UNE ETUDE SUR LES DIFFICULTES D'ENSEIGNEMENT DES NOMBRES REELS

Claire MARGOLINAS
Equipe de Didactique des Mathématiques
et de l'Informatique, IMAG
Université - Grenoble 1

L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels est introduit en France en classe de 4eme (élèves de 13-14 ans). Les enseignants ont pu éprouver dans leur pratique la difficulté de cette tâche. Je chercherais donc, dans une première partie, à situer le rôle de cette introduction dans le système d'enseignement. Au regard de cette analyse, nous chercherons à comprendre, dans une deuxième partie, où en sont nos élèves après cet enseignement (3e et 2e). Nous verrons comment "l'obstacle des infiniment petits", bien décrit dans le cadre de l'analyse réelle, apparait ici de façon spécifique, proche de son domaine de validité.

I - SUR LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE DE NOMBRE REEL

Dans cette première partie nous nous interrogeons sur **la fonction du savoir** "nombre réel", en mathématiques, et dans le système d'enseignement.

1 - rapide historique.

Retraçons rapidement l'histoire de la création de $\mathbb{R}$. Nous devons tout d'abord distinguer l'étude de quelques nombres irrationnels et le fondement de l'ensemble des nombres réels , c'est à dire l'apparition de $\mathbb{R}$ en tant que structure axiomatisée.

$\mathbb{R}$ en tant que structure a été introduit à la fin du 19e siècle, grosso modo simul-

"petit x" n° 16 pp. 51 à 66, 1988

tanément par Cantor, Dedekind, Meray, Weierstrass. D'une certaine manière, **cette axiomatisation se place à l'apogée de celle de l'analyse réelle.**

Dedekind en parle très clairement (Dedekind 1872) en insistant sur la motivation de sa construction. Il place $\mathbb{R}$ à l'intersection de trois grands domaines mathématiques, le géométrique, le numérique, l'analytique. Elle est basée sur le besoin de libérer la notion de continuité de l'évidence géométrique. Son exposé commence par les propriétés des rationnels "considérés comme des conséquences nécessaires de l'arithmétique", pour comparer les propriétés de $\mathbb{Q}$ avec celle d'une droite intuitivement continue et conclure à un manque de continuité de $\mathbb{Q}$.

Cette synthèse est d'une certaine manière l'aboutissement de mouvements parallèles et parfois contradictoires. En effet, bien avant l'introduction de la théorie des fonctions, ont coexisté les points de vue numériques et géométriques sur ce que nous appelons les réels.

Le plus connu est le géométrique, qui avec la découverte de l'irrationalité de certains "nombres" (comme $\sqrt{2}$) a rejeté hors du mathématique (de la science du géomètre) l'étude de ces nombres, donnant en quelque sorte une réponse négative entre une adéquation possible du géométrique et du numérique.

Mais, du point de vue numérique, des approximations de "nombres" comme π, ou des racines, se developpent. Des écritures, en particulier l'écriture décimale achevée présentée par Stevin, qui permettent d'écrire toutes les approximations, existent. Plus tard, certains de ces nombres seront mieux situés , on distinguera transcendants et algébriques, des démonstrations de transcendance (en 1737 Euler montre que e et e^2 sont transcendants, puis Lambert prouve celle de π) seront faites.

L'analyse, si elle se base implicitement sur des propriétés de "continuum" des nombres, déplace les problèmes en inventant des objets qui lui sont propres (les infinitésimaux, les limites).

2 - $\mathbb{R}$ dans le système d'enseignement.

Dans le cadre scolaire, $\mathbb{R}$ apparait en tant qu'ensemble structuré en classe de 4e, avec la réforme de 1970, dite "des maths modernes", son étude est toujours présente dans les programmes depuis cette date. Dans cet article, je ne m'interesserai qu'à l'**apparition** de $\mathbb{R}$ dans les programmes, ce qui m'amène à raisonner uniquement sur le programme de 70.

2.1 Du modèle mathématique au modèle d'enseignement.

Comme je l'ai signalé, dans les présentations axiomatiques de l'analyse, la construction de $\mathbb{R}$ est le fondement, et donc le premier chapitre dans la présentation. Il est symptomatique en ce sens que ce soit la réforme de 70, la plus "axiomatisante" des réformes scolaires, qui ait introduit cet objet, très tôt dans le cursus, et en particulier, avant l'étude de l'analyse "réelle".

On peut dire que le modèle inductif de structuration des mathématiques a été en quelque sorte importé comme modèle d'enseignement:

Modèle axiomatique	*Importation*	*Modèle d'enseignement*
La construction de R est la base mathématique de l'analyse	→	L'étude de R est la base de l'étude de l'analyse

Je vais chercher à mettre maintenant en relief le fait qu'il ne s'agit que d'un type possible de transposition.

2.2 Le modèle historique.

Si nous cherchons à importer directement le modèle historique, nous obtenons le schéma suivant:

Modèle historique	*Importation*	*Modèle d'enseignement*
La construction de R est l'étape ultime de la construction de l'analyse	→	L'étude de R est l'étape ultime de l'étude de l'analyse

Nous avons obtenu ainsi l'exact inverse de la phrase précédente! Celà signifie-t-il que nous devrons maintenant nous attendre à une discussion sur les mérites respectifs des modèles mathématiques et historiques ? Il me semble qu'au contraire ce petit tour de passe-passe nous fait comprendre que la validation des modèles pour l'enseignement des mathématiques ne peut se faire qu'à l'**intérieur** d'une reflexion (d'une théorie) sur l'enseignement des mathématiques lui même.

2.3 Modèle d'apprentissage

Si l'importation du modèle mathématique comme modèle d'enseignement ne va pas de soi, il n'en est pas moins une pratique courante dans la composition de programmes de mathématiques et leur justification. Il nous faut donc comprendre pourquoi c'est ce modèle qui est actuellement valorisé, et pas, par exemple, le modèle historique. En effet, notre travail consiste à comprendre quel est le rôle des décisions dans l'économie du système d'enseignement.

Or nous pouvons faire une analyse du phénomène d'importation en le reliant à un modèle d'apprentissage bien connu.

L'enseignant est lié à la société par ce que nous pouvons appeler un contrat d'enseignement. Ce contrat , comme le contrat didactique qui régit le fonctionnement de la classe, est le plus souvent non explicité, ou non explicitable. Il fait partie des lois du système didactique. Il n'est pas immuable, mais il n'est pas du ressort d'un individu de le modifier, car il engage plusieurs partenaires.

Une des "clauses" actuelle du contrat d'enseignement peut s'énoncer ainsi :
"Tout le contenu d'une leçon de mathématique doit être mathématiquement correct".

A première vue, il s'agit d'une tautologie, en tout cas, il ne s'agit pas de remettre en cause la nécessité d'un tel contrôle mais plutôt de comprendre une partie de ses effets.

Si nous regardons cette phrase de plus près, qui peut être le garant du "mathématiquement correct", sinon le mathématicien (professionnel). Dans cette phrase, on a donc implicitement introduit le droit de regard du mathématicien dans la classe de mathématique. Le mathématicien ne voit que les manifestations les plus externes de l'enseignement et de l'apprentissage : les manuels, et parfois des copies d'élèves. Enoncer correctement la langue mathématique risque de devenir plus important que de comprendre les concepts mathématiques, et même de savoir les utiliser de façon pertinente. Elle a pour corollaire d'interdire au maitre de laisser subsister (ou pire de susciter) des connaissances "intermédiaires" dans sa classe.

Le modèle d'apprentissage qui soutient l'idée de l'importation pourrait bien être le suivant:

"un contenu mathématiquement correct ne peut engendrer que des conceptions mathématiquement correctes".

Cette conception de l'apprentissage est liée à une théorie empiriste de la connaissance. L'élève est comme un réservoir, s'il est rempli avec les bonnes connaissances, il acquiert des bons savoirs, aucune élaboration n'existe de sa part que la réception du savoir. Dans cette conception de l'apprentissage la question centrale est de savoir avec quoi on doit remplir la tête de l'élève. Ce qui expliquera un éventuel insuccès de l'enseignement serait alors soit le manque de formation (mathématique) de l'enseignant, soit un problème de communication (manque de motivation par exemple) avec l'élève.

Cette théorie a été combattue par les psychologues cognitivistes et en particulier par Jean Piaget. Les études de didactiques des mathématiques ne cessent de confirmer qu'il s'agit d'une illusion, en particulier à cause de la présence d'obstacles constitutifs à l'acquisition d'une connaissance.

II - CONCEPTIONS DES ELEVES AU SUJET DES NOMBRES.

1 - Rôle de notre enquête

Pour construire des modèles spécifiques pour l'enseignement, nous avons besoin d'information sur la façon de raisonner des élèves, sur leurs modèles conceptuels. Mais nous ne pouvons observer que certaines de leurs actions ou stratégies de résolution. De ces observations, nous pouvons parfois inférer un modèle de fonctionnement, dont la pertinence sera encore à établir. Le problème, pour le chercheur, n'est donc pas de poser des question "usuelles" pour voir si les élèves ont acquis un "bon niveau", mais de trouver des questions pour lesquelles l'élève devra élaborer des réponses qui seront interprétables dans une grille d'interprétation (l'analyse a priori). C'est pourquoi les questions que vous trouverez plus loin ne doivent pas être jugées à l'aune de leur normalité, mais bien de leur conformité à l'objectif qu'elles visent. Dans notre cas, l'objectif est double. D'une part, il faut pouvoir questionner le rôle de propédeutique pour l'étude de l'analyse qui est attribué aux nombres réels. D'autre part, de comprendre quel modèle de nombres fonctionne pour les élèves.

L'introduction des nombres réels en classe de 4e, si elle n'est plus systématiquement faite par les écritures décimales illimitées comme c'était le cas en 1970, continue à comporter le plus souvent de telles écritures (présentes dans tous les manuels que j'ai pu consulter). J'ai utilisé ces écritures comme "révélateur" dans le but indiqué ci-dessus.

L'expérience a comporté deux phases. La première consistait en une interrogation orale d'une heure, de binômes d'élèves de 3e ou de 2e (7 binômes). La deuxième était un questionnaire individuel (papier crayon), avec 147 élèves (57 de 3e, 90 de 2e).

2 - Les questions posées.

Je ne parlerai pas des résultats de tout le questionnaire (voir Margolinas 1985a). Les autres questions (14 en tout) portaient sur l'ordre sur les décimaux, les rationnels, et dans une moindre mesure, les écritures décimales illimitées.

Le questionnaire commençait par un préliminaire écrit, qui était lu avec les élèves avant le commencement du travail.

<u>*Préliminaire:*</u>

On notera $2,\overline{0}$ le nombre 2,0000... Il y a une infinité de zéros répétés, il n'y a pas de dernier zéro. De même $2,\overline{32}$ signifie 2,323232... (...)

Dans ce questionnaire, tu auras peut-être besoin d'inventer des écritures dont tu n'as pas l'habitude, n'hésite pas à employer la "barre" ou les "..." pour te faire comprendre.

<u>*Question 8*</u>

Ecris à ta manière le résultat de l'opération:
$1,\overline{4} + 3,\overline{7} = \ldots$

<u>*Question 9*</u>

1) Ecris le plus grand nombre de l'intervalle [2 ; 3] : ...
2) Y a-t-il un plus grand nombre de l'intervalle [2 ; 3 [?
Oui et c'est ...
Oui , mais je ne sais pas lequel

Non.Parce que..

3) Ecris le plus petit nombre de l'intervalle [2 ; 3] : ...

4) Y a-t-il un plus petit nombre de l'intervalle]2 ; 3] ?

Oui et c'est ...

Oui , mais je ne sais pas lequel

Non. Parce que ....

<u>*Question 10*</u>

1) Le nombre $0,\overline{9}$ *est:*

égal au nombre 1

plus petit que le nombre 1

plus grand que le nombre 1

2) Quel est le résultat de l'opération

$1 - 0,\overline{9} = \ldots$

Si vous ne pouvez pas répondre, expliquez pourquoi:

....

<u>conventions</u>

On appellera <u>Dn</u> l'ensemble des nombres pouvant s'écrire comme "suite finie de chiffres comportant une virgule et exactement n chiffres après celle-ci"

On appelera <u>D∞</u> l'ensemble des nombres pouvant s'écrire comme "suite de chiffres indéfinie vers la droite et comportant une virgule"

<u>exercice</u>

Avant de lire ce qui suit, je vous recommande de prendre un crayon, et d'écrire quelles sont les réponses les plus probables de vos élèves à ces questions (aussi bien les réponses justes que les réponses fausses, vous pouvez imaginer plusieurs types de réponses par question). Ce travail, qu'on peut appeler "analyse préalable", est très important dans le travail de recherche pour comprendre la nature des observations. En particulier, il oblige à réfléchir à ce qu'on avait pas prévu.

3 - Analyse a priori.

On va analyser ici les types de réponses possibles aux questions posées :

questions	8	9.2	9.4	10.2
	$(1,\overline{4}+3,\overline{7}=?)$	([2,3[?)	(?]2,3])	$(1-0,\overline{9}=?)$
1. Réponses mathématiquement correctes				
	$5,\overline{2}$	Non	Non	0
2. Réponses décimales				
exemple dans D1				
	5,1	2,9	2,1	0,1
exemple dans D2				
	5,21	2,99	2,01	0,01
3. Réponses "décimale barre"				
	$5,\overline{1}$	$2,\overline{9}$	$2,\overline{1}$	$0,\overline{1}$
4. Réponses "infinitésimales"				
	$5,\overline{2}1$	$2,\overline{9}$	$2,\overline{0}1$	$0,\overline{0}1$

Les réponses mathématiquement correctes se comprennent d'elles-mêmes.

Les réponses décimales sont celles qui se fixent un Dn dans lequel donner la réponse, nous les avons regroupées sans tenir compte du Dn choisi.

Les réponses "décimale barre" correspondent à des élèves qui ont exactement des réponses dans D1, auxquelles une barre a été rajoutée à la partie décimale.Pour les questions 8 $(1,\overline{4}+3,\overline{7}=?)$ et 10.2 $(1-0,\overline{9}=?)$, celà revient à considérer que les règles d'opération sur les décimaux se reportent sur les décimaux illimités, moyennant l'adaptation du rajout de la barre.

Les réponses "infinitésimales" sont celles dans lesquelles l'élève envisage la possibilité d'un nombre, qu'on pourrait écrire $0,\overline{0}1$, qui est positif, plus petit que tous les nombres positifs, mais cependant pas égal à zéro. Toutes ces réponses ont ce "nombre" $0,\overline{0}1$ comme différence avec les réponses mathématiquement correctes .

4 - Résultats bruts du questionnaire.

Dans le questionnaire individuel, j'ai obtenu les résultats suivants :

A la question 10.1 (comparaison de $0,\overline{9}$ et 1), 147 réponses "plus petit", soit *100%* des réponses.

réponses	questions 8 $(1,\bar{4}+3,\bar{7}=?)$	9.2 ([2,3[?)	9.4 (?]2,3])	10.2 $(1\text{-}0,\bar{9}=?)$
math. correcte	13 *(08.8)*	32*(21,8)*	32*(21.8)*	03*(02.4)*
décimale	29 *(19.7)*	21*(14.3)*	13*(08.8)*	22*(15.0)*
décimale barre	48*(32.6)*		07*(4.8)*	61*(41.5)*
infinitésimale	23*(15.6)*	39*(26.5)*	17*(11.6)*	22*(15.0)*
oui mais...	-	31*(21,1)*	25*(17,0)*	-
non réponse	07*(04,8)*	20*(13,6)*	22*(15,0)*	31*(21,1)*
autre	27*(18,4)*	04*(4,8)*	31*(21,1)*	08*(05,4)*

Tableau des réponses aux questions 8,9,10 selon les critères définis plus haut avec le nombre de réponses et en italique le pourcentage de réponses.

Pour la question 9.2 ([2,3[?) (, les réponses "décimale barre" ont été regroupées avec les réponses "infinitésimales" dont elles ne peuvent se distinguer.

Nous pouvons tirer quelques informations de ce tableau. La première est que toutes les classes que nous avons décrites précedemment existent. Notons la relative stabilité (autour de 15% des réponses) des réponses classées "décimales" et "infinitésimales". Cette stabilité est importante car ces réponses correspondent à des productions de la part des élèves, et pas seulement à des réponses "d'opinion" du type Oui ou Non. De plus, dans le cas des réponses "infinitésimales" il s'agit de production d'écritures originales.

5 - Un aperçu des entretiens.

Ces questions n'ont pas été posées à tous les binômes, la question 9.4 (?]2,3]) n'a pas été posée. Je ne présenterai ici que quelques passages qui me semblent éclairer les réponses au questionnaire.

Question 8 $(1,\bar{4}+3,\bar{7}=?)$

Dans le groupe Corinne (2e)/ Eric (TG3) (il s'agit du seul élève qui n'était pas de 3e ou de 2e). Corinne propose la réponse $5,\bar{21}$, suit la discussion :

Eric : "C'est pas possible !"
Corinne : "Si, c'est possible !"
Eric :"Non, ça va à l'infini, qui par définition ne se termine pas, donc , ton 1, c'est impossible, ton 1, il peut pas être final, on va jamais le trouver ce 1."
Corinne :"Alors comment tu l'écrirais?"
Eric :"Y a pas de résultat parce que c'est pas possible."
Corinne ne dit plus rien.

Dans le groupe Irène (3e)/Sandrine (3e)
Elles ont donné la réponse $5,\overline{2}1$,l'expérimentateur demande ce que veut dire le 1 :

Sandrine :"Il sera toujours en dernier, il viendra après le 2."
Irène :"Ben oui, il y aura une infinité de 2 et toujours 1 à la fin."
Sandrine:"Y aura toujours une infinité de 2, et toujours un 1 qui suivra les 2."

Question 9.2 ([2,3[?)

Stéphane : "Y en a toujours un, bien sûr, c'est la limite, mais pour l'écrire ... Mais non c'est pas trois, bien sûr, c'est deux, deux virgule neuf neuf neuf ".
Il écrit $2,\overline{9}$

Tous les groupes ont donné comme réponse finale $2,\overline{9}$

Question 10.2 ($1-0,\overline{9}=$?)

(la même question a été posée pour la différence $3 - 2,\overline{9}$)
Le groupe Bruno/Christian (3e) a donné la réponse $0,\overline{0}1$ l'expérimentateur leur demande "où est le 1 ?"

Christian :" Après les zéros"
Bruno : "Il est à l'infini, il est tout à la fin"
Bruno : "Il se placera après l'infinité de zéros."
Christian : "Cà dépend quand on pose l'opération combien on met de chiffres après."
Christian : "Il se trouve à la fin, en dernière position."

En entretien, on obtient donc pour la question 9.2 ([2,3[?) 100% de réponses 2,9 à la fin des discussions. Cette réponse a été privilégiée comme réponse finale, et n'a jamais été remise en cause après la question de la différence ($3 - 2,\bar{9}$). Il n'y a eu aucune réponse de type décimale.

6 - Premier commentaire.

Avant de rentrer dans une analyse plus fine, notons déjà que les types de réponses erronés décrits et obtenus ne sont pas équivalents.

Les réponses décimales, en particulier dans D1, sont des réponses peu élaborées, en particulier en réponse aux questions 9.2 ([2,3[?) et 9.4 (?]2,3]). Tout se passe comme si entre 3 et $2,\bar{9}$ il n'y avait aucun autre nombre. Ce type de conception sur les nombres décimaux est d'ailleurs bien connu (Izorche 1977). $\mathbb{D}$ est la réunion d'ensembles Dn qui ne sont pas inclus les uns dans les autres mais juxtaposés. Si on ne sait pas dans quel Dn on travaille, on ne peut rien faire, ce qui est d'ailleurs exprimé explicitement par certains élèves. $\mathbb{D}$ perd ainsi ses qualités spécifique pour devenir une collection d'ensembles Dn qui sont analogues à $\mathbb{N}$ (avec une virgule).

Les réponses "infinitésimales", sont des réponses plus élaborées, qui dénotent un fonctionnement des coordinations des différents Dn. Pour donner ces réponses, il faut avoir remarqué, par exemple dans la question 8 ($1,\bar{4}+3,\bar{7}$=?) (, que dans D1 on obtient 5,1 dans D2 5,21 et que si on continue les 2 continueront à augmenter. Ce qui disfonctionne dans cette conception de $D\infty$ c'est justement le problème de l'infini, c'est à dire ce qui est spécifique de la consitution des réels, mais ce qui concerne les décimaux est maitrisé.

On peut donc faire l'hypothèse d'une hiérarchie de ces stratégies, dont une première confirmation se trouve dans les entretiens individuels, tous les groupes ayant eu la réponse infinitésimale à la question 9.4 (?]2,3]), après discussion. Les réponses décimales n'ont pas résistées à la confrontation des élèves en binome. Par contre les réponses infinitésimales, même les réponses "choquantes" du type $0,\bar{0}1$ résistent même aux tentatives de déstabilisation de la part de l'expérimentateur.

7 - Résultats d'une analyse plus fine.

L'analyse factorielle des correspondances a été faite sur tout le questionnaire. Plutôt que de reproduire le diagramme entier (Margolinas 1985a ou 1985b), voyons les conclusions qui se dégagent du premier plan factoriel (fig.1).

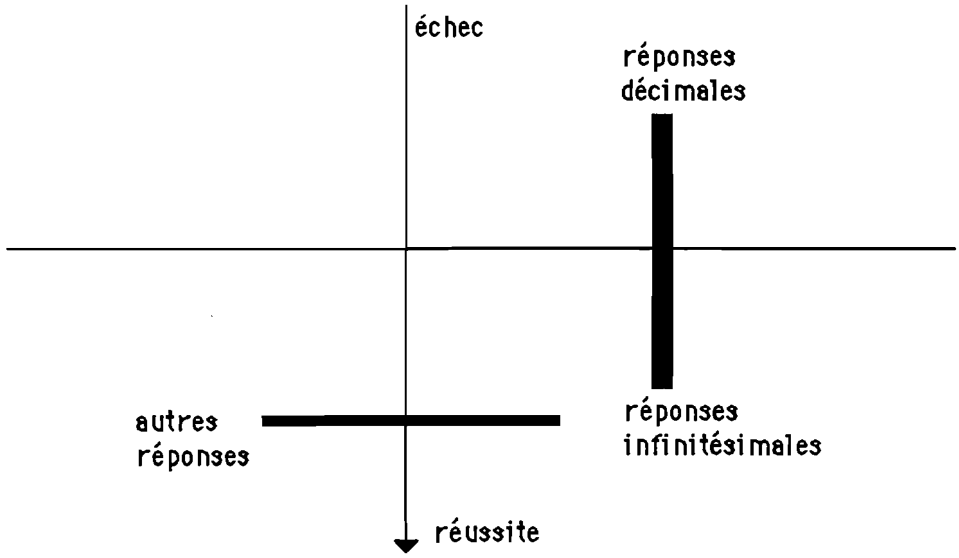

figure 1

J'ai écris "réponses décimales" et "réponses infinitésimales" car ces réponses aux questions présentées (8,9, 10) sont groupées selon le plan factoriel (c'est à dire selon une mesure de chi2). On peut donc dire que du point de vue statistiques, il s'agit de stratégies de réponse cohérentes (un élève qui répond décimal a de forte chance de continuer à donner des réponses décimales). Il s'agit donc d'un premier résultat de cette analyse. Les autres réponses s'opposent globalement aux autres mais sans être groupées pour autant (même les réponses "mathématiquement justes").

La deuxième chose que l'on peut noter est que ces questions, qui étaient des questions parmi d'autres dans le questionnaire, sont celles qui s'opposent le plus nettement, on peut dire qu'elle départagent les élèves de ce niveau en deux groupes de compétence.

Des analyses (Margolinas, 1985) montrent que, classiquement, l'axe 1 (vertical) est un axe Echec/Réussite. Les réponses décimales sont donc caractéristiques d'élèves en difficulté, et toutes les autres (et en particulier les réponses "infinitésimales") celles d'élèves ayant de bonnes réussites. On peut remarquer que ce résultat est cohérent avec ceux des entretiens .

On peut signaler (ce qui n'est pas visible sur ce diagramme) que les réponses "infinitésimales" sont corrélées avec la réussite à des questions qui demandaient une bonne maitrise des relations entre les différents Dn.

III - CONCLUSIONS

1 - "Les décimaux en classe de 2e".

J'ai repris à dessein le titre du mémoire de Izorche 1977, qui avait montré que les difficultés concernant les nombres décimaux était loin d'être entièrement réglées en classe de 2e. Or, si notre propos n'était pas au départ un travail sur les décimaux, nous avons été contraints de nous y intéresser à cause de certains de nos résultats. Rappelons que en particulier à la question: "Pouvez vous donner, s'il en existe, un nombre réel qui soit compris entre 2,746 et 2,747?" 39,7% des élèves répondaient: Il n'y en a pas.

Or la structuration de $\mathbb{D}$ à partir des différents Dn est d'une certaine manière mieux résumée sous la forme de $D\infty$, où on "voit" le rôle des approximations successive, que dans $\mathbb{D}$ lui même, où on travaille toujours dans un Dn, qu'il faut imaginer comme étant quelconque, ou "bien choisi". L'utilisation des écritures décimales illimitées peut être mise en relation avec une stratégie efficace de compréhension de $\mathbb{D}$, mais pas de $\mathbb{R}$!

L'enseignant, au sujet de l'enseignement des décimaux, et en particulier des relations d'ordre et de topologie dans $\mathbb{D}$ se trouve dans une situation très désagréable. Il ne peut véritablement aborder les problèmes topologiques typiques de $\mathbb{D}$ (comme ceux des questions 9.2 ([2,3[?) et 9.4 (?]2,3])) sans voir surgir des écritures "monstrueuses" qu'il aura ensuite beaucoup de mal à éliminer. Etant dans l'impossibilité "contractuelle" d'accepter des connaissances approximatives, il en est réduit à les ignorer, c'est à dire à ne pas se mettre dans la situation qui lui permettrait de les voir, il ne peut donc mettre les élèves dans des situations qui leur permettraient d'éprouver leur connaissances, et d'en acquérir de nouvelles.

2 - stabilité des conceptions infinitésimales.

On peut se demander s'il y a des possibilités de déstabiliser ces conceptions sans sortir du domaine numérique. En effet si on veut répondre à l'injonction du contrat d'enseignement évoquée plus haut, c'est dès la 4e, ou du moins, avant l'étude de l'analyse, qu'il faudrait traiter le mal.

Dans l'expérimentation, on a déjà testé l'inefficacité d'une des déstabilisation de l'inégalité $0{,}\overline{9} \neq 1$ qui est de demander d'effectuer la différence $0{,}\overline{9} - 1$. J'ai pu lire dans Izorche 1977 :

"Signalons encore que avec un petit nombre d'élèves (six) nous avons examiné les "bonnes réponses" à ce questionnaire ; toutes avaient répondu que $3,\bar{9}$ est inférieur à 4, mais alors, quand nous avons demandé d'intercaler un nombre entre les deux précédents elles ont immédiatement trouvé la bonne réponse."

Ce passage de Izorche nous montre la prudence avec laquelle il faut avancer des résultats hors d'une expérimentation contrôlée (et incidemment l'intérêt de telles recherches...) !

On peut suggerer au lecteur deux autres "contradictions" , qui n'ont pas été proposées aux élèves dans l'expérimentation .

CONTRADICTION 1

1) $0,\bar{9} \neq 1$

2) $1/3 = 0,\bar{3}$

3) $1/3 \,.\, 3 = 1$

4) $0,\bar{3} \,.\, 3 = 0,\bar{9}$

Ces phrases ne peuvent être toutes vraies, quelle est la fausse ?

CONTRADICTION 2

1) $0,\bar{9} \neq 1$

2) $10 \,.\, 0,\bar{9} = 9,\bar{9}$

3) $9,\bar{9} - 0,\bar{9} = 9$

donc $0,\bar{9}\,(10 - 1) = 9$

donc $0,\bar{9} = 9/9$

c'est à dire $0,\bar{9} = 1$

Où est l'erreur ?

On peut signaler (en commettant délibéremment l'erreur ci dessus dénoncée) que ces "contradictions " soumises hors contrôle à des classes n'ont pas l'air de déstabiliser les élèves. On pourra d'ailleurs (en exercice!) chercher à réfuter ces "contradictions" en utilisant une logique "infinitésimale", c'est assez simple pour la première, plus difficile pour la deuxième.

3 - le champ conceptuel.

Comme l'esquisse notre étude historique, le concept de nombre réel , ou d'ensemble R, est à l'intersection de plusieurs domaines mathématiques. Des analyses (Sierpinska 1985) nous ont déjà montré qu'il est lié au champ conceptuel de l'analyse.

Or les réponses infinitésimales que nous avons repérées ici sont reliées à "l'obstacle des infiniments petits" qui a été décrit dans d'autres études sur l'analyse (Cornu 1983, Robinet).

Or l'idée du champ conceptuel (Vergnaud 1981) nous aide et nous oblige à prendre en compte le temps d'apprentissage . Cette idée nous oblige également à repenser la notion d'acquisition.

En effet le champ conceptuel n'est pas pour nous un simple regroupement de notions mathématiques liées entre elles, mais la délimitation d'une sorte de noyau dur dans lequel les notions sont imbriquées de façon nécessaire , des deux points de vue mathématique et cognitif. On pourrait dire qu'il s'agit d'une sorte d'architecture dans laquelle chaque notion renvoie à l'autre de façon circulaire. Dans une telle configuration, la priorité d'une notion par rapport à une autre ne veut rien dire, chacune étant d'une certaine manière incomplète sans l'apport des autres.

D'un point de vue pratique, une telle analyse changerait les modèles d'enseignements décrit dans la première partie dans le suivant :

"On peut décider de commencer par l'étude de R, qui sera le premier maillon rencontré par l'élève dans le champ conceptuel de l'analyse ".

Sans oublier que cette phrase a pour conséquences, d'une part qu'il ne s'agit pas d'une "acquisition du concept de réel" qui sera alors faite, d'autre part qu'il sera nécessaire d'étudier tous les concepts du champ conceptuel de l'analyse en interaction, ce qui implique en particulier de retravailler celui de nombre réel.

BIBLIOGRAPHIE

BENZECRI J.P et F., 1984, *Pratique de l'analyse des données T.1, Dunod.*

BROUSSEAU G.,1980 et 1981, Problèmes de didactique des décimaux, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 1.1 et 2.1 p 11-75 et 37-127.

BROUSSEAU G.,1983, Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 4.2 p 165-198.

BROUSSEAU G., 1984, le rôle central du contrat didactique dans l'analyse et la construction des situations d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques, *Actes de la IIIe Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*, ed IMAGrenoble.

CHEVALLARD Y., 1983, Remarques sur la notion de contrat didactique, *Exposé de la rencontre Inter Irem Université.*

CHEVALLARD Y., 1985, *La transposition didactique* ,La pensée sauvage.

DAHAN-DALMEDICO A., Peiffer J., 1982, *Routes et dedales* , Etudes vivantes.

DEDEKIND R.,1872,1887, *Essays on the theory of numbers : Continuity and Irrational Numbers. The Nature and Meaning of Numbers*, Dover ,1963.

CORNU B. , 1983, *Apprentissage de la notion de limite*, Thèse de Doctorat de 3ème cycle, Université de Grenoble I.

DHOMBRES J., 1978, *Nombre, mesure et continu* , Cedic/Fernand Nathan.

DUGAC P., 1976, *Richard Dedekind et les fondements des mathématiques,* Vrin.

IZORCHE M.L., 1977, *Les réels en classe de seconde*, Mémoire de DEA, Université de Bordeaux I.

KLINE M., 1972, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times,* Oxford University Press.

MARGOLINAS C., 1985a, *Quelques questions sur l'enseignement des nombres réels,* Mémoire de DEA Université de Bordeaux I.

MARGOLINAS C., 1985b, Ecriture des nombres et obstacle des infiniments petits chez des élèves de troisième et de seconde, *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique, IMAG.*

OVAERT J.L., VERLEY J.L., 1983, *Analyse vol I*, CEDIC

ROBINET J., Les réels : quels modèles en ont les élèves ?, *Cahiers de didactique des mathématiques n°21.*

SIERPINSKA A., 1985, Obstacles relatifs à la notion de limite, *Recherches en Didactique des Mathématiques* vol 6.1 p5-69.

STEVIN S., 1585, *Traicté des incommensurables grandeurs.*

VERGNAUD G., 1981, Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 2.2 p 215-232.