points au 1er groupe

4 points au 2ème groupe

..... jusqu'au dernier.

Après avoir laissé un certain temps de jeu, je suis intervenu.

M – On va essayer d'aller de plus en plus vite, essayez de trouver une stratégie ?

Après quelques exemples les enfants avaient très vite compris la stratégie à adopter.

