COURRIER

Nous avons reçu de M. Jean Marie BASSO – Conseiller Pédagogique METZ V et A.E.S. Moselle – 30-34 Rue de la Chèvre – 57000 METZ – un courrier que nous nous excusons de ne pouvoir passer intégralement.

VERS LA "PREUVE PAR 9"

L'objectif est de parvenir à "la preuve par 9" en permettant aux élèves de comprendre la propriété qui permet la vérification d'une opération par la "preuve par 9".

Nous choisissons par là une toute autre attitude que celle qui consiste à montrer tout simplement le mécanisme.

Cette activité a été conçue pour la classe de Monsieur CUNIN Jean-Luc de l'école de plein air de LANDONVILLERS avec l'étroite collaboration de celui-ci.

Les élèves ont déjà l'habitude d'une certaine méthode de travail qui leur permet notamment de réagir, face à une suite de nombres ou face à un tableau de données, pour en extraire les particularités, pour en déduire des lois de succession, . . .

Avant d'aborder la "preuve par 9", la classe, au cours de la séquence "multiples et somme de multiples", a exploité la table des multiples de 5 et a remarqué la simplicité de la succession de ceux-ci, ce qui va permettre de s'appuyer sur cette particularité pour l'approche de la "preuve par 9".

La "preuve par 5" repose sur les mêmes propriétés que la "preuve par 9", mais présente l'avantage de limiter les restes (restes de la division par 5 $\longrightarrow$ 0, 1, 2, 3, 4).

La "preuve par 9", couramment utilisée pour la multiplication et la division, est aussi applicable à l'addition et à la soustraction (dans son principe).

RECHERCHE 1

Considérons le nombre d'élèves de la classe (supposons qu'il soit égal à 23). Nous décidons, pour une activité sportive ou autre d'en prendre le plus grand multiple de 5 possible.

Quel est-il ? (dans l'exemple, $20 = 4 \times 5$).

Combien d'élèves reste-t-il (dans l'exemple, 3) ?

On propose d'autres nombres : 38, 17, 26 . . . et l'on demande de reproduire le même raisonnement, ce qui donne les restes : 3, 2, 1.

Ainsi, tout nombre peut être caractérisé par son reste dans la division par 5,

on dit que tout naturel a pour image son reste
dans la division par 5.

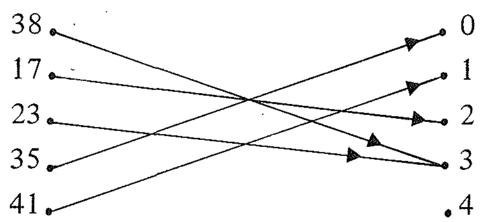
Quels restes peut-on trouver dans la division par 5 ?

$\longrightarrow$ 0, 1, 2, 3, 4.

RECHERCHE 2

Comment peut-on organiser, classer les naturels d'après le reste de leur division par 5 ?

Première solution trouvée par les élèves.



Deuxième solution proposée :

0	1	2	3	4
0	1	2	3	4
5	6	7	8	9
10	11	12	13	14
15	16	17	18	19
20	21	22	23	24
25	26	27	.	.

(tableau 1)

Que remarque-t-on dans ce tableau ?

a) Classe 0 ——→ les nombres se terminent par 0 ou 5.

b) Dans chaque classe, la succession des nombres est de 5 en 5.

Partant de ces résultats, peut-on classer rapidement 329, 1 081, . . . ?

Comment ?

Ainsi se dégage une "règle" pour obtenir le reste de la division d'un nombre donné par 5.

La divisibilité par 5, déjà vue et caractérisée précédemment est remise en valeur dans ce tableau : les nombres divisibles par 5 appartiennent à la classe 0.

Remarquons que ce classement des naturels suivant les restes de la division par 5 réalise sur $\mathbb{N}$ une partition.

RECHERCHE 3

Reprenons la règle initiale où dans tout naturel on extrait le plus grand multiple de 5 possible.

Proposons-nous de composer "la table de multiplication des restes" ou "table des restes de la multiplication", * opération représentée par $\otimes$.

Exemple : 4 et 3

$4 \times 3 = 12$

Le reste de la division de 12 par 5 est 2, donc $4 \otimes 3 = 2$
et nous trouvons 2 à l'intersection de la ligne 4 et de la colonne 3

⊗	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1	0	4	3	2	1
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4
7	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3
8	0	3	1	4	2	0	3	1	4	2
9	0	4	3	2	1	0	4	3	2	1

(tableau 2)

(*) – L'appellation de cette table importe peu, en fait il s'agit d'appliquer la relation ⊗ qui fait correspondre à deux nombres donnés un nombre qui est le reste de la division par 5 de leur produit.

– Etudier la table : ses propriétés
ses particularités.

On y remarque un "carré" particulier qui se répète "indéfiniment" lorsque l'on prolonge la table.

Etude du carré

↓

Symétrie par rapport au centre.

(tableau 3)

0	0	0	0	0
0	1	2	3	4
0	2	4	1	3
0	3	1	4	2
0	4	3	2	1

x	x	x	x	x	x
x	a	b	c	d	x
x	b				x
x	c				x
x	d				x
x	x	x	x	x	x

← Soit la table suivante à compléter en application des "règles" du "carré" ci-dessus

(tableau 4)

Revenons à la table de l'opération ⊗ appliquée sur les naturels, la succession des "carrés" montre que la multiplication sur des naturels de la même classe ne modifie pas le reste de la division par 5.

Exemple : 11, 26, 31, . . . sont des éléments de $\dot{1}$

($\dot{1}$ se lit "classe 1")

3, 28, 33, 48 . . . sont des éléments de $\dot{3}$

– Cherchons la classe des produits : 11 X 3 ; 26 X 28 ; 31 X 33 ; 31 X 38 . . . .

11	3
26	28
31	33
	48
↓	↓
$\dot{1}$	$\dot{3}$

31 X 48 = 1 488 ; dans la division par 5 le reste est 3

31 X 33 = 1 023 ; dans la division par 5 le reste est 3

11 X 3 = 33 ; dans la division par 5 le reste est 3

Tous les produits appartiennent à la classe $\dot{3}$.

$\dot{1} \otimes \dot{3} = \dot{3}$

La poursuite de cette recherche permettrait d'établir la table de la relation $\otimes$ sur les classes $\dot{0}$, $\dot{1}$, $\dot{2}$, $\dot{3}$, $\dot{4}$

$\otimes$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$
$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$
$\dot{1}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$
$\dot{2}$	$\dot{0}$	$\dot{2}$	$\dot{4}$	$\dot{1}$	$\dot{3}$
$\dot{3}$	$\dot{0}$	$\dot{3}$	$\dot{1}$	$\dot{4}$	$\dot{2}$
$\dot{4}$	$\dot{0}$	$\dot{4}$	$\dot{3}$	$\dot{2}$	$\dot{1}$

(tableau 5)

(remarquer l'analogie avec le tableau 3)

Détection d'erreurs

Partant de ces derniers résultats, l'opération suivante étant donnée

47 X 56 = 2 636

Peut-on vérifier son exactitude ?

47 appartient à $\dot{2}$

56 appartient à $\dot{1}$

Le tableau n° 5 ci-dessus nous donne : $\dot{2} \otimes \dot{1} = \dot{2}$
donc le résultat du produit 47 X 56 doit être un nombre appartenant à $\dot{2}$
c'est-à-dire que, divisé par 5, son reste est 2.

Est-ce le cas du produit trouvé ?

2 636 : 5 = 527 reste 1
527 appartient à $\dot{1}$

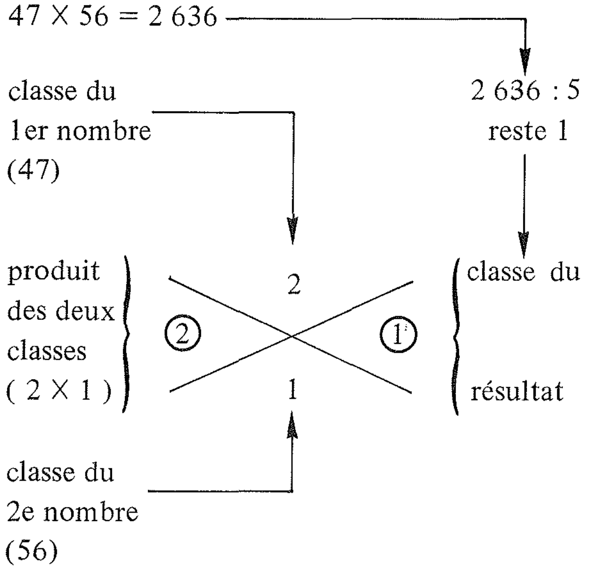
Le résultat de l'opération est donc inexact. Il aurait fallu trouver :

47 X 56 = 2 632

$$\boxed{\dot{2} \otimes \dot{1} = \dot{2}}$$

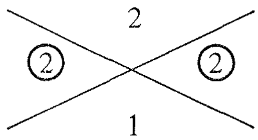
Ainsi, la "preuve par 5" est découverte et, dès lors, peut être présentée sous la forme habituelle :

Exemple donné



Les deux nombres entourés étant différents, l'opération est INEXACTE.

47 X 56 = 2 632



Les deux nombres entourés étant identiques, l'opération PEUT ETRE EXACTE.

Vers la "preuve par 9"

Etude de la table des multiples de 9

Dresser cette table.

Résultat

		0	0
		0	9
		1	8
		2	7
		3	6
8 nb		4	5
		5	4
		6	3
(tableau 6)		7	2
		8	1
		9	0
		9	9
	1	0	8
	1	1	7
	1	2	6
8 nb	1	3	5
	1	4	4
	1	5	3
	1	6	2
	1	7	1
	1	8	0
	1	8	9
	1	9	8
	2	0	7
	2	1	6
8 nb	2	2	5
	2	3	4
	2	4	3
	2	5	2
	2	6	1
	2	7	0
	2	7	9
	2	8	8

Que remarquez-vous sur la liste précédente ?

Enoncez toutes les particularités.

a) **unités** :

répétition de la suite 0, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 .

b) **dizaines** :

doublets séparés par 8 nombres consécutifs

$\boxed{0, 0,}\underbrace{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,}_{\text{8 nombres}}\boxed{9, 9,}\underbrace{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17,}_{\text{8 nombres}}\boxed{18, 18,}\underbrace{19, 20, 21, \ldots}_{\text{8 nombres}}$

c) **chaque ligne** :

somme des chiffres égale à 9 , à un multiple de 9 que l'on peut toujours ramener à 9 en continuant à faire la somme des chiffres :

$117 \longrightarrow 1 + 1 + 7 = 9$

$189 \longrightarrow 1 + 8 + 9 = 18 \longrightarrow 1 + 8 = 9$

La somme des chiffres de tout multiple de 9 peut être ramenée à 9.

– Soit le nombre 3 824. Est-il multiple de 9 ?

$3\,824 \longrightarrow 3 + 8 + 2 + 4 = 17 \longrightarrow 1 + 7 = 8$

3 824 n'est pas multiple de 9.

– Quel est le reste de la division de 3 824 par 9 ?

C'est 8 car $3\,824 = (9 \times 424) + 8$

– Peut-on rapprocher ce fait du résultat précédent ,

$3 + 8 + 2 + 4 = 17 \longrightarrow 1 + 7 = 8$?

Prenons d'autres exemples :

Dans la division de 1 975 par 9 le reste est 4 car $1\,975 = (219 \times 9) + 4$

Or on a aussi $1 + 9 + 7 + 5 = 22 \longrightarrow 2 + 2 = 4$

CONCLUSION

La somme des chiffres composant un nombre donné représente le reste de la division de ce nombre par 9 Si la somme est égale à 9, le nombre est multiple de 9 et le reste de la division par 9 est alors égal à 0.

Comme pour l'approche de la "preuve par 5", le reste détermine la classe dans la relation $\otimes$, on pourra donc faire la même étude pour 9.

Comme nous l'avons fait pour 5, dressons la "table de multiplication des restes" de la division par 9.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	0	1	2
2	0	2	4	6	8	1	3	5	7	0	2	4
3	0	3	6	0	3	6	0	3	6	0	3	6
4	0	4	8	3	7	2	6	1	5	0	4	8
5	0	5	1	6	2	7	3	8	4	0	5	1
6	0	6	3	0	6	3	0	6	3	0	6	3
7	0	7	5	3	1	8	6	4	2	0	7	5
8	0	8	7	6	5	4	3	2	1	0	8	7
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	1	2	3	4	5	6	7	8	0	1	2
11	0	2	4	6	8	1	3	5	7	0	2	4
12	0	3	6	0	3	6	0	3	6	0	3	6
13	0	4	8	3	7	2	6	1	5	0	4	8
14	0	5	1	6	2	7	3	8	4	0	5	1
15	0	6	3	0	6	3	0	6	3	0	6	3

(tableau 7)

– Etude de la table, ses propriétés, ses particularités.

– Analyse de ce curieux carré qui se répète.

L'étude du carré particulier du tableau n° 7 permet de voir que la relation $\otimes$ appliquée sur deux restes a pour résultat la somme des chiffres composant le nombre résultat du produit.

Exemple :

$$6 \times 7 = 42 \longrightarrow 4 + 2 = 6$$

$$6 \times 7 = 6$$

Ce qui nous amène à la vérification de résultats d'opérations.

$$3\,724 \times 137 =$$

$$3\,724 \longrightarrow 3 + 7 + 2 + 4 = 16 \longrightarrow 1 + 6 = 7$$

$$137 \longrightarrow 1 + 3 + 7 = 11 \longrightarrow 1 + 1 = 2$$

$$7 \times 2 = 14 \longrightarrow 1 + 4 = 5$$

7

2

(donné par le tableau n° 7)

$\longrightarrow$ pour que l'opération soit exacte, il faut que la somme des chiffres composant le résultat du produit donne 5 :

$$3\,724 \times 137 = 510\,188$$

$$5 + 1 + 1 + 8 + 8 = 23 \longrightarrow 2 + 3 = 5$$

Mais cela ne suffit pas !