

ADDITIONS UTILISANT UNE FOIS ET UNE SEULE CHACUN DES DIX CHIFFRES 0, 1, ..., 9

Jean KUNTZMANN
I.M.A.G. (Grenoble)

Le but poursuivi n'est pas seulement d'obtenir toutes ces additions, mais encore d'arriver à une connaissance en profondeur.

Les nombres sont supposés écrits en écriture ordinaire. On n'admettra pas de 0 à gauche. Par contre l'écriture 0 (seul) est admise.

Les termes de l'addition n'ont pas d'importance en eux-mêmes. On peut permuter deux chiffres appartenant à deux termes différents mais de même rang décimal (en respectant la condition donnée ci-dessus pour le chiffre 0).

On nommera **individu** l'ensemble des additions qui se déduisent les unes des autres par les permutations ci-dessus. Ce sont les individus qui nous occuperont dans toute la suite.

ORDRE D'UN INDIVIDU.

C'est le nombre des rangs décimaux qui interviennent au résultat.

Par exemple,
$$+ \begin{array}{r} 7 \\ 129 \\ 136 \end{array}$$
 est d'ordre 3

VALEURS POSSIBLES POUR L'ORDRE.

Il n'y a aucun individu d'ordre 1. En effet celui-ci comprendrait au moins 8 nombres d'un chiffre et un résultat. Or la somme de 8 nombres d'un chiffre est au moins égale à $0 + 1 + \dots + 8 = 36$. Il y a donc plus d'un chiffre au résultat.

Voici un exemple d'un individu d'ordre 2 : $8 + 7 + 6 + 5 + 43 + 21 = 90$.

Il n'y a pas d'individu d'ordre a dont les termes ont au plus $a - 2$ chiffres. En effet la somme de ces termes est au plus dix fois le plus grand et comprend donc $a - 1$ chiffres au plus.

Il n'y a aucun individu d'ordre 5 ou supérieur à 5. En effet pour un ordre au moins égal à 6, il doit y avoir au moins 6 chiffres au résultat et un terme ayant au moins 5 chiffres, ce qui fait plus que le nombre de chiffres disponibles.

Pour l'ordre 5 on a 5 chiffres au résultat et un facteur à 5 ou 4 chiffres.

S'il y a un facteur à 5 chiffres il est seul est donc identique au résultat, ce qui est impossible.

S'il y a un facteur à 4 chiffres, le seul autre facteur a un seul chiffre. Le résultat est au plus égal à

$$\begin{array}{r} 9876 \\ + \quad 5 \\ \hline 9881 \end{array}$$

et n'a donc pas 5 chiffres.

En résumé les seules valeurs possibles pour l'ordre sont 2, 3, 4. (Il est facile de trouver des exemples d'ordre 3 et 4).

RESTES PAR 9.

La somme de tous les chiffres de 0 à 9 est $45 = 5 \times 9$.

De plus la somme des chiffres des facteurs et la somme des chiffres du résultat différent d'un multiple de 9. Plus précisément, ce multiple est la somme des retenues de l'opération.

Les deux seuls cas possibles sont donc :

- La somme des chiffres des termes est 27, celle du résultat est 18. Il y a une seule retenue égale à 1. Ces individus forment la **première famille**.
- La somme des chiffres des termes est 36, celle du résultat est 9. La somme des retenues est 3. Ces individus forment la **deuxième famille**.

Pour chaque ordre et chaque famille, on peut dresser la liste des chiffres de total possibles (à l'ordre prés). C'est ce que nous nommerons le **repère**. On trouve :

Ordre 2

La **1ère famille** n'existe pas

2ème famille (9,0) (8,1) (7,2) (6,3) (5,4)

Ordre 3

1ère famille (9,8,1) (9,7,2) (9,6,3) (9,5,4)
(8,7,3) (8,6,4)
(7,6,5)

2ème famille (8,1,0) (7,2,0) (6,3,0) (6,2,1)
(5,4,0) (5,3,1) (4,3,2)

Ordre 4

1ère famille (9,8,1,0) (9,7,2,0) (9,6,3,0) (9,6,2,1)
(9,5,4,0) (9,5,3,1) (9,4,3,2)
(8,7,3,0) (8,7,2,1) (8,6,4,0) (8,6,3,1)
(8,5,4,1) (8,5,3,2) (7,6,5,0) (7,6,4,1) (7,6,3,2)
(7,5,4,2) (6,5,4,3)

2ème famille (0,1,2,6) (0,1,3,5) (0,2,3,4)

ESPECE.

Pour un individu d'un ordre et d'une espèce donnée, on peut préciser :

- le nombre de chiffres dans chaque ordre décimal,
- la place et la valeur des retenues.

C'est ce que nous nommerons l'**espèce** de l'individu.

Une espèce sera représentée par une suite de chiffres et de croix. Par exemple :

(3 ; 0 + 3, ++ 4)

est un individu d'ordre 3. Les colonnes de facteurs comportent respectivement 0, 3, 4

chiffres (en commençant par la gauche). Les + indiquent les unités de retenue : il y a une retenue de 1 de la 2ème vers la première colonne et une retenue de 2 unités de la 3ème vers la 2ème colonne.

ESPECES A PRIORI POSSIBLES.

Nous commencerons par quelques remarques :

- la somme de tous les chiffres écrits dans la désignation d'une espèce est toujours égale à 10 ;
- les chiffres figurant dans cette désignation (sauf le premier) forment une suite non décroissante ;
- une colonne 0 (à 0 chiffre) est obligatoirement bénéficiaire d'un nombre de retenues égal au chiffre correspondant du total ;
- une colonne 1 (à 1 chiffre) ne peut provoquer une retenue (de 1) que si elle est elle-même bénéficiaire de retenues.

Ordre 2

2ème famille (2 ; 0 + + + 8) (2 ; 1 + + + 7) (2 ; 2 + + + 6) (2 ; 3 + + + 5)
 (2 + 4 + + + 4) n'existe pas car 3 retenues ajoutées à des chiffres égaux au moins à 1, 2, 3, 4 en deuxième colonne forment un total supérieur à 10.

Ordre 3

1ère famille (3 ; 0 + 3, 4) (3 ; 1 + 3, 3) (3 ; 1 + 2, 4) (3 ; 2 + 2, 3)
 (3, 2, 2 + 3)

2ème famille (3 ; 0 + 1 + + 6) (3 ; 0 + 2 + + 5)
 (3 ; 0 + 3 + + 4) (3 ; 0 + + 3 + 4)
 (3 ; 1 + 1 + + 5) (3 ; 1 + 2 + + 4)
 (3 ; 1 + 3 + + 3) (3 ; 1 + + 3 + 3)
 (3 ; 2 + 2 + + 3)

Il n'y a pas d'autre possibilité. En particulier, il n'y a pas d'espèce (3 ; 2 + + 2 + 3) car une colonne 2 ne provoque 2 retenues que si elle en reçoit au moins 3. En effet, le total le plus grand de deux chiffres est $9+8 = 17$, il faut donc 3 retenues pour aller à 20.

Ordre 4

1ère famille la seule possibilité est (4 ; 0 + 2, 2, 2)

2ème famille (4 ; 0 + 1 + 1 + 4) (4 ; 0 + 1 + 2 + 3)
 (4 ; 0 + 2 + 2 + 2) (4 ; 1 + 1 + 1 + 3)
 (4 ; 1 + 1 + 2 + 2)