LE PUZZLE

(d'après une idée de G. Brousseau)

I.R.E.M de Montpellier

Christiane MORIN
Lycée technique Jean Mermoz
34000 Montpellier

Introduction

Notre groupe de recherche sur l'enseignement de la proportionnalité, de l'IREM de Montpellier, a passé deux années scolaires (83-84 et 84-85) à l'observation d'élèves et à l'étude de leurs comportements devant un problème de proportionnalité.

A la suite de cette étude, nous avons voulu intervenir dans des classes et nous avons expérimenté plusieurs situations didactiques. Nous exposerons ici la situation du puzzle inspirée de Guy Brousseau qui l'a fait fonctionner à l'école élémentaire.

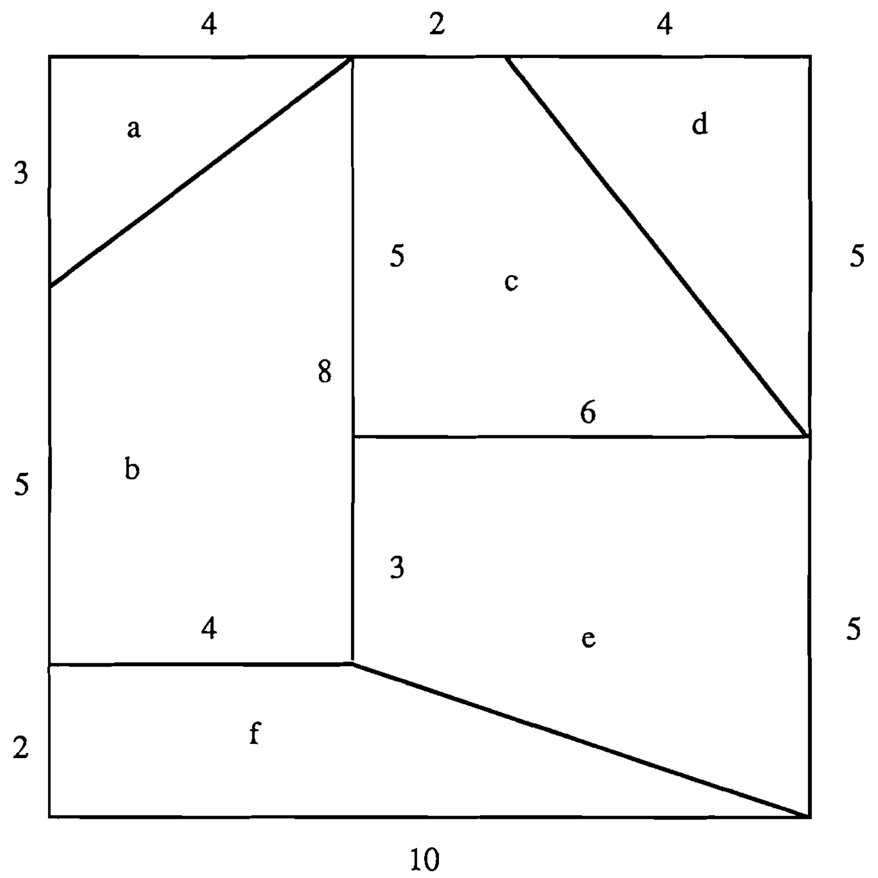
Cette situation permet :
– de rendre les élèves actifs,
– de favoriser l'utilisation de méthodes scalaires ou additives dans la résolution d'un problème de proportionnalité ($f(kx) = kf(x)$; $f(x + y) = f(x) + f(y)$),
– de favoriser l'apprentissage par les pairs à l'intérieur du groupe et entre les groupes par l'exposé au tableau du travail de chacun, et de permettre ainsi un passage à des méthodes fonctionnelles ($f(x) = ax$) et surtout de permettre la validation des résultats par les enfants eux-mêmes qui se rendent compte ainsi de la pertinence de leurs méthodes.

1. Description de la situation.

L'expérience a été menée dans deux classes de 6ème en cours d'année scolaire, avant toute leçon sur la proportionnalité.

Les élèves sont rassemblés par groupes de 4, 5 ou 6 suivant l'effectif de la classe et le nombre d'observateurs disponibles. Chaque groupe travaille en présence d'un observateur, le professeur de la classe jouant le rôle d'observateur après avoir donné la consigne aux élèves.

Les élèves sont munis de papier blanc, règle, équerre, crayon, gomme, ciseaux et nous distribuons à chaque élève le modèle de puzzle suivant :



Il est demandé à chaque groupe de construire les pièces d'un puzzle semblable mais agrandi, les élèves se répartissant la construction des différentes pièces et faisant leurs calculs individuellement. La consigne donnée par écrit à chaque élève est la suivante :

Voici un puzzle, vous allez fabriquer le "même" puzzle en plus grand en respectant la règle suivante :

le segment qui mesure ... centimètres sur le modèle devra mesurer ... centimètres sur votre production.

Suivant les groupes, les blancs ont été complétés avec les couples suivants

$5 \longrightarrow 7$

$3 \longrightarrow 4{,}5$

$5 \longrightarrow 7{,}5$

$4 \longrightarrow 6{,}4$

$5 \longrightarrow 9$

La validation se fait par assemblage des morceaux pour reconstituer le puzzle agrandi.

Chaque groupe doit rédiger un compte rendu de sa recherche en vue de l'exposer à la classe lors d'une séance suivante.

2. Les objectifs.

Cette situation correspond à nos objectifs :

– Permettre l'utilisation de méthodes analogiques et rendre ainsi tous les élèves actifs.

– Introduire les méthodes analytiques par la communication dans le groupe et entre groupes.

– Rendre la validation des résultats indépendante du professeur.

– Faire intervenir des valeurs numériques décimales non entières (les échelles sont 1,4 ; 1,5 ; 1,6 ; 1,8).

3. Les procédures utilisées par les élèves.

Sur 38 élèves dont nous avons les comptes rendus d'observation, 6 ont une mauvaise compréhension du problème, 5 n'envisagent de n'agrandir que les côtés correspondants à la donnée, gardant les mêmes dimensions pour les autres côtés (procédure classée n° 10 ; voir plus loin) et un élève réclame des données supplémentaires et en leur absence ne fait rien.

Sur les 32 élèves ayant, semble-t-il, compris l'énoncé :

– 22 ont en première réaction d'ajouter la différence entre les deux données à toutes les dimensions des pièces (opérateur additif ; procédure n° 16).

– 7 donnent directement une solution correcte, certains en utilisant un opérateur multiplicatif.

Exemple : Jean-François explique à Corinne
"j'ai multiplié par 1,4"
"je divise 7 par 5, je trouve 1,4".

Les autres en retournant à l'unité sur l'initiative de Thomas qui explique
"tous les cm, on ajoute 0,5 cm puisque pour 3 cm on a ajouté 1,5 cm".

– 2 élèves semblent comprendre qu'agrandir c'est multiplier par un nombre mais ne trouve que l'approximation : "tout multiplier par 2".

L'une d'entre elles maintiendra ce raisonnement jusqu'à la fin de l'heure malgré les contradictions.

– Enfin Mustapha décompose les dimensions en multiple de 5 plus reste et n'effectue l'agrandissement que sur le multiple de 5 (procédure 5).

Ces trois derniers élèves semblent avoir une notion de la proportionnalité bloquée ici par l'existence de coefficients fonctionnels ou scalaires décimaux et ils ne pourront pas résoudre le problème.

Par la suite, sur les 22 élèves ayant constaté que la procédure 6 n'aboutissait pas, 8 retouchent arbitrairement les pièces pour qu'elle puissent former le puzzle (procédure 8).

Une autre réaction significative est que sur les 31 élèves qui n'ont pas trouvé la solution directement, 18 passent à un moment ou un autre par l'affirmation : $f(x) = 2f(x)$ indépendamment de l'agrandissement donné. Ceci amène les 10 élèves qui, ayant une échelle du type $5 \longrightarrow \ldots$, ont ainsi la longueur du côté du carré, à construire un grand carré correspondant au puzzle agrandi et à dessiner à l'intérieur les pièces, en essayant par tâtonnement de respecter une certaine similitude. Mais cette procédure (n° 9) prenant beaucoup de temps, ils ne peuvent en général envisager autre chose après avoir constaté l'échec de cette méthode.

A la fin de l'heure nous avions un total de 15 élèves ayant résolu le problème et il est remarquable que seul 1 élève a éprouvé des difficultés pour tracer des angles droits.

Liste des procédures et propriétés utilisées.

Appelons d la valeur donnée et f(d) son image.

Procédures correctes	Nombre de fois où cette procédure a été utilisée
1) $f(x) = x \times \frac{f(d)}{d}$	9
2) Retour à l'unité $f(1) = \frac{f(d)}{d}$ puis $f(x) = x \times f(1)$	6
3) $f(2x) = 2f(x)$	

Autres procédures

4) $f(x) = x \times 2$	4
5) si $x = n \times d + r$, alors $f(x) = n \times f(d) + r$	1 (Mustapha)
6) si $x = d + a$, alors $f(x) = f(d) + a$	38
7) comme $f(d) = 2d - b$, $f(x) = 2x - b$	3
8) Retouches	12
9) Faire un grand carré à l'échelle et adapter les pièces	12
10) Agrandir la seule donnée	8

Remarques.

La procédure 3, correspondant à $f(2x) = 2f(x)$, n'a jamais conduit dans cette observation à une procédure complète.

Par contre, dans deux autres groupes où l'agrandissement était $4 \longrightarrow 6{,}4$, mais dont nous n'avons pas les observations complètes, l'un d'entre eux mené par Florent a trouvé par cette méthode les images de 8 et de 2 puis de 6 par $f(a+b) = f(a) + f(b)$ puis, à un moment, est passé à la forme fonctionnelle, tandis que l'autre groupe mené par Cédric a entièrement résolu le problème par $f(2x) = 2f(x)$ et $f(a+b) = f(a) + f(b)$.

D'après le classement proposé par Ch. Morin (1986), la procédure 1 est une procédure analytique, les procédures 2 et 3 sont des procédures analogiques.

Parmi les procédures erronées, les procédures 4 et 5 révèlent un équilibre sur le double ou sur les nombres entiers. L'élève n'envisage qu'une multiplication par un entier ; il tient compte du reste, dans la procédure 5, et on obtient la pseudo-proportionnalité, déjà signalée par G. Audibert (1984).

La procédure 6 montre que l'équilibre sur l'addition est toujours un obstacle.

La procédure 7 est une procédure fonctionnelle, liée au double et à la pseudo-proportionnalité.

Les procédures 8 et 9 sont des procédures expérimentales consistant à réduire les contradictions par des compensations locales et une transformation du problème initial.

La procédure 10 montre une incompréhension du problème posé.

4. Reprise en classe.

Dans une classe, chaque groupe a eu un représentant sachant résoudre le problème par la méthode fonctionnelle et même les enfants que nous avions vu chercher et essayer d'autres méthodes n'avaient plus à l'esprit que cette procédure, oubliant leurs tâtonnements et c'est le professeur qui a dû leur rappeler leurs démarches.

Cette deuxième séance eut beaucoup plus d'intérêt dans la deuxième classe.

Cédric, le premier élève envoyé au tableau a tous les morceaux corrects et explique comment il a fait (agrandissement 4 $\longrightarrow$ 6,4).

Il a d'abord eu besoin des images de 2 et de 10 (morceau f)

"2 est la moitié de 4 donc son image est la moitié de 6,4"

"10 = 2 x 4 + 2 donc son image est 2 x 6,4 + 3,2"

appliquant très naturellement $f(ax + b) = af(x) + f(b)$ puis il est passé aux autres mesures.

"8 = 2 x 4 son image est 2 x 6,4

5 = 5 + 1 son image est 6,4 plus l'image de 1

l'image de 1 est la moitié de celle de 2".

Le professeur intervient pour faire marquer l'image de 1 mais les élèves continuent à proposer des méthodes de calcul de type analogique.

5 est la moitié de 10 donc son image est la moitié de celle de 10

3 = 2 + 1 donc son image est la somme de celle de 2 et celle de 1

ou

3 = 8 - 5 donc son image est la différence de celle de 8 et celle de 5

6 = 4 + 2 donc son image est la somme de celle de 4 et celle de 2

ou

6 = 5 + 1 donc son image est la somme de celle de 5 et celle de 1.

La présentation du modèle terminé montre bien que cette méthode de résolution est satisfaisante.

Les autres élèves sont sollicités pour trouver les valeurs correspondant à leur agrandissement du puzzle et le professeur suggère de présenter les résultats en tableau mettant encore 1 dans le tableau.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Le tableau correspondant à l'agrandissement 5 ⟶ 7 est rempli de la même manière, le professeur faisant marquer les opérateurs scalaires "comme au CM_2".

Exemple :

x 2

5			10
7			14

x 2

Ce n'est que pour le tableau du couple 5 ⟶ 7,5 que Sonia propose l'opérateur fonctionnel x 1,5 et remplit le tableau en multipliant tout par 1,5. Cédric remarque alors que le tableau précédent aurait pu être rempli aussi en multipliant tout par 1,4

car "10 ⟶ 14

donc 1 ⟶ 1,4"

et Nadia pour le tableau 5 ⟶ 9 explique qu'elle divise 9 par 5, trouve 1,8 qui est l'image de 1, mais après cette procédure analytique revient à une procédure analogique pour compléter successivement les images de 2, 3, 4, 5... en ajoutant 1,8 au résultat précédent.

Il a été remarquable durant cette séance de voir la classe adhérer et faire sienne la procédure analogique puis réaliser qu'il existait une procédure plus performante, la procédure analytique, enfin jongler avec les 2 procédures suivant la facilité des calculs que cela donne.

Il manque évidemment à notre expérience, pour en tirer des conclusions scientifiques, une série de pré-tests et de post-tests, mais nous avons tiré de l'observation de cette séance didactique une impression très favorable en particulier dans la 2ème classe qui était une classe particulièrement faible. Il faut tenir compte aussi, surtout en temps limité, de l'importance du choix des nombres sur la nature des procédures utilisées. Pour le Puzzle donné, l'échelle 4 $\longrightarrow$ 6,4 est celle qui nous semble la plus riche.

BIBLIOGRAPHIE

AUDIBERT G., 1984, Démarches de pensée et concepts utilisés par les élèves de l'enseignement secondaire en géométrie euclidienne plane. *Bulletin de l'A.P.M. n°56.*

BROUSSEAU G., 1981, Problèmes de didactiques des décimaux, *Recherches en didactique des mathématiques* Vol. 2.1.

MORIN Ch., 1986, Etude du comportement d'élèves du 2ème degré devant un problème lié à la proportionnalité, *IREM de Montpellier.*

Groupe de recherche sur l'enseignement de la proportionnalité. Quatre situations didactiques autour de la proportionnalité, *IREM de Montpellier.*