UNE ETUDE SUR LES REPRESENTATIONS GRAPHIQUES DU MOUVEMENT COMME MOYEN D'ACCEDER AU CONCEPT DE FONCTION OU DE VARIABLE DEPENDANTE

Sophie RENE DE COTRET
Equipe de didactique des mathématiques et de l'informatique, Université de Grenoble I
CIRADE, Université du Québec à Montréal

Cet article constitue le résumé d'une recherche effectuée dans le cadre de mon mémoire de maîtrise présenté à l'université du Québec à Montréal. Il se divise en deux parties. Dans la première, après avoir fait une brève analyse du concept de fonction afin de retrouver ses principales composantes, nous tentons, par une étude historique, de retracer le développement de la notion. A partir des conclusions historiques, nous avons élaboré une expérimentation portant sur les différentes représentations graphiques du mouvement que font des élèves du secondaire (12 à 15 ans). L'expérimentation ainsi que les principaux résultats sont décrits dans la deuxième partie de cet article.

Les mathématiques que l'on enseigne aujourd'hui au secondaire sont souvent le résultat de l'évolution de concepts vieux de 1000 ans. Cependant, on ne tient pas toujours compte de cette évolution et on se contente souvent de donner aux élèves le produit fini dénué de son sens et de son contexte. Dans une telle situation, les étudiants ne voient ni l'utilité ni la raison d'être des mathématiques. Peut-on blâmer les élèves de s'en désintéresser ? Ils ne peuvent relier ces nouveaux concepts à d'autres déjà connus. Ce type d'enseignement évite les liens possibles entre les choses connues et à connaître. C'est probablement une des raisons pour lesquelles on entend parfois dire: "Les mathématiques tombent du ciel !"

"petit x" n° 17 pp. 5 à 27, 1988

Il est donc très important de redonner aux mathématiques leur sens, leurs origines concrètes, de les rattacher à des connaissances antérieures afin de ne pas les isoler de toutes relations avec le connu, relations qui permettent de mieux comprendre, de concrétiser et même d'avoir des intuitions mathématiques. L'histoire constitue souvent un terrain très fécond pour retrouver ces origines et redonner un sens aux mathématiques. Cela ne veut pas dire que l'on doive demander aux élèves de reconstituer la genèse historique d'un concept, mais dans certains cas, l'histoire nous fournit des problèmes et des situations qui peuvent être adaptés aux connaissances des élèves et qui leur permettent de donner un sens au concept.

Cette recherche vise donc d'une part, à fournir aux élèves des moyens de construire leur notion de fonction à partir de son sens initial qui nous est donné par l'histoire et, d'autre part, à nous renseigner justement sur les différentes conceptions qui sont utilisées par les élèves.

I. ANALYSE DU CONCEPT DE FONCTION

1. La fonction comme variable dépendante

En regardant plusieurs définitions des années 30 jusqu'à aujourd'hui, nous avons remarqué que la notion de fonction avait beaucoup changé tant dans sa forme (les différentes définitions) que dans son fond (les concepts et les éléments auxquels elle fait appel et qu'elle illustre).

Cette constante évolution de la fonction vers des définitions de plus en plus abstraites, épurées et formelles, nous a fait réfléchir sur l'à propos d'un enseignement de la fonction à partir de ce type de définitions. Nous avons donc décidé de faire une étude de la notion de fonction afin de retrouver les éléments qui ont, à un moment ou à un autre, été présents dans le concept de fonction.

Nous croyons que certains concepts qui ont été exprimés par la fonction sont mieux adaptés que d'autres à l'enseignement car ils en permettent une approche plus intuitive et plus pratique. Ils permettent de "voir", par l'expérience, des phénomènes impliquant des fonctions. En fait, il s'agit de redonner à la fonction ses composantes de variation, dépendance et correspondance. La fonction, il y a à peine 100 ans, renfermait ces concepts, mais avec les mathématiques ensemblistes elle s'est départie des aspects variation et dépendance.

"Une fonction f d'un ensemble A dans un ensemble B est une règle de correspondance qui associe à chacun des éléments de A au plus un élément de B."

L'aspect important de cette définition est la règle de correspondance.

"Une fonction f de A dans B est un sous-ensemble du produit cartésien A x B tel que pour chaque $a \in A$ il y a au plus un $b \in B$, tel que $(a,b) \in f$."

Dans ce cas on constate que l'importance est accordée non plus à une règle de correspondance, mais tout simplement à une correspondance ou à une série de correspondances entre des éléments $a \in A$ et $b \in B$.

Cette dernière définition élimine la parcelle de dépendance qui pouvait subsister dans la définition précédente, dépendance exprimée par la règle de correspondance. Les éléments de B correspondent d'une façon donnée aux éléments de A et, la règle de correspondance est la même[1] quel que soit l'élément de A choisi. C'est de l'uniformité de cette règle de correspondance que peut ressortir une certaine dépendance, car elle permet de savoir quelle influence une *variation* de a aura sur b.

Le mot variation ici est un mot clef, car l'idée de dépendance lui est selon nous très intimement reliée. En effet, le seul moyen de s'apercevoir qu'une chose dépend d'une autre est de les faire varier chacune à leur tour afin de constater quel effet a la variation. Mais tant et aussi longtemps qu'il n'y aura pas de variation, il sera presqu'impossible de savoir s'il y a dépendance. Par exemple, pour savoir si la croissance d'une plante dépend du soleil, il faut faire varier ses périodes d'ensoleillement, toutes choses étant égales par ailleurs. Si les périodes d'ensoleillement sont toujours identiques, il ne sera pas possible de savoir si le soleil a un effet sur la plante. De la même façon, comment peut-on savoir, par exemple, que la circonférence d'un cercle dépend de son rayon si on a un seul cercle et un seul rayon? Pour constater cette dépendance, il faut faire varier le rayon et, de cette manière, on remarque que la circonférence variera aussi, ce qui indique que rayon et circonférence sont dépendants.

On constate que dans les deux définitions modernes qu'on vient de mentionner, l'idée de variation est absente. Cependant, il suffit de reculer de quelques années pour retrouver des variables dans les définitions de fonctions.

1 Evidemment, ce ne sont pas toutes les fonctions qui ont une règle de correspondance unique, mais nous nous intéressons ici seulement à celles qui respectent cette règle unique, car elles correspondent mieux au concept de fonction à ses origines.

En voici quelques exemples:

(1961) *"Une quantité est dite fonction d'une variable indépendante lorsque sa valeur dépend de celle que l'on attribue à cette variable."* Cours d'algèbre élémentaire, FEC, Mtl, 1961, p.159.

(1939) *"Considérons l'égalité: $y = 2x + 3$. Le nombre variable x peut prendre diverses valeurs et, quelle que soit la valeur donnée à x, nous saurons calculer la valeur correspondante de y. Nous dirons encore que y est une fonction de la variable x."* Mathématiques, Hachette, 1939, p.315.

La variation des quantités est primordiale dans ces deux définitions, on y retrouve aussi la dépendance et la correspondance. Et plus on regarde les définitions anciennes, mais postérieures à Leibniz-Newton, plus on remarque que la variable ou la variation des quantités sont au centre de la notion de fonction.

Cauchy(1821) *"Lorsque des quantités variables sont tellement liées entre elles que la valeur de l'une d'elles étant donnée on puisse en conclure les valeurs de toutes les autres, on conçoit d'ordinaire ces diverses quantités exprimées au moyen de l'une d'entre elles, qui prend alors le nom de variable indépendante et les autres quantités exprimées au moyen de la variable indépendante sont ce qu'on appelle des fonctions de cette variable."* C. Phili

Euler(1755) *"Des quantités dépendent des autres de manière que si les autres changent, ces quantités changent aussi."* Youschkevitch, 1976, p.61.

Bernouilli(1667-1748) Une fonction d'une grandeur variable est *"une quantité composée de quelque manière que ce soit de cette grandeur variable et de constantes."* Cantor, 1896, p. 23.

Notons que la première utilisation du mot fonction remonte à Leibniz en 1673 dans "Methodus tangentinum inversa seu de fonctionibus", où il emploie ce mot pour désigner les grandeurs dont les variations sont liées par une loi.

Il est intéressant de constater que dans les premières définitions du concept de fonction, les notions centrales sont la variation et la dépendance; la correspondance étant présente, mais de façon implicite. Puis, plus on se rapproche des définitions modernes, plus on voit disparaître graduellement la variation, puis la dépendance, dont on peut retrouver quelques traces avec la règle de correspondance, pour finalement aboutir à une pure correspondance.

Les définitions modernes, excluant la variation et la dépendance et ne conservant que la correspondance, sont difficilement accessibles à des élèves du secondaire, car elles leur permettent peu d'accéder intuitivement à un premier concept de fonction. A ce propos, Neil et Shuard nous disent:

"*Unfortunately, the idea of functional dependence has been totally eliminated from this formal definition of a function. In the process of generalisation, the rule which was the essential idea of the function has vanished. Enquiries among mathematicians ... (show that) ... It is only when they need the logic of an axiomatic development that working mathematicians discard the idea of a rule in favour of subset of A x B.*

When teaching beginners about functions, it is very unwise to suppress the idea that functional dependence is expressed by a rule for mapping. Functions are so important in their own right that they should not be thought as particular (and perhaps unimportant) types of relations. Functions are used as mathematical models in situations where dependence needs to be expressed. In many "modern" texts this idea is not clearly brought out."[2] Neil and Shuard, 1972.

Nous croyons donc que pour amorcer un premier enseignement de la notion de fonction il est important de conserver l'idée de dépendance des quantités. Idée, qui, comme nous l'avons expliqué plus tôt, requiert souvent la notion de variation. Ce concept de dépendance permet aux élèves d'accéder à un premier concept de fonction qui soit rattaché à des phénomènes réels connus, par exemple, ma faim dépend de combien j'ai mangé.

Nous pensons ainsi que la correspondance seule ne suffit pas à un enseignement de la fonction, et qu'on y gagne beaucoup en conservant les notions de variation et de dépendance, qui étaient présentes à l'origine du concept, regroupées dans la notion de variable dépendante.

---

2 Malheureusement, l'idée de dépendance fonctionnelle a été complètement éliminée de cette définition formelle de fonction. Dans le processus de généralisation, la règle, qui était l'idée essentielle de la fonction, a disparue. Une enquête auprès de mathématiciens a révélé que c'est seulement lorsqu'ils ont besoin de la logique d'un développement axiomatique qu'ils délaissent l'idée de règle en faveur de celle d'un sous-ensemble de A x B.

Quand on enseigne les fonctions aux débutants, il n'est pas très judicieux de supprimer l'idée que la dépendance fonctionnelle est exprimée par une règle de correspondance. Les fonctions sont si importantes en tant que telles, qu'elles ne devraient pas être enseignées comme un type particulier (et peut-être de moindre importance) de relations. Les fonctions sont utilisées comme modèles mathématiques dans des situations où la dépendance doit être exprimée. Dans plusieurs textes "modernes" cette idée ne ressort pas.

2. Histoire

Avec comme point de départ l'idée que c'est la variable dépendante qui est à la base du concept de fonction, nous avons fait une recherche historique afin de voir comment et dans quelles circonstances cette notion est apparue.

L'histoire nous permet de retrouver la signification première, **le sens premier de la fonction** et nous pensons qu'en offrant aux élèves la possibilité de construire leur concept à partir de ces origines ils pourront plus facilement lui attribuer un sens et ainsi mieux "l'apprendre".

Nous ne ferons ici qu'un très bref résumé historique permettant de bien saisir les fondements de notre expérimentation.[3]

Ce qui est important de savoir, c'est que la notion de variable dépendante est née de la conjonction d'études qualitatives et quantitatives du mouvement, et ce, par l'intermédiaire des représentations graphiques.

Jusqu'à la fin du Moyen Age les mouvements étaient étudiés soit de façon qualitative, en donnant une description du sens de variation, directement ou inversement proportionnel, mais sans arriver à des relations numériques précises; soit en étudiant de façon numérique (quantitative) certaines valeurs isolées du phénomène, ce qui avait tendance à voiler l'aspect de variation continue. On ne considérait que certaines valeurs sans intégrer ces valeurs dans le concept de variable, et ce pour plusieurs raisons que nous ne ferons que mentionner, à savoir: l'incommensurabilité, l'homogénéité et la coupure très nette entre nombres et grandeurs. C'est par l'intermédiaire des représentations graphiques que ces deux types d'étude ont pu se regrouper pour donner naissance à la notion de variable dépendante. Au départ, les représentations graphiques n'étaient que qualitatives, (Oresme), puis avec l'avènement de nouveaux moyens de mesure et avec la volonté de savoir comment (plutôt que pourquoi) les choses changent, Galilée a introduit le numérique dans les représentations graphiques, et finalement, avec Descartes, on obtient une notion de variable dépendante bien définie et efficace. Voyons en quoi consistaient les graphiques d'Oresme.

---

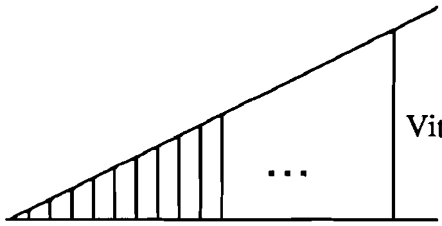
3 Pour en savoir plus sur l'analyse épistémologique qui a été réalisée, voir René de Cotret, S., 1986.

Nicole Oresme, 1323-1382

Le but d'Oresme était de représenter par une figure géométrique les *intensités d'une qualité d'un sujet.* Ces intensités étaient représentées par des segments. Il explique sa méthode dans son traité "De configurationibus qualitatum et motuum".

Dans ce traité, Oresme nous fournit une méthode permettant de représenter les qualités changeantes au sein d'un sujet. Les intensités des qualités (des vitesses) sont représentées par des segments érigés perpendiculairement à un autre segment représentant, lui, le sujet (le temps). On obtient ainsi un graphique illustrant les intensités d'une qualité ou d'une vitesse à différents points du sujet ou à différents temps. La figure ainsi obtenue représente la distribution totale des intensités de la qualité. Pour mieux saisir la méthode, voyons quelques exemples.

Supposons que l'on veuille représenter la vitesse d'un mobile selon le temps. La longitude sera une ligne horizontale représentant le temps. Pour certains temps donnés, on trace une ligne perpendiculaire, la latitude, représentant l'intensité de vitesse à ce temps. De cette façon, on obtient par exemple une figure comme celle-ci:

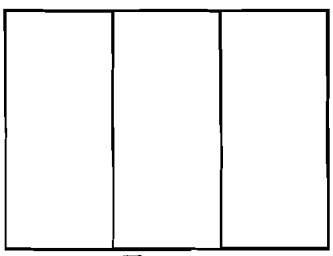


Vitesse

Temps

Oresme distingue trois sortes de figures ou configurations différentes: les configurations 1) uniformément uniforme, 2) uniformément difforme et 3) difformément difforme.

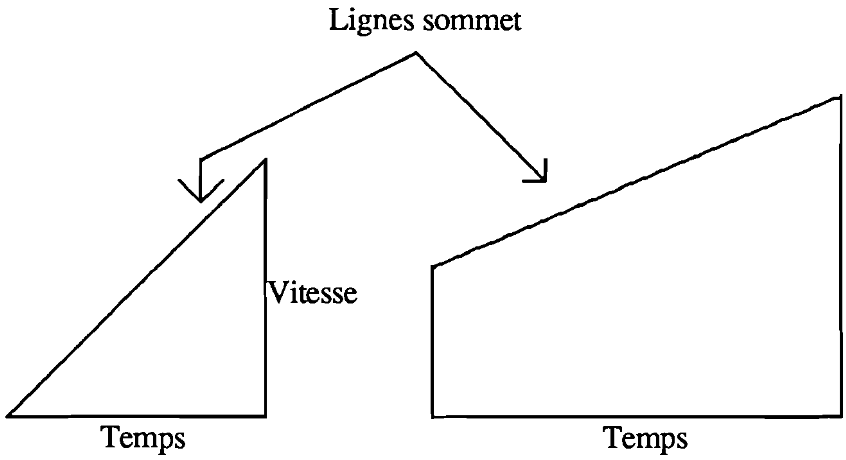
1) Si on considère encore la représentation de la vitesse selon le temps, on peut associer une figure **uniformément uniforme** à une vitesse constante, c'est-à-dire où les intensités sont les mêmes quelque soit le temps considéré. On obtient dans ce cas un rectangle.



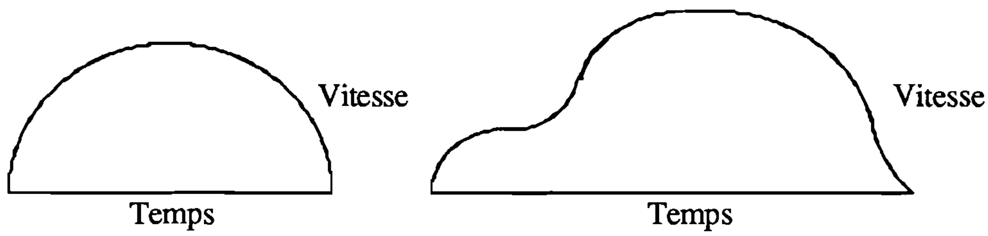
Vitesse

Temps

2) Une figure **uniformément difforme** correspond à une vitesse ayant une accélération constante. Dans un tel cas, la ligne sommet est une droite et la figure est soit un triangle, soit un trapèze, dépendamment de l'intensité initiale de la qualité.



3) Les autres figures sont **difformément difformes**. Elles correspondent, selon notre exemple, à des accélérations non constantes de la vitesse. Ainsi, tous les cas où la ligne sommet n'est pas une droite sont des cas difformément difformes.



Un des buts visés par Oresme avec sa méthode était de permettre aux gens de comprendre plus facilement et plus rapidement la nature des changements.

"*But it is apparent that we ought to imagine a quality in this way in order to recognize its disposition more easily, for its uniformity and difformity are examined more quickly, more easily, and more clearly when something similar to it is described in a sensible figure. (This is true) because something is quickly and perfectly understood when it is explained by a visible example. Thus it seems quite difficult for certain people to understand the nature of a quality that is uniformly difform. But what is easier to understand than that the altitude of a right triangle is uniformly difform ? For that is surely apparent to the senses.* "[4] (Clagett, 1968, p.175)

4 "Il appert que nous devrions imaginer une qualité de cette manière afin de reconnaître sa nature plus facilement, car ses uniformités et ses difformités sont examinées plus rapidement, plus facilement et plus clairement lorsqu'une chose lui étant semblable est décrite par une figure sensible. Cela est vrai parce qu'une chose est rapidement et parfaitement comprise quand elle est expliquée par un exemple visible. Il semble plutôt difficile pour certaines personnes de comprendre la nature d'une qualité uniformément difforme. Mais qu'y a-t-il de plus facile à comprendre que: l'altitude d'un triangle droit est uniformément difforme."

Ces représentations d'Oresme marquent un pas en avant vers le concept de fonction ou de variable dépendante. Cependant, on ne peut dire qu'il s'agisse de fonctions. En effet, Oresme ne s'intéressait pas à la façon dont la qualité varie par rapport au sujet, mais plutôt à la configuration globale de la qualité du sujet. De plus, ses représentations étaient totalement imaginaires et qualitatives et il ne les a jamais vérifiées par des mesures. C'est Galilée qui introduira le quantitatif dans les représentations d'Oresme.

Les successeurs d'Oresme

Galileo Galilei,1564-1642

La grande contribution de Galilée en regard de l'évolution de la notion de fonction, fut son acharnement à chercher des résultats et des relations qui proviennent de l'expérience plutôt que de la pensée seule. C'est là une différence majeure avec Oresme pour qui la théorie pure, exempte de l'expérience, était satisfaisante.

Pour Galilée, l'expérimentation était facilitée par l'avènement d'instruments de mesure et ainsi l'intrusion du quantitatif dans des domaines dont on ne pouvait parler auparavant que de façon qualitative, par exemple, le chaud et le froid.

Ainsi, à la différence d'Oresme, les graphiques de Galilée, bien qu'ils soient parfois très semblables, sont issus de l'expérience et de la mesure. Les liens de cause à effet sont exprimés de façon quantitative vérifiable et vérifiée.

Le principal champ d'étude de Galilée a été le mouvement et donc la vitesse, l'accélération, la distance parcourue. Il cherche à relier ces différents concepts à l'aide de lois qui lui sont inspirées de l'expérience et de l'observation. Il effectue plusieurs mesures, il reprend maintes et maintes fois ses expériences afin d'obtenir les résultats les plus justes et les plus "vrais" possible. Cette insistance de Galilée à vouloir étudier les mouvements de façon quantitative, par l'entremise de l'expérimentation, a grandement contribué à l'évolution de la notion de fonction. Il a le désir de lier de façon fonctionnelle les causes et les effets, et ce besoin est à notre avis un facteur essentiel à la conception de la variable dépendante.

René Descartes, 1596-1650

Finalement, c'est avec Descartes qu'apparaît clairement l'expression de dépendance générale entre deux quantités variables, tel que nous l'indique ce passage de "La Géométrie":

"Même prenant successivement infinies diverses grandeurs pour la ligne y, on en trouvera aussi infinies pour la ligne x, et ainsi on aura une infinité de divers points, tels que celui qui est marqué C, par le moyen desquels on décrira la ligne courbe demandée."

Ce passage de Descartes nous montre bien que tous les éléments essentiels à la fonction sont présents. Les lignes x et y sont variables et leurs grandeurs sont dépendantes.

Evidemment, nous n'avons exposé ici que très grossièrement les principales étapes du développement de la notion de fonction, et le processus fut en réalité plus complexe et plus subtil.

II. EXPERIMENTATION

1. Description de l'expérimentation

Cette recherche voulait fournir au départ une nouvelle façon d'aborder le concept de fonction dans son sens de variable dépendante, l'important pour nous étant de **redonner à la variable son aspect de variation dynamique**. Cependant, il nous est apparu que les conceptions du mouvement (relations distance-vitesse-temps) qu'ont plusieurs enfants sont si controversées qu'elles ne permettent pas de voir les conceptions relatives à la fonction, le problème se situant avant, au niveau de la compréhension du mouvement lui-même. Nous exposons tout de même l'expérience et ses résultats, car bien que l'analyse ne nous renseigne pas directement sur les conceptions des élèves à propos de la variable dépendante, elle nous fournit quelques éléments relatifs à leurs conceptions sur le mouvement et la vitesse, conceptions qui, croyons-nous, sont très liées à celles concernant la notion de fonction.

Nous venons de voir que c'est dans l'étude du mouvement que l'idée de variable dépendante et donc de fonction était née. L'étude du mouvement implique ainsi l'idée de variations dynamiques, le plus souvent en fonction du temps.

Les premières traces de liens fonctionnels entre deux variables sont apparues par l'intermédiaire de représentations graphiques du mouvement. Ces représentations ont d'abord fait appel à l'idée de mesure non unitaire (approche qualitative), puis, avec l'avènement d'instruments de mesure plus perfectionnés et plus précis, on a pu y intégrer les mesures numériques (approche quantitative).

C'est donc en utilisant l'une ou l'autre de ces deux approches que nous avons voulu voir comment des élèves de 12 à 15 ans représentaient graphiquement le mouvement de façon fonctionnelle.

Nos sujets ont été répartis au hasard en deux groupes de dix élèves. Un groupe appelé qualitatif et l'autre quantitatif. L'expérience se divise en deux parties.[5]

La première partie, intitulée "Les Bouteilles", vise surtout à la familiarisation des élèves avec les problèmes de représentation graphique du mouvement. Ils pourront y mettre en oeuvre et éventuellement modifier leurs premières conceptions.

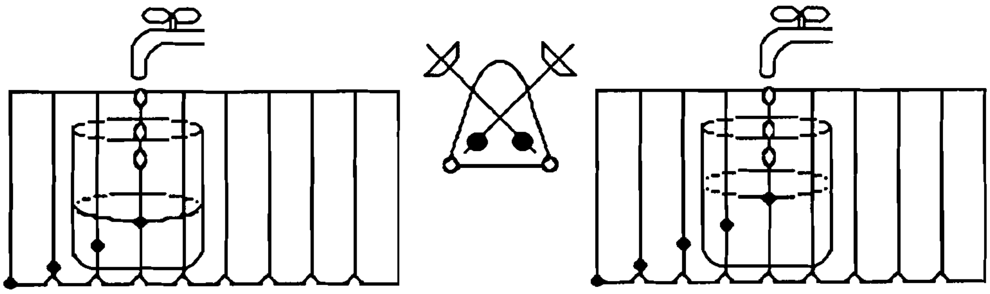
La deuxième partie, "Simulations à l'ordinateur", doit nous permettre d'observer comment les élèves utilisent leurs conceptions dans d'autres types de problèmes.

Il est certain que bien que la première partie ait comme objectif principal la familiarisation, cela n'exclut pas qu'il y ait aussi observation, et il en est de même pour la deuxième partie où il y aura sûrement construction ou modification de conceptions.

Partie I: Les Bouteilles

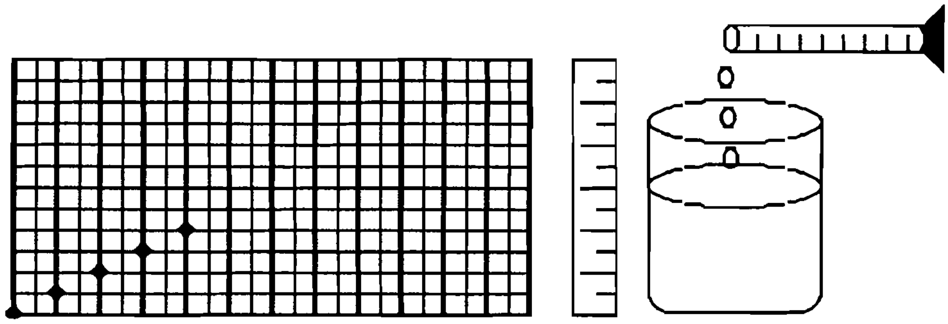
Dans la première partie, on demande aux enfants, groupés par deux, de représenter graphiquement comment l'eau monte dans différentes bouteilles en fonction du temps. Le matériel fourni aux équipes diffère selon que celles-ci sont qualitatives ou quantitatives, (5 équipes qualitatives et 5 équipes quantitatives).

Pour les équipes qualitatives, il s'agit d'un plexiglass, placé devant la bouteille qui se remplit d'eau, dans lequel on a fait des coches à intervalles réguliers. Un métronome est placé sur la table. A tous les deux battements de métronome, les enfants doivent faire un point sur le plexiglass à la hauteur où l'eau est arrivée, puis déplacer le plexiglass d'une coche.



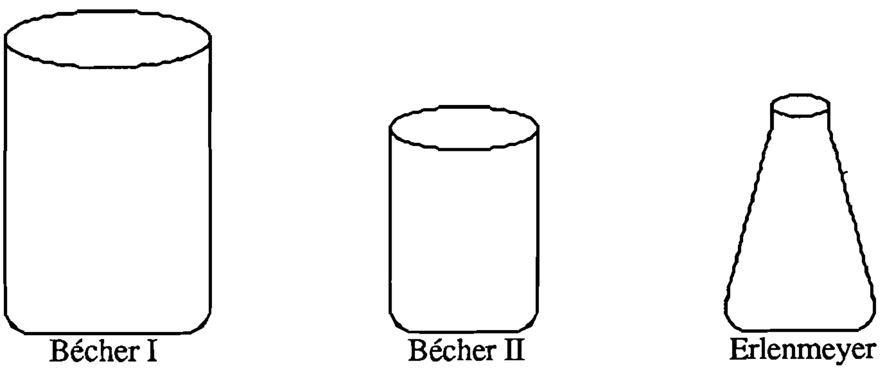
5 Cette expérimentation a été réalisée dans une école secondaire publique de la région de Montréal au Québec.

La tâche des équipes quantitatives est différente. Dans leur cas, on remplit la bouteille avec un cylindre gradué. Après chaque ajout d'eau, ils doivent mesurer avec une règle la hauteur de l'eau et l'inscrire sur une feuille quadrillée où on a tracé des lignes verticales plus foncées représentant le temps (ou chaque nouveau cylindre ajouté).



Malheureusement, à cause de la forme de l'expérience, le temps n'est pas vraiment présent pour les équipes quantitatives. On espérait pouvoir l'injecter artificiellement en le représentant par des traits verticaux plus foncés sur le papier, mais il semble que l'objectif escompté n'ait pas toujours été atteint. Nous verrons lors de l'analyse les répercussions de cette absence de temps sur la deuxième partie de l'expérimentation.

Dans cette première partie de l'expérience, on demande d'abord aux élèves de tracer expérimentalement, avec leur matériel respectif, le graphique de la hauteur de l'eau dans une bouteille en fonction du temps (Bécher I, variation linéaire, exemple). Puis, toujours avec leur matériel respectif, on leur demande de prédire l'allure du graphique pour une plus petite bouteille qu'on leur présente (Bécher II, variation linéaire). Ils vérifient ensuite expérimentalement leur prédiction et commentent. Enfin, il y a de nouveau prédiction et vérification pour une bouteille conique ou Erlenmeyer (variation non linéaire).



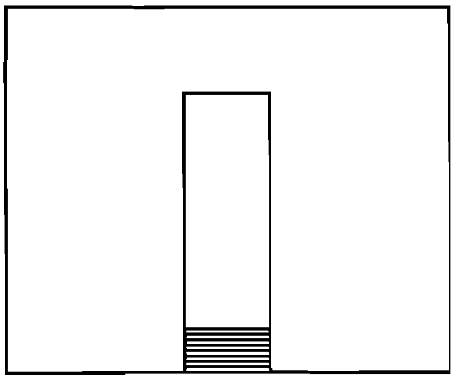
Partie II: Simulations à l'ordinateur

La deuxième partie de l'expérimentation a pour objectif principal de voir comment les élèves utilisent leurs conceptions dans d'autres types de problèmes. Dans cette partie, on demande aux équipes de tracer les graphiques de simulations vues à l'ordinateur sans faire cependant de vérification, car nous ne voulons pas que les élèves soient influencés par la "bonne réponse". Il n'y a plus à ce moment de différences de matériel entre les équipes qualitatives et quantitatives.

Les Tiges

Les deux premières simulations illustrent des tiges qui montent; une première à vitesse constante (Tige I, variation linéaire), une deuxième à vitesse constante par morceaux, d'abord lente puis rapide (Tige II, variation linéaire par morceaux). On peut comparer ces tiges à l'eau qui monte dans les bouteilles. Les équipes doivent tracer le graphique de la tige qui monte en fonction du temps. Les graphiques sont tracés sur du papier millimétrique. Les enfants peuvent revoir le phénomène sur l'écran du micro-ordinateur aussi souvent qu'ils le désirent.

Nous espérions que les lignes plus foncées du papier millimétrique pourraient rappeler aux élèves les lignes marquant le temps dans la première partie de l'expérimentation. Malheureusement, cette transposition n'a pas toujours été réalisée.



La tige qui monte est formée de petites lignes qui apparaissent successivement à l'intérieur du rectangle.

Les Populations

Les deux dernières simulations représentent les mêmes types de variations, i.e. une linéaire puis une linéaire par morceaux. Cependant, ce sont des variations non-connexes, c'est-à-dire des variations où les états de l'objet qui varie ne peuvent être directement perçus comme un segment, parce que chaque nouvel accroissement ne se colle pas nécessairement sur le précédent. Pour mieux saisir cette notion de variations non-connexes, voyons l'exemple qui est présenté aux élèves.

On leur présente une simulation à l'ordinateur où on voit des petits carrés noirs qui apparaissent dans un grand carré. On explique aux enfants que cela peut illustrer des gens qui emménagent sur un terrain vague. Ils doivent représenter sur le graphique comment la population, ou le nombre de carrés, varie en fonction du temps. Après la prédiction pour la première population (Pop I), on présente aux élèves le "bon graphique" et ils doivent tenter d'expliquer les différences s'il y a lieu. Nous verrons, lors de l'analyse, que la présentation du "bon graphique" a eu une influence sur les graphiques des élèves à la deuxième épreuve (Pop II).

Variations non-connexes

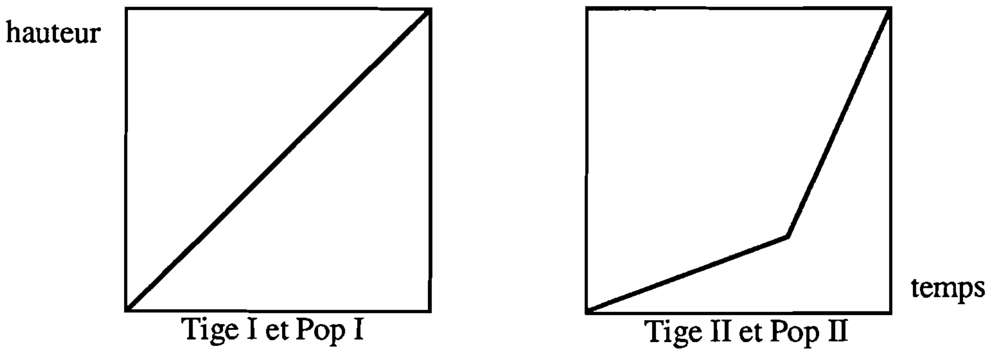
Ces variations sont non-connexes, car les points arrivent un peu partout sur le carré et non pas selon une seule dimension à la façon d'un segment qui grandit. Chacun des états du phénomène ne peut donc être perçu **directement** comme un segment. Cependant, il peut être **représenté** par un segment, ce qui est différent et demande une certaine interprétation de la variation. On peut en effet considérer que chaque point représente une unité de longueur du segment, et ainsi, un nouveau point qui apparaît fait allonger le segment d'une unité. Cette façon d'illustrer la variation de la population demande de recourir à un certain niveau d'abstraction, car les gens sont imaginés, sont représentés par des segments. Nous qualifions "d'indirecte" cette représentation par les segments, car une traduction, une interprétation du phénomène est indispensable avant de pouvoir le concevoir comme la variation de la longueur d'un segment. Cette traduction n'était pas nécessaire dans le cas des variations uni-dimensionnelles ou connexes.

Ces problèmes de variations non-connexes sont très complexes, car le segment illustrant l'état de l'objet qui varie n'est pas fourni, mais doit être construit.

Dans les problèmes précédents, il était possible que l'enfant réussisse son graphique sans pour autant reconnaître la variable qui y est représentée. En effet, il se peut qu'un élève dessine le graphique en se remémorant seulement la ligne du niveau de l'eau et en évaluant sa hauteur à certains temps qu'il décide. Dans un cas comme celui-ci, le graphique a de grandes chances de correspondre à celui de la hauteur de l'eau en fonction du temps, mais la variable n'est pas nécessairement perçue par l'élève. Ce qu'il enregistre ou perçoit, ce sont simplement des hauteurs plutôt que la façon dont la hauteur varie. Il reproduira alors sur le graphique différentes hauteurs plutôt qu'une manière de varier de la hauteur, où par exemple une pente raide signifie que l'eau monte vite et une pente douce, que l'eau monte lentement.

Cette possibilité qu'a l'enfant de réussir son graphique sans avoir recours vraiment à la variable est due au fait que les problèmes de bouteilles et de tiges permettent une mesure directe de l'élément qui varie (variations connexes). Il est possible d'enregistrer mentalement certaines hauteurs et de les reproduire tout simplement par la suite sur le graphique. L'avantage qu'apporte le problème de variations non-connexes est que cette mesure directe n'est plus possible. Pour réussir, on doit être capable de mémoriser comment la population fluctue. On ne peut plus prendre de mesure directe comme il était possible de le faire avec des hauteurs dans le cas des bouteilles. On est donc obligé de se faire une représentation de ce qui se passe. On doit évaluer la variation dans le temps pour pouvoir la reproduire graphiquement par la suite. Ce problème est beaucoup plus complexe que les précédents et pour le résoudre la notion de variable dépendante doit être assez bien construite, acquise.

Graphiques des deux Tiges et deux Populations



Déroulement de l'expérimentation

<table>
<tr>
<td>Partie I

Les Bouteilles

Différences de matériels</td>
<td colspan="2">Bécher I
variation linéaire
Exemple</td>
<td>Bécher II
variation linéaire
Prédiction
Vérification</td>
<td>Erlenmeyer
variation exponentielle
Prédiction
Vérification</td>
</tr>
<tr>
<td>Partie II

Simulations
à l'ordinateur

Même matériel pour tous</td>
<td>Tige I
variation linéaire
Prédiction</td>
<td>Tige II
variation linéaire par morceaux
Prédiction</td>
<td>Pop I
variation linéaire
Prédiction
Vérification</td>
<td>Pop II
variation linéaire par morceaux
Prédiction</td>
</tr>
</table>

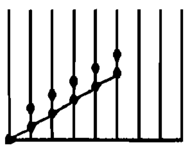
2. Analyse des résultats

D'une manière générale, les équipes qualitatives ont mieux répondu que les quantitatives. Trois équipes qualitatives sur cinq ont donné le "bon graphique" à toutes les épreuves, contre une seule quantitative. Nous donnons quelques raisons pouvant expliquer cette différence au fur et à mesure de l'analyse. La meilleure réussite des groupes qualitatifs est due en majeure partie, croyons-nous, au fait que pour ces élèves, lors de la Partie I, le temps était un élément très important, contrairement aux quantitatifs où il était injecté très artificiellement. De plus, les équipes qualitatives ont vu le mouvement de l'eau de façon continue et non discrétisée comme ce fut le cas pour les quantitatives.

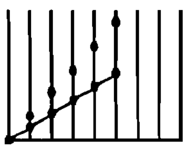
Nous allons maintenant analyser les productions des élèves en essayant de comprendre quelles sont les conceptions sous-jacentes à leurs graphiques.[6]

Partie I Les Bouteilles

Bécher II



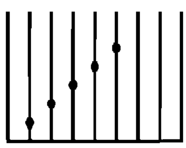
Plusieurs groupes ont répondu de façon parallèle à l'exemple. Cette stratégie est due à un raisonnement additif.



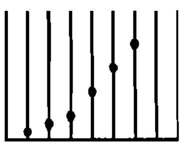
"Bonne réponse"

Il semble que plusieurs groupes aient répondu en ajoutant toujours une même quantité par rapport à la courbe de l'exemple. Ils obtiennent donc un graphique de points parallèle à la première courbe. Cette stratégie est imputable à un raisonnement additif plutôt que proportionnel. Des recherches sur les rapports et proportions (Karplus, Kieren, Nelson ...) ont fait état de ce même problème.

Erlenmeyer



Réponse linéaire: prise en compte de la grosseur de la bouteille et non de la forme.



Réponse linéaire par morceaux: difficulté à dessiner des points selon une courbe parabolique.

Outre le "bon graphique", deux types de réponses sont apparues. La première, linéaire, provient d'une stratégie où seule la grosseur de la bouteille est prise en compte, indépendamment de sa forme. L'autre, linéaire par morceaux, est due à la difficulté de

---

6 Tous les graphiques suivants illustrent la prédiction. Pour le Bécher II, la ligne pleine, ponctuée de points, indique l'exemple.

s'éloigner du linéaire et sûrement aussi au fait que les enfants ne sont pas toujours conscients qu'une plus grande vitesse signifie une plus grande distance pour un même intervalle de temps. Cette difficulté à décomposer la vitesse comme un rapport distance / temps reviendra souvent.

Pour la prédiction avec l'erlenmeyer, on s'attendait à ce que les groupes quantitatifs soient mieux armés que les qualitatifs pour répondre non linéairement. En effet, supposons que tous les élèves, tant qualitatifs que quantitatifs, soient bien conscients du fait que l'eau montera de plus en plus vite, ou que les accroissements de la hauteur seront de plus en plus grands. Partant de là, on considère que les groupes quantitatifs bénéficient d'un certain avantage, car ils ont la possibilité d'avoir une référence, la mesure, qui leur permet de calibrer les accroissements. Les qualitatifs n'ont pas ce moyen. Nous croyons donc qu'il leur est plus difficile de faire des écarts toujours plus grands.

Cependant, il semble que la possibilité de mesurer ne soit pas vraiment un avantage pour les équipes quantitatives, car lors de la prédiction avec l'erlenmeyer, très peu ont utilisé la règle ou le quadrillage pour mesurer effectivement les écarts.

Si plusieurs élèves quantitatifs n'utilisent pas la mesure pour calculer les écarts, c'est parce qu'ils n'associent pas nécessairement à une bouteille qui rapetisse, ou à une vitesse qui augmente, des accroissements de la hauteur de plus en plus grands pour des intervalles de temps réguliers.

Partie II Simulations à l'ordinateur

Nous croyons important de souligner qu'à l'épreuve des tiges, plusieurs équipes quantitatives ont été perturbées par le fait que le mouvement ne s'arrête pas pour qu'ils puissent mesurer. La vision complètement discrétisée du mouvement à l'épreuve des bouteilles a constitué un handicap pour ces équipes. Un moyen de remédier à cette lacune serait de présenter d'abord aux élèves le mouvement continu, puis de le discrétiser par la suite pour permettre les mesures.

On peut penser que les groupes qualitatifs étaient, de ce fait, un peu avantagés pour cette épreuve.

Voyons maintenant quels sont les graphiques faits pour l'épreuve des tiges.

Tiges I et II

Relations Distance-Vitesse-Temps

D-V-T

Qualitatifs: plus proche signifie plus lent

D-V-T

Quantitatifs: plus proche signifie plus vite

A l'épreuve des tiges, nous avons obtenu, en plus des "bons graphiques", plusieurs réponses où les enfants représentaient non pas la hauteur en fonction du temps, mais simplement la vitesse.[7] Parmi celles-ci, nous voulons souligner les réponses du type D-V-T, c'est-à-dire les problèmes de relations Distance-Vitesse-Temps. Ce qui est particulièrement intéressant dans ces réponses, c'est que pour le même problème D-V-T, les groupes qualitatifs et quantitatifs répondent de façons opposées. En effet, pour une perception d'un mouvement lent puis rapide, les élèves qualitatifs font un graphique où les points plus proches signifient que la vitesse est plus lente. Pour les quantitatifs, les points plus proches signifient une vitesse plus grande. Comment interpréter ces représentations?

Nous croyons que pour les équipes qualitatives le temps est un élément important étant donné le métronome à la Partie I. Ainsi, pour eux chaque nouveau point indique

qu'un même intervalle de temps s'est écoulé et la distance entre les points représente la distance parcourue pendant cet intervalle.

Pour les groupes quantitatifs l'élément frappant de la Partie I était la distance constante. Plusieurs ont remarqué avec les béchers que ça "montait égal". Il est donc possible que pour eux, chaque nouveau point indique qu'une même distance a été parcourue et la distance entre les points indique le temps pris pour parcourir cette distance. Nous ne prétendons pas que les enfants soient conscients de l'utilisation de ce *théorème en acte.*

Ces deux graphiques représentent tout à fait bien le phénomène donné, seulement, ils sont construits selon des règles diférentes de celles que l'on utilise généralement avec des graphiques cartésiens.

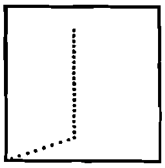
---

7 Notons que pour la tige I, trois groupes, 1 qualitatif et 2 quantitatifs, ont perçu une vitesse lente puis rapide alors qu'il s'agissait d'une vitesse constante.

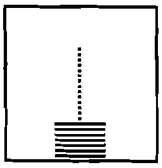
Cette représentation n'est utilisable que lorsque le graphique est discret - il est probable que la Partie I de l'expérimentation ait incité les élèves à faire des graphiques discrets. Dès qu'on a une courbe continue, il est impossible de déchiffrer le graphique, puisqu'il n'y a plus de distance entre les points. En effet, si on relie les points on en perd toute la signification.

On peut alors se demander quel pourrait être le sens donné à la pente pour des enfants faisant ce type de graphiques, i.e. où seulement la distance entre les points, **tous alignés selon une même droite**, importe. De plus, il apparaît que les axes ne représentent rien, puisque c'est la droite de points elle-même qui est importante, indépendamment de sa situation ou de son inclinaison.

Ce type de représentation qui dans sa forme ressemble beaucoup à un graphique cartésien, mais non dans son fond, peut faire obstacle à la construction du concept de pente.



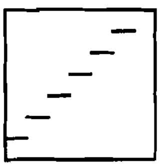
Un changement d'angle indique un changement de vitesse.



Les lignes indiquent une vitesse lente, les points une plus rapide.

Un autre graphique intéressant obtenu à l'épreuve des tiges est celui où un changement d'angle dans la courbe indique un changement de vitesse. Dans un cas comme celui-ci le temps et la distance n'interviennent plus du tout en aucune manière. On ne considère que la vitesse. On retrouve encore ce phénomène dans un autre graphique où la vitesse lente est illustrée par des traits et la plus rapide par des points. Dans ce dernier cas, il s'agit presque d'une photo, d'une reproduction de ce qui est vu à l'écran. En effet, la tige à l'ordinateur était formée de petites lignes semblables à celles dessinées par les élèves.

Nous avons obtenu un autre graphique qui pourrait correspondre à une reproduction ou une photo. Ce graphique a été fait par le groupe qualitatif no 1, nous le soulignons, car nous y reviendrons plus loin.



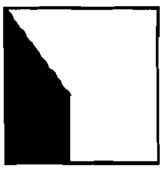
Ce graphique semble bon au premier abord, cependant il est fait de petits traits et non de points comme les précédents. Ce changement nous a intrigués et nous avons essayé de comprendre quelle en était la cause.

Nous pensons qu'il est possible que ces élèves aient représenté non pas "la hauteur "de la tige, mais "le bout" de la tige à certaines hauteurs. Ainsi, au lieu de mettre seulement un point pour indiquer la hauteur, ils dessinent le bout, le sommet de la tige, à la hauteur en question. On peut supposer que ce graphique possède un côté pictural. D'une certaine manière, il ne s'agit plus d'une représentation de la variable hauteur, mais d'une reproduction des hauteurs.

Toutes ces stratégies se retrouvent à l'épreuve des populations, soit telles quelles, soit sous d'autres formes.

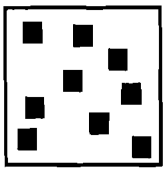
Populations I et II

On observe pour les populations, en plus des types de réponses décrits pour les Tiges I et II, un nouveau graphique pour la Population I. Il s'agit de la réponse dite de Fechner.[8]



Fechner

Considération de l'augmentation par rapport au tout et non pour elle-même.



Photo

Reproduction du phénomène plutôt que sa représentation.

Cette réponse reflète une conception du mouvement présenté où chaque nouvelle augmentation de population est considérée par rapport à ce qui est déjà rempli plutôt que pour elle-même. Ainsi, au départ, les premiers carrés qui apparaissent font augmenter de beaucoup la population, puis, plus il y a de carrés, moins chaque nouveau carré a d'importance par rapport à ce qui est déjà là. C'est de cette stratégie que provient ce graphique dit de Fechner. On ne retrouve plus cette réponse à la Population II, elle a été remplacée par D-V-T, probablement à cause de la vérification qui présentait une droite. Les enfants ont essayé de produire un graphique se rapprochant plus de ce qui était "bon".

8 Fechner est un psychologue allemand ayant établi la règle selon laquelle la sensation varie comme le logarithme de l'excitant.

Trois équipes, 1 qualitative et 2 quantitatives, ont répondu aux deux populations par une photo ou une reproduction du phénomène. Dans ce cas, ni le temps, ni la distance, ni même la vitesse ne sont représentés. On n'a fait que reproduire ce qui était vu à l'écran. C'est le cas entre autre du groupe qualitatif no 1 dont nous avons parlé précédemment. (pp. 23-24)

Les élèves de ce groupe n'ont pas **représenté** comment le nombre de carrés ou de personnes varie. Ils ont simplement **reproduit** le phénomène et ainsi, le graphique obtenu illustre seulement la population à un moment donné des emménagements. Il ne nous fournit aucun renseignement sur le nombre de personnes en fonction du temps.

Si on compare maintenant ce dessin avec leur graphique pour la tige linéaire (variation connexe), on peut se demander à quoi est due cette modification.

Lors de l'analyse du graphique de la tige linéaire (pp. 23-24), nous avions émis l'hypothèse que les traits dessinés pouvaient être la reproduction du bout de la tige. Les enfants fixaient leur attention sur le haut de la tige et le reproduisaient à différentes hauteurs. Cette stratégie est efficace dans le cas de variations connexes, mais s'avère inopérante avec des variations non-connexes comme celles des populations. En effet, il est probable que les enfants ont ici essayé d'utiliser la même stratégie, mais comme il ne leur est plus possible de suivre le bout de la tige, ils regardent maintenant les carrés apparaître et les reproduisent simplement sur le graphique, comme ils l'avaient fait pour la tige, ce qui donne une photo du phénomène plutôt qu'une représentation de la variation du nombre de carrés en fonction du temps.

Ainsi, l'hypothèse que nous avions formulée lors de la description des variations non-connexes, à savoir que la conception de la notion de variable était nécessaire afin de réussir les graphiques de telles variations et que dans le cas de variations connexes il était possible de faire un bon graphique sans qu'il ne soit obligatoirement le reflet d'une conception juste de la variable, semble ici vérifiée.

III. CONCLUSION

Plusieurs graphiques que nous venons d'analyser réflètent une conception globale de la vitesse qui empêche les enfants de représenter le mouvement comme une fonction distance/temps. Il semble en effet, que pour plusieurs enfants la vitesse soit conçue comme une entité, presque comme une qualité. Elle n'est pas issue de différents éléments. Comme la couleur verte n'est pas nécessairement composée pour nous de bleu et de jaune, la vitesse pour eux n'est pas nécessairement fonction du temps et de l'espace.

Etant donné que tous les problèmes que nous avons posés aux élèves faisaient référence au mouvement, il nous est difficile de savoir jusqu'à quel point c'est directement la notion de fonction qui fait problème ou si c'est la conception du mouvement, de la vitesse qui fait obstacle à celle de la variable dépendante.

Cependant, nous faisons l'hypothèse que tout taux de variation s'interprète en fait comme une vitesse, même si ses composantes ne sont pas la distance et le temps. C'est-à-dire que l'étude de la variation d'un élément en fonction d'un autre fait appel d'une certaine façon à une notion de vitesse, même s'il ne s'agit pas nécessairement de la vitesse physique. Cela n'est qu'une hypothèse, mais si jamais elle est vérifiée, il faudrait alors la prendre en compte dans un enseignement de la pente et de la dérivée.

Aussi, certains graphiques des enfants (cf. réponse de Fechner) nous incitent à nous questionner sur leurs interprétations du mouvement et du changement qualitatif ou quantitatif. Nous avons vu qu'ils considéraient parfois un accroissement par rapport à l'état précédent de l'objet qui varie, plutôt que pour sa valeur pure.

Finalement, on peut dire que l'obstacle des relations distance-vitesse-temps s'est fait moins sentir chez les équipes qualitatives que chez les quantitatives. Bien que nous n'ayons étudié qu'un petit nombre d'élèves, il semble que l'importance accordée au temps dans l'approche qualitative puisse être responsable de leur meilleure performance.

Malgré cela, nous croyons que la conception quantitative du mouvement reste indispensable à une bonne conception de la fonction afin de pouvoir traduire précisément, de façon numérique, les liens fonctionnels. En fait, c'est par une interaction entre les approches qualitative et quantitative, qu'à notre avis, les notions de fonction et de variable peuvent être construites; l'approche qualitative aidant à bien saisir l'aspect de variabilité, de continuité du phénomène et le quantitatif permettant de préciser la loi de dépendance.

BIBLIOGRAPHIE

BROUSSEAU Guy, (1983) Obstacles épistémologiques en mathématiques., *Recherche en didactique des mathématiques*, Paris, La Pensée Sauvage, volume 4.2, pp. 166-197.

CANTOR M., (1896) Sur le sens primitif du mot fonction, Deuxième réponse., *L'intermédiaire des mathématiciens*, Tome III, Paris, Gauthier-Villars et Fils, pp.22-23

CLAGETT Marshall, (1968) *Nicole Oresme and the midieval geometry of qualities and motions*, Madison, The University of Wisconsin Press, 713p.

CREPAULT Jacques, (1977) Organisation et genèse des relations temps, espace et vitesse., *Rapport présenté au Symposium de l'Association de psychologie scientifique de langue française.*

DESCARTES René, (1952) *La Géométrie*, ouvrage traduit par D.E. Smith et Marcia L. Latham, La Salle Illinois, The Open Court Publishing Company, 246p.

JANVIER Claude, (1983) Représentation et compréhension, un exemple: le concept de fonction., *Bulletin de l'Association Mathématique du Québec.*

NEIL H. et SHUARD H., (1972) *From Graphs to Calculus*. Blackie.

PHILI Christine, Le dévelopement du concept de fonction., *Note présentée au Séminaire de philosophie et de mathématiques de l'ecole Normale Supérieure.*

RENE de COTRET Sophie, (1986) *Etude historique de la notion de fonction: Analyse épistémologique et expérimentation didactique.* Mémoire de maîtrise, Département de mathématiques et d'informatique,Université du Québec à Montréal, Montréal.

RENE de COTRET Sophie, (1987) La notion de fonction à travers les représentations graphiques du mouvement. Une expérimentation inspirée par l'histoire., *Actes de la XIe Conférence P.M.E.*, Montréal.

YOUSCHKEVITCH A.P., (1976) The concept of function up to the middle of th 19th century., *Archive for history of exact sciences*, tome 16, pp.36-85, traduction française de Jean-Marc Bellemin, "Fragments d'histoire des mathématiques", Brochure A.P.M.E.P., no 41, Paris, 1981, pp.7-68.

MANUELS SCOLAIRES

Cours d'algèbre élémentaire, F.E.C., Montréal, 1961.

Mathématiques, P. Chenevier, Paris, Hachette, 1939.