

L'ESSENCE DES MATHÉMATIQUES

Bernard FUNTOWICZ
E.N.S.E.C. Bamako, Mali

Bernard Funtowicz est professeur de mathématiques et formateur d'enseignants à l'École Normale pour le Secondaire à Bamako au Mali. L'expérience qu'il nous rapporte ici m'a semblé intéressante pour les lecteurs de "petit x" car elle peut être pour tout enseignant la source de questions utiles. D'abord sur la complexité de l'utilisation des mathématiques comme outils pour résoudre un problème «réel» ou «concret», autrement dit la complexité de la modélisation. S'agissait-il seulement, comme le dit l'auteur, de «résoudre quelques équations du premier degré»? Mais aussi sur la signification de problèmes non routiniers, en rupture avec les habitudes de la classe, pour les élèves. Si tous les élèves ont apporté une réponse, quelle qu'elle soit, c'est peut-être parce que c'est ce qu'il faut faire dans un examen. Cet essai n'est pas sans rappeler celui de l'«âge du capitaine» il y a quelques années, à l'IREM de Grenoble. Finalement ce problème n'est peut-être pour les élèves ni un problème de la vie courante, ni un problème de mathématiques, alors quoi... C'est finalement au sens de l'activité mathématique scolaire, que ce texte nous incite à réfléchir.

N. BALACHEFF

L'ENONCE DU PROBLEME.

Un transporteur routier doit transférer un dépôt de 4500 litres d'essence de Sikasso à Tessalit distants de 1500 km. Le camion tout-terrain peut porter au maximum 1500 litres d'essence en fûts de 100 litres. Il consomme en moyenne 1 litre d'essence par kilomètre parcouru. L'essence consommée est prise sur le chargement.

Quelle est la meilleure manière de procéder pour disposer de la quantité d'essence maximale à Tessalit ?

Ce problème fut proposé avec cinq autres lors d'une épreuve de mathématiques durant 4 h, à des élèves-professeurs de 4^{ème} année Math-Physique-Chimie-Technologie de l'E.N.SEC.

LA RESOLUTION PROPOSEE PAR LE PROFESSEUR.

Cette solution n'est pas nécessairement la meilleure, ni la seule comme nous le verrons plus loin.

Il semble clair que :

- le camion ne doit pas aller jusqu'à Tessalit car il ne pourra pas en revenir,
- le camion ne doit même pas dépasser la moitié du trajet (750 km) pour la même raison,
- le camion pour optimiser le résultat, doit partir plein,
- le camion doit partir trois fois de Sikasso.

MA PROPOSITION EST LA SUIVANTE :

le transporteur doit faire un dépôt d'essence A entre Sikasso (S) et Tessalit (T) et retourner chercher le reste autant de fois qu'il est nécessaire.

Questions :

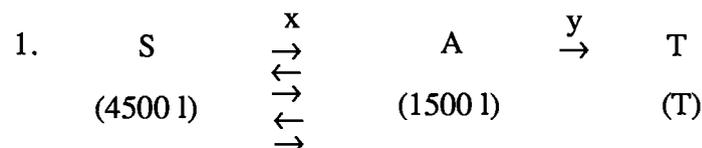
- Où doit être ce dépôt ?
- Combien de fûts y laisse-t-on ?

Comme le camion doit repartir plein, le dépôt doit être un multiple de 1500 litres, inférieur strictement à 4500 litres.

Deux possibilités :

1. 1500 l.
2. 3000 l.

La distance entre Sikasso et A qui est inconnue sera appelée de manière traditionnelle x .



$$- 5x + 1500 = 4500$$

$$x = 600$$

$$- x + y = 1500$$

$$y = 900$$

Il restera donc à Tessalit :

$$1500 - 900 = 600 \text{ l}$$

2.	S	$\overset{x}{\rightarrow}$	A	$\overset{y}{\rightarrow}$	B	$\overset{z}{\rightarrow}$	T
	(4500 l)	\leftarrow	(3000 l)	\leftarrow	(1500 l)		(?)
		\rightarrow		\rightarrow			

$$- 5x + 3000 = 4500$$

$$x = 300$$

$$- 3y + 1500 = 3000$$

$$y = 500$$

$$- x + y + z = 1500$$

$$z = 700$$

Il restera donc à Tessalit :

$$1500 - 700 = 800 \text{ l.}$$

La meilleure manière de procéder semble donc être la deuxième.

QUELQUES REFLEXIONS.

Faire des mathématiques c'est résoudre des problèmes. C'est dans cette optique qu'a été proposé ce problème qui se ramène à résoudre quelques équations du premier degré.

Faisons une (auto) critique du réalisme de ce problème "concret" :

Tout d'abord la distance réelle entre Sikasso et Tessalit n'est pas 1500 km (distance réelle par Koutiala-San-Sévéra-Gao-Bourem 1600 km). Ces deux villes éloignées ont simplement été prises pour bien isoler la situation-problème du contexte géographique, économique. Tessalit étant en plein désert, la camion était censé être livré à lui-même.

Deuxième liberté que j'ai prise : l'essence consommée à Tessalit provient non pas de Côte d'Ivoire mais d'Algérie.

Enfin je reconnais qu'une consommation moyenne de 1 l/km est quelque peu étonnante pour un véhicule personnel courant, mais on peut concevoir qu'un camion à

quatre roues motrices a cette consommation. Il aurait d'ailleurs suffi de donner comme consommation moyenne 0,5 l/km pour sauvegarder l'impossibilité apparente du problème.

Malgré ces quelques points de détail, le sujet proposé semblait cohérent.

A la fin de l'épreuve, les élèves sont venus me voir pour me faire part de leurs réflexions "à chaud" : "le problème du transporteur-là est vraiment trop difficile !". Dont acte.

Cinq élèves n'ont pas traité cet exercice. Les énoncés des solutions proposées ont été reproduits intégralement et fidèlement (hormis quelques abréviations de mon cru dues à une transcription fastidieuse : S., T., càd., nb., max.).

Je fus amené à étudier lors de la correction des copies plus particulièrement :

- La capacité de compréhension et d'assimilation des données d'un problème.
- Les facultés d'abstraction.
- La rigueur et la logique du raisonnement.
- La puissance de l'imagination.
- La variété des conjonctures, l'esprit d'initiative et l'empirisme.
- La méthode utilisée et les mécanismes de pensée de chaque élève.

SOLUTIONS DES ELEVES.

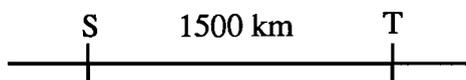
1. Capacité totale 4500 l.

Distance 1500 km.

Capacité d'un fût : 100 l.

Consommation 1 l/km.

La meilleure manière de procéder pour disposer de la quantité d'essence maximale à T est la suivante :



La consommation du camion est

$$1 \times 1 \times 1500 = 1500 \text{ l.}$$

Le transporteur routier doit effectuer des voyages pour le transfère de ce dépôt de 4500 l.

Au départ, nous mettons 3000 l dans le réservoir.

2. La meilleure manière de procéder pour disposer du maximum d'essence à Tessalit est de le remorquer par un autre camion ou chariot qui peut prendre le reste du dépôt (ce dernier n'ayant pas le moteur en marche).

3. La quantité réel que doit consommer la voiture sur 4500 l est 1500 l en parcourant 1500 km.
Pour la moindre consommation je procède de la manière suivante : à 3/4 de kilomètre le moteur s'échauffe et une quantité d'essence est transportée.
4. Pour disposer de la quantité d'essence maximale à Tessalit, le transporteur doit vendre l'essence à Sikasso, avec la recette il achètera l'essence à Tessalit. Si il effectue le transport à l'arrivée il aura tout consommé : car à chaque voyage, le camion consomme son chargement.
5. La meilleure manière de procéder pour que le transporteur routier dispose de la quantité d'essence maximale à Tessalit est de réduire son trajet le maximum que possible. Soit une distance inférieure à 1500 km.
6. Le nombre de tour que doit faire le camion est
 $4500 : 1500 = 3$ tours.
 $1 \text{ l} \rightarrow 1 \text{ km}$
 $\times 1 \rightarrow 1500 \text{ km}$
 $\times 1 = 1500 \text{ l}.$
 A chaque tour le camion consommera son chargement.
 Pour disposer de la quantité nécessaire il faut chercher un camion qui peut transporter les 4500 l en un seul tour.
7. Dépot 4500 l \rightarrow 45 fûts.
 Capacité maximale que le camion peut transporter est
 $1500 \text{ l} \rightarrow 15$ fûts.
 La quantité d'essence consommée sur 1500 km est
 $1500 \text{ l} \rightarrow 15$ fûts.
 Donc en principe le camion arrive vide à Tessalit car la capacité qu'il peut porter est égale à la quantité de consommation.
 La meilleure manière de procéder pour disposer de la quantité d'essence maximale à Tessalit est de ne pas prendre l'essence consommée dans le chargement dans ce cas il fera que 3 tours.
8. Il doit remorquer sa charge. C'est-à-dire tirer la charge sous un angle α tel que

$$\cos \alpha = \frac{1}{3}.$$
9. Il doit partir tout droit de Sikasso à Tessalit.

10. Quantité d'essence

$$4500 \text{ l} + 1500 \text{ l} = 6000 \text{ l.}$$

Consommation au km

$$4500 \text{ l} - 1500 \text{ l} = 3000 \text{ l.}$$

Quantité d'essence

$$6000 \text{ l} + 3000 \text{ l} = 9000 \text{ l.}$$

La meilleure manière de procéder pour disposer de la quantité d'essence maximale :

$$6000 \text{ l} + 3000 \text{ l} = 9000 \text{ l.}$$

Consommation au km

$$\frac{9000}{15000} = 1/\text{km}$$

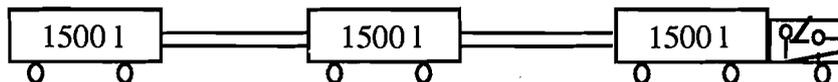
11. Un transporteur routier doit transférer un dépôt de 4500 l d'essence de S à T.

Distance entre S et T 1500 km.

Capacité maximum du camion 1500 l.

Le camion consomme 1 l/km.

Pour la meilleure manière de procéder pour disposer de la quantité max. à T. le transporteur doit avoir 2 autres camions wagon qu'il va traîner et ayant même capacité que son camion càd. contenant chacun 15 fûts.



Dans ce cas il ne va consommer que la contenance de son camion et arrivera à Tessalit avec 3000 l.

12. Le camion fera 3 allé retour.

A son arrivée à T. l'essence qu'il transporte sera fini.

Il faudra monter au camion un moteur qui ne consomme pas beaucoup d'essence et accrocher au camion un wagon qui peut porter 1500 l d'essence.

Il faudra remplacer le wagon du camion par un tonneau de citerne qui a le même volume que le wagon du camion. On pourra mettre plus 1500 l dans ce tonneau.

13. Si l'essence consommée par km est 1 l en moyenne de S à T distant de 1500 km, le camion consommera en moyenne 1500 l. Comme cette consommation est prise sur le chargement, la quantité maximale qu'on pourrait disposer à T. est $4500 \text{ l} - 1500 \text{ l} = 3000 \text{ l}$ soit 30 fûts d'essence. Or le camion peut porter au maximum 15 fûts. On peut procéder de la manière suivante : le camion portera sa consommation (15 fûts) et les 30 autres fûts seront mis dans une remorque ou wagon entraîné par le camion.

14. Dépôt 4500 l d'essence.

Distance 1500 km S → T.

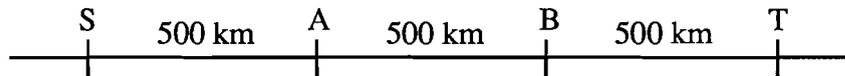
Charge du camion 1500 l.

Le camion porte en charge voyage $\frac{1500}{100} = 15$ fût.

Le dépôt fait donc 45 fûts.

La meilleure manière de procéder pour disposer de la quantité d'essence max. à T est de diviser le trajet en 3 étapes de 500 km chacune.

Le dépôt fait 3 voyages pour le camion



On met 15 fûts (soit 1500 l) dans le camion en S. A l'arrivée au point A il consomme les 15 fûts. On met 5 autres fûts dans le réservoir. Et les 5 fûts restant on les dépose en A puis le camion retourne en S. Il arrive au moment où son essence fini. Il fait un autre chargement et procède de la même manière qu'au premier chargement. Au bout du 3ème chargement il a 15 fûts au point A et son réservoir est vide.

Il repart de A en mettant 5 fûts dans le réservoir et en embarquant les 10 autres. A l'arrivée en B il met les 5 autres pour arriver à Tessalit avec 5 fûts soit 500 l.

15. De S à T le camion consomme 1500 l.

La quantité d'essence restante est $4500 - 1500 = 3000$ l.

La meilleure manière pour disposer de la quantité d'essence maximale à T. est

- on fait le chargement avec 15 fûts premiers

- les autres 15 fûts sont communiqués au réservoir du camion.

16. La meilleure manière de procéder pour disposer de la quantité d'essence maximale à T est de changer le camion.

17. L'essence consommée de S à T par le camion est

$$\left. \begin{array}{l} 1 \text{ km} \rightarrow x \text{ l} \\ 1500 \text{ km} \rightarrow x \text{ l} \end{array} \right\} x \text{ l} = 1500 \text{ l.}$$

$4500 - 1500 = 3000$ litres.

On sait que le camion consomme 1500 l.

Le reste d'essence à transporter est les 3000 l. Or 3000 l correspondent à 30 fûts de 100 l.

La meilleure manière pour disposer la quantité d'essence maximale à T. est la suivante

- Les 15 fûts premiers correspondents au chargement maximum du camion.
- On communique les 15 autres fûts au réservoir du camion. A chaque km le camion consomme 1 l d'essence et simultanément ce 1 l est remplacé par son équivalent.
- Arrivé à T. cela trouve que les 1500 l consommés par le camion sont remplacés par 15 fût d'essence.

D'où le chargement maximum est 15 fûts de 100 l et on tire les 15 autres fûts du réservoir. On a les 30 fûts à Tessalit d'où 3000 l d'essence.

- 18.** Le dépôt d'essence de Sikasso pour T. est 4500 l.

La distance est 1500 km. Le camion peut porter seulement 1500 l et consomme 1 l/km.

Normalement il doit faire 3 voyages or en faisant 3 voyages il ne lui restera rien car il va consommer les 4500 l.

Il est impossible sauf si le camion peut trainer avec lui d'autres porteurs de fûts et il se débrouera à faire moins de 3 voyages.

- 19.** La meilleure manière de procéder pour disposer de la quantité d'essence maximale à Tessalit est de choisir des fûts de 300 litres ou bien de choisir une citerne capable de transporter 3000 l s'il consomme 1 l par km.

- 20.** Si le camion consomme 1 l par km, c'est qu'il finira de consommer le chargement entre Sikasso et T. et faute de carburant il pourra pas retourner à Sikasso.

Il n'y a alors pas de moyens possibles pour transférer l'essence de S à T par ce camion et disposer d'une goutte d'essence à T. La meilleure manière est de chercher un autre camion qui consomme beaucoup moins que le premier pour espérer avoir une quantité d'essence à Tessalit.

- 21.** La consommation du camion pour l'aller est :

$$\left. \begin{array}{l} 1 \text{ km} \rightarrow 1 \text{ l} \\ 1500 \text{ km} \rightarrow x \text{ l} \end{array} \right\} x = 1500 \text{ l}$$

Le camion chargé consomme entre S et T 1500 l.

Après le départ du camion il reste à S $4500 - 3000 = 1500 \text{ l}$. Le nombre de fûts est $1500 \text{ l} : 100 \text{ l} = 15 \text{ fûts}$.

Pour disposer de la quantité d'essence maximale à T il faut charger le camion à S, arrivé à la moitié du trajet (S.T.) on décharge les 15 fûts d'essence du

camion. Puis le camion retourne à S. Ainsi les 1500 l qui étaient dans le réservoir du camion sont finis.

On met dans le réservoir du camion les 1500 l d'essence qui restaient à S. Ainsi le chauffeur reprend le trajet, arrivé à la moitié du trajet on charge les 15 fûts d'essence dans le camion et il continue son chemin. Ainsi il va amener à T les 15 fûts d'essence. A T nous aurons 1500 l d'essence.

22. Pour disposer de la quantité d'essence maximale à Tessalit, le transporteur doit charger au départ 1500 l et prendre 50 l d'essence à chaque 50 km parcourus. Ainsi il pourra apporter 1450 l à Tessalit.

Face à ce problème "impossible", les élèves proposent :

- des solutions pratiques :
 - changer la citerne (n° 19).
 - changer le moteur (n° 12).
 - changer le camion (n° 6, 16, 20).
 - ajouter une remorque (n° 2, 11, 12, 13, 18).
- des solutions irréalistes :
 - porter la capacité du réservoir jusqu'à 3000 l (n° 1, 15, 21).
 - prendre de l'essence tous les 50 km dans le désert (n° 22).
 - ajouter 2 remorques (n° 11).
- des solutions surréalistes :
 - diminuer la distance Sikasso-Tessalit (n° 5).
 - tirer le chargement avec un angle α tel que $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ (n° 8).
- des solutions mystérieuses :
 - essence transportée au bout de $\frac{3}{4}$ de km (n° 3).
 - ne pas prendre l'essence consommée dans le réservoir (ni dans le chargement) (n° 7).
 - multiplier la consommation moyenne par 6 (n° 10).
 - utiliser des fûts de 300 l (n° 19).
 - compenser la consommation à chaque km (n° 17).
 - aller tout droit (n° 9).

- une solution absurde :

comment acheter de l'essence à Tessalit si le transporteur ne l'a pas acheminée ? (n° 4).

- deux élèves ont l'intuition de la solution attendue :

l'auteur de la solution n° 14 a songé faire un dépôt intermédiaire mais il ne sait pas pourquoi il le place à 500 km de Sikasso. $\left(\frac{1500}{3}\right)$?. Le deuxième arrêt (B) est inutile. L'élève ne cherche pas à optimiser le résultat. Il n'essaie pas de faire varier la distance S-A. Néanmoins, il joue le jeu de l'énoncé sans tricher jusqu'au dépôt A et reste ensuite "raisonnable" en ne mettant que 500 l dans le réservoir ! Mais il ne se rend pas compte qu'il laisse 500 l en A.

l'auteur du n° 21 a aussi pensé au dépôt, peut-être parce qu'il n'a pas osé mettre plus de 1500 l dans le réservoir.

Je ne m'attarderai pas sur les sérieuses difficultés d'expression et de compréhension de la langue française de certains élèves.

Considérons les attitudes surprenantes des élèves face à ce problème. Ils s'investissent à tel point qu'ils ne se sentent plus confrontés à un simple énoncé mais à une situation problématique réelle. Ils proposent donc des solutions "concrètes" qui n'ont parfois aucun sens pratique (les remorques, le gros réservoir...) ni aucun sens physique (ils oublient que le camion consomme aussi lors du retour ; ou encore : 1500 l d'essence sont consommés instantanément à Sikasso ce qui permet d'arriver à Tessalit avec les 1500 l du chargement et les 1500 l du réservoir !).

Pourquoi n'ont-ils pas vu qu'on leur demandait effectivement une résolution pratique mais seulement grâce à l'outil mathématique et dans le cadre de l'énoncé ? Et pourquoi, au lieu de proposer des solutions impraticables, n'ont-ils pas pu dire que le problème était impossible ?

Par exemple, soit l'énoncé : "résoudre dans \mathbb{R} l'équation $x^2 = -1$ ". L'élève est capable de dire qu'il n'y a pas de solution ou que le problème est impossible. Il assume parfaitement cette impossibilité. Personne, à ce niveau d'étude, ne va essayer de résoudre à la place $x^2 = +1$ ou $2x = -1$ ou $3y = 4$ ou ..., ni proposer des solutions farfelues. Dans la vie courante tout peu s'arranger !

- Malgré l'échec à cet exercice (ou l'échec de cet exercice), j'avoue que j'ai beaucoup appris en corrigeant ces copies.