

# MEMOIRE SUR UNE INCONNUE

I.R.E.M. de Grenoble

Aude SAINFORT  
Lycée Stendhal de Grenoble

Dans ces quelques pages je m'attacherai :

- premièrement à voir comment, en tant qu'objet d'enseignement, sont présentées les équations au niveau du collège et plus particulièrement l'équation  $ax + b = 0$  en 4ème et en 3ème ;
- deuxièmement, à analyser les conceptions des élèves vis-à-vis des équations à travers les réponses fournies à un questionnaire.

Les deux parties peuvent être lues indépendamment.

## I. INTRODUCTION DES EQUATIONS A UNE INCONNUE EN 4ème ET EN 3ème, EN TANT QU'OBJET D'ENSEIGNEMENT, VUE PAR LES MANUELS SCOLAIRES... DU XXème SIECLE.

### 1. A Examen préalable des différentes procédures d'approche possibles.

Je distinguerai 4 types d'introduction possibles de la notion d'équation.

#### i) Une introduction "primitive" : au moyen "d'égalités lacunaires".

Elle consiste à trouver un terme manquant dans une égalité.

#### Exemples :

- compléter :  $17 + \square = 9$

$$23 - \square = 40,2$$

$$\square \times (-11) = 3,3$$

ou encore

- comment choisir le décimal x pour que :

$$-8 + x = 5 ?$$

$$4,5 \times x = 0 ?$$

$$|x| = 2 ?$$

La résolution de tels exercices relève essentiellement de l'**arithmétique** et non pas de l'algèbre et ne nécessite pas la connaissance du vocabulaire propre aux équations (inconnue, solution... etc.).

D'ailleurs lorsque l'enfant accepte de substituer à  $17 + \square = 9$  l'écriture  $17 + x = 9$ , le statut qu'il attribue à x est très restreint. Il aura des difficultés à utiliser de lui-même cette désignation ou à envisager qu'elle puisse subir un quelconque traitement et s'il répond très naturellement  $17 + (-8) = 9$ , l'écriture  $x = -8$  sera quant à elle difficile à obtenir et ne découle pas de la réponse précédente.

Ce type d'approche, abondamment utilisé en classes de 6ème et 5ème est davantage à considérer comme une activité préparatoire à l'apprentissage des équations en 4ème, 3ème, que comme une introduction véritable à leur étude.

ii) **Une introduction par "ostention"** : au moyen d'exemples numériques.

Elle consiste à **montrer** des équations.

Exemples :

\*  $x^2 - 9x + 14 = 0$  est une équation d'inconnue x dans  $\mathbb{R}$ .

Le réel 2 est une solution de cette équation car  $2^2 - 9 \times 2 + 14 = 0$

ou encore

\*  $|t - 2| = 3$ . Par ostention, on "montre" (vérifie) que les réels -1 et 5 sont des solutions de cette équation

ou encore

\* si  $3x + 4 = 10$   $\textcircled{-4}$

alors  $3x = 6$   $\textcircled{:3}$

alors  $x = 2$

2 est la solution de l'équation en x dans  $\mathbb{R}$

Cette présentation concrète visualise la notion d'égalité et provoque d'emblée l'**usage d'outils algébriques** en créant une rupture avec l'arithmétique. Elle fait ressentir l'utilisation du calcul algébrique comme un gain réel par rapport à des méthodes de tâtonnement ou d'approximation et met en évidence le **caractère universel** des calculs mis en place.

Elle conduit à la **définition par "ostention"** :

"Résoudre dans  $\mathbb{R}$ ,  $x^2 - 9x + 14 = 0$ , où  $x$  est l'inconnue, c'est trouver l'ensemble de tous les nombres, appelés solutions, qui mis à la place de  $x$ , rendent cette égalité vraie".

**iii) Une introduction comme "outil"** : à partir d'un petit problème à mettre en équation.

Beaucoup de problèmes se résolvent plus simplement lorsqu'on les met en équation, et bien plus encore ne peuvent pas se résoudre autrement. Cette introduction contextualise la notion d'équation.

Exemples :

- "La somme de 3 naturels consécutifs est 51. Quels peuvent être ces naturels ?".

J'appelle  $x$  le plus petit de ces 3 nombres.

Puisqu'ils sont consécutifs, le second est  $x + 1$  et le troisième  $x + 2$ .

La somme des trois est  $x + (x + 1) + (x + 2) = 3x + 3$ .

Donc  $3x + 3 = 51$  qui est mon équation.

Nous voyons que 51 "dépassé"  $3x$  de 3 unités.

Donc  $3x$  est "inférieur à" 51 de 3 unités.

En raisonnant ainsi :  $3x = 51 - 3 = 48$ , on a "transposé" le nombre 3 en changeant son signe  $+$  en un signe  $-$ , technique que nous devons au mathématicien arabe du IX<sup>ème</sup> siècle Al Kwarizmi.

Interprétons cette dernière égalité : 48 est trois fois plus grand que  $x$  donc  $x$  est 3 fois plus petit que 48.

$$\text{Donc } x = \frac{48}{3} = 16.$$

La solution du problème est 16, 17, 18.

ou encore

- "Un père a 40 ans et son fils 12 ans. Dans combien d'années l'âge du père sera-t-il le triple de l'âge du fils ? Et le quadruple ?".

Ce problème peut se résoudre de façon empirique mais la résolution à l'aide d'une équation est plus rapide.

Une mise en équation est une interprétation dynamique de celle-ci, qui comme dans l'exemple ci-dessus, conduit :

- pour la 1<sup>ère</sup> question à la solution : 2 ans

- pour la 2ème question à l'équation :  $3x = -8$  qui n'a pas de solution positive. Le problème posé n'a pas de solution.

Placé en situation-problème, l'élève est amené à **fabriquer** une équation, et la technique de résolution apparaît alors comme une **procédure dynamique**. Cette introduction lui permet de faire connaissance avec les équations de la manière la plus naturelle qui soit : en résolvant un problème, ce qui est précisément la raison d'être des équations.

Dans cette approche l'inconnue a un statut beaucoup plus concret et la désignation **littérale** apparaît comme un **outil** performant. L'enfant, à qui l'on a montré l'utilité et l'efficacité du calcul algébrique, et ceci avant même qu'il ne le maîtrise, acceptera mieux les règles, l'abstraction et la rigueur.

Après avoir été placé en situation d'action, il validera aisément une définition dynamique du type :

"Une équation d'inconnue  $x$  dans  $\mathbb{R}$  est une égalité contenant la lettre  $x$ . Un nombre qui, mis à la place de  $x$ , rend cette égalité vraie est une solution de l'équation. Résoudre une équation, c'est en trouver toutes les solutions".

**iv) Une introduction formelle** : à partir de notions ensemblistes et fonctionnelles.  
Cette introduction "théorise" le concept d'équation.

Exemple :

Etant donné  $f$  et  $g$ , deux fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , trouver l'ensemble des réels  $x$  vérifiant l'égalité  $f(x) = g(x)$ , c'est résoudre l'équation d'inconnue  $x$ . Chacun des réels vérifiant  $f(x) = g(x)$  est une solution de l'équation. L'ensemble des solutions sera noté  $S$ .

Deux équations  $f_1(x) = g_1(x)$  et  $f_2(x) = g_2(x)$  sont dites équivalentes si et seulement si elles ont le même ensemble de solutions.

Cette définition **abstraite** et purement **statique**, opère en dehors de tout contexte d'action.

Elle est présentée de façon très globale et très achevée sans être accompagnée d'une réflexion sur l'introduction et l'utilisation de telles désignations et sans progression. Ainsi, il est bien difficile pour un élève de 13-14 ans de voir le moindre lien entre la définition et un outil de résolution de problème... Précisons, néanmoins, que ce type d'introduction se rencontre plutôt au niveau 3ème que 4ème.

Enfin, signalons qu'en dehors des quatre approches ci-dessus, existe toute la "gamme" des hybrides possibles de celles-ci.

Examinons quelques manuels.

Par curiosité, j'ai feuilleté quelques manuels scolaires relevant des programmes antérieurs à ceux de 1978, et à titre "zoologique" j'en citerai deux. J'analyserai ensuite comment 4 ouvrages actuels définissent les équations et plus particulièrement présentent l'équation de 1er degré à une inconnue à un collégien.

## 1. B Les anciens.

1. Leçons d'algèbre (A. Salomon) à l'usage de l'enseignement secondaire des jeunes filles (1916, librairie Vuibert). Classe de 4ème. Programmes fixés par l'arrêté du 18 juillet 1911.

définition :

92. Différentes espèces d'égalités. — Il y a deux espèces d'égalités :

1° les identités; 2° les équations.

Une identité entre des expressions qui contiennent des lettres est une égalité qui est vraie pour toutes les valeurs numériques des lettres qui y figurent.

Ainsi les égalités

$$D = dq + r,$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

sont des identités, parce qu'en y remplaçant les lettres qui y figurent par des nombres quelconques, les deux membres deviennent des nombres égaux.

Une équation est une égalité qui n'est vérifiée que pour certaines valeurs particulières des lettres qui y figurent.

Ainsi l'égalité

$$4x + 2 = 6$$

est une équation, car elle n'est vraie que quand on y remplace  $x$  par 1. On a, en effet,

$$4 \times 1 + 2 = 6.$$

Si on remplace  $x$  par toute autre valeur, 2 par exemple, on a

$$4x + 2 = 4 \times 2 + 2 = 10 \text{ et non } 6.$$

93. Les lettres auxquelles il faut donner certaines valeurs particulières pour que l'équation soit vérifiée s'appellent les inconnues; ces valeurs particulières s'appellent les solutions ou les racines de l'équation.

Ainsi, dans l'équation  $4x + 2 = 6$ ,  $x$  est l'inconnue et 1 est la solution.

On désigne ordinairement les inconnues par les dernières lettres de l'alphabet.

Chercher les racines d'une équation, c'est résoudre cette équation.

commentaires :

souligne la distinction entre identités et équations.

Présentation concrète des équations par ostension.

Introduction du type ii).

Ecarte de la définition tout formalisme algébrique.

En particulier l'ensemble des solutions  $S$  n'est pas introduit.

## Résolution de l'équation du 1er degré à une inconnue :

**Règle.** — Pour résoudre une équation du premier degré à une inconnue, on rend entiers les deux membres de l'équation, on fait passer dans le premier membre de l'équation toutes les quantités qui contiennent l'inconnue et dans le deuxième membre toutes les quantités connues, en réduisant les termes semblables; on divise alors la quantité connue par le coefficient de l'inconnue; le nombre obtenu est la racine de l'équation.

**112. Discussion de l'équation du 1<sup>er</sup> degré à une inconnue.** — Tous calculs faits, l'équation du 1<sup>er</sup> degré à une inconnue se ramène à la forme

$$ax = b,$$

$a$  et  $b$  étant des quantités connues, positives, négatives ou nulles.

Examinons les différents cas qui peuvent se présenter.

1<sup>er</sup> Cas.  $a \geq 0$  (\*),  $b \geq 0$ .

On a  $x = \frac{b}{a}$ .

L'équation a une solution déterminée et une seule.

2<sup>e</sup> Cas.  $a = 0$ ,  $b \geq 0$ .

L'équation devient

$$0x = b.$$

Or le produit d'un nombre quelconque par zéro étant égal à zéro, il n'existe aucune valeur de  $x$  dont le produit par zéro égale  $b$ . L'équation est impossible.

3<sup>e</sup> Cas.  $a = 0$ ,  $b = 0$ .

L'équation devient

$$0x = 0.$$

Or le produit d'un nombre quelconque par zéro étant égal à zéro, tous les nombres mis à la place de  $x$  vérifient l'équation proposée. C'est une identité et non une équation.

Là encore, aucun formalisme ni règle visuelle.

Omet volontairement le cas d'un coefficient nul lequel est examiné dans la discussion suivante.

Insiste sur le signe des coefficients au lieu de dire simplement "quantités quelconques"

$\geq$  signifie "différent de"

"L'équation est impossible" peut induire chez les élèves qu'on n'a pas le droit de la poser. Ce qui est ennuyeux. En fait, ce qui est impossible, c'est de la résoudre.

Longues phrases explicatives.

Réduis au minimum l'emploi de notations algébriques.

$0x = 0$  n'est pas une équation mais une **identité** car elle a une infinité de solutions.

## 2. Arithmétique - Algèbre - Géométrie (G. Cagnac, L. Thiberge) classe de 3ème (1960). Programmes de 1958.

### Définition.

**140. Définition d'une équation; rappel.** — Une équation est une égalité conditionnelle dont les deux membres, expressions algébriques par rapport à une ou plusieurs lettres appelées inconnues, n'ont la même valeur numérique que pour certaines valeurs attribuées à cette lettre ou à ces lettres.

Pour une équation à une inconnue, toute valeur de cette inconnue qui donne aux deux membres la même valeur numérique est une solution de l'équation.

EXEMPLE :  $3x - 1 = x + 7$

Pour  $x = +4$ , les deux membres prennent la valeur 11;  $x = +4$  est une solution de l'équation.

Écrire une équation, c'est en définitive poser un double problème, celui de l'existence et du calcul de la solution ou de toutes les solutions de l'équation. Résoudre une équation, c'est en obtenir toutes les solutions.

### Commentaires

Une définition formelle et abstraite relevant de iv) mais qui ne fait pas usage des notations algébriques modernes du type

$$A(x) = B(x).$$

Pas d'ensemble de solutions S.

## Equation du 1er degré à une inconnue

148. *Définition.* — Une équation du premier degré à une inconnue est une équation dont la *forme réduite* (n° 144) s'obtient en égalant à zéro un polynôme du premier degré à une variable  $x$ ,

$$ax + b = 0$$

où  $x$  est l'inconnue,  $a$  et  $b$  deux nombres connus.

Résolution de  $ax = b$ . — Supposons  $a$  différent de 0. On retrouve ici l'équation de la division (n° 142).

Il existe un nombre et un seul qui, multiplié par  $b$ , donne  $a$ ; nous l'avons noté dans ce cours  $\frac{b}{a}$ .

Donc, si  $a$  est différent de 0, l'équation du premier degré à une inconnue  $x$  considérée admet une solution et une seule  $x = \frac{b}{a}$ .

Utilise indifféremment  $ax + b = 0$  ou  $ax = b$  sans expliquer le passage de l'une à l'autre, ce qui est d'autant plus gênant que les équations ne sont pas équivalentes, alors que la présentation le laisse croire.

150. *Cas particuliers. Impossibilité ou indétermination.* — Supposons qu'en transformant l'équation donnée, le coefficient de  $x$  se réduise à 0. L'équation (6) s'écrit :

$$0 \times x = b \quad (7)$$

1°) Supposons  $b$  différent de 0; quel que soit le nombre  $x$ , le produit  $0 \times x$  est égal à 0 et ne peut être égal à  $b$ ; l'équation n'a pas de solution; elle est *impossible*.

2°) Supposons  $b = 0$ ; l'équation (7) devient :

$$0 \times x = 0$$

Quel que soit le nombre  $x$ , le produit  $0 \times x$  est égal à 0, valeur du

second membre; l'équation admet comme solution n'importe quel nombre; elle est *indéterminée*.

Résumé. — Une équation du premier degré peut être impossible et n'avoir pas de solution.

Une équation du premier degré peut être indéterminée et admettre comme solution n'importe quel nombre; dans ce cas, elle est une identité en  $x$ .

Ici encore distinction entre identité et équation.

$0x = 0$  n'est toujours pas assimilé à une équation.

### 1. C Les nouveaux.

#### 0. Que disent les programmes ?

Arrêté du 16 novembre 1978. Le terme "équation" n'est pas mentionné explicitement dans les programmes de 6ème et de 5ème, mais en pratique une introduction du type i) aux équations est souvent faite dans ces classes là.

Classe de quatrième : **I - Calcul numérique.**

Exemples numériques d'équations du premier degré à une inconnue.

Classe de troisième : **I - Algèbre.**

Exemples variés de problèmes du premier degré.

Instructions :

Au niveau du collège, il faut "rechercher une appréhension concrète" de la notion d'équation, faire "acquérir à l'élève des techniques d'utilisation", susceptibles d'être exploitées dans les "circonstances et les péripéties quotidiennes de la vie".

Remarque :

On notera le changement de terminologie - "Calcul numérique" en 4ème et "Algèbre" en 3ème - qui marque la volonté de faire évoluer le concept d'équation d'un stade concret à un stade plus abstrait.

## 1. Mathématiques. Classe de 3ème. Nouvelle Collection Durrande (Editions Bordas)

### Définition.

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  dont les ensembles de définition respectifs sont  $D_1$  et  $D_2$ , sous-ensembles de  $\mathbb{R}$ .

L'ensemble de définition de l'équation à une inconnue  $f(x) = g(x)$  est l'ensemble des  $x$  réels tels que  $f(x)$  et  $g(x)$  existent. C'est donc l'ensemble  $D = D_1 \cap D_2$ .

La lettre  $x$  représente l'inconnue.

L'expression  $f(x)$ , à gauche du signe égal, est le premier membre de l'équation.

L'expression  $g(x)$ , à droite du signe égal, est le second membre de l'équation.

Résoudre dans  $D$  l'équation  $f(x) = g(x)$  c'est déterminer l'ensemble des  $x$  réels, éléments de  $D$ , qui ont même image par  $f$  et par  $g$ .

Tout réel,  $\alpha$ , élément de  $D$ , tel que  $f(\alpha) = g(\alpha)$  est une solution de l'équation

Soit deux équations dont les ensembles de définition respectifs sont  $D$  et  $D'$ , sous-ensembles de  $\mathbb{R}$ .

Les deux équations sont dites équivalentes sur  $(D \cap D')$  lorsqu'elles admettent dans  $(D \cap D')$ , les mêmes solutions.

Dans  $(D \cap D')$ , toute solution de la première équation est donc solution de la seconde, et toute solution de la seconde est solution de la première.

### Equation du 1er degré à une inconnue.

Soit  $f$  l'application linéaire de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $f(x) = ax$ , lorsque  $a$  est un réel fixé. Soit  $b$  un réel fixé.

L'équation  $ax = b$  se nomme équation linéaire à une inconnue,  $x$ .

Si  $a$  n'est pas nul, on dit aussi équation du premier degré à une inconnue,  $x$ . Résoudre cette équation c'est trouver l'image réciproque de  $b$  par  $f$ , c'est-à-dire déterminer l'ensemble des  $x$  de  $\mathbb{R}$  tels que  $ax = b$ .

Suit l'étude générale des 3 cas possibles.

Le premier exemple proposé est :

$$\text{"Résoudre dans } \mathbb{R}, \\ 2x - 3 = \frac{x - 3}{3} - \frac{7x}{2} \text{"}$$

La résolution algébrique de problèmes est présentée seulement dans le dernier chapitre de l'ouvrage et démarre sur :

*D'abord un exemple simple !!!*

Diophante, mathématicien grec de l'école d'Alexandrie, a vécu probablement aux alentours de l'an 250. Son épitaphe, transmise par l'anthologie grecque, nous renseigne sur la durée de sa vie : *Sa jeunesse en occupa la sixième partie; puis sa joue se couvrit d'un fin duvet pendant la douzième partie. Il passa encore le septième de sa vie avant de prendre épouse et, cinq ans plus tard il eut un bel enfant qui vécut exactement deux fois moins longtemps que son père. Diophante lui survécut pendant quatre années. De tout ceci, déduis son âge.*

### Commentaires.

Une définition formelle et abstraite qui "théorise" le concept d'équation et le "décontextualise" de tout problème de la vie courante.

C'est une introduction du type iv).

Suivent deux pages de théorèmes d'équivalence sur les équations avant d'aborder l'équation du 1er degré à une inconnue.

Mêmes remarques que pour la définition ci-dessus.

Très compliqué pour un premier exemple.

Une telle présentation est beaucoup trop abstraite et hermétique pour un élève de 3ème, qui à travers une telle approche ne réalise pas l'utilité et la généralisation que représente l'outil algébrique.



## 2. Mathématiques. Classe de 3ème. Collection A. Mauguin (Istra, Editions Casteilla).

### équations à une inconnue.

#### 1. Problème.

Soit la phrase à une variable  $x$  définie dans  $\mathbb{R}$  :

$$3x - 4 = x^2 - 2x \quad (1).$$

Si on remplace la lettre  $x$  par un réel fixé on obtient :

- soit une phrase vraie [pour  $x = 1$ , on obtient :  $-1 = -1$ ];
- soit une phrase fautive [pour  $x = 2$ , on obtient :  $2 = 0$ ].

L'écriture (1) pose donc un problème : « si on choisit les réels à mettre à la place de la variable  $x$  dans un ensemble  $E$ , sous-ensemble de  $\mathbb{R}$ , quand aura-t-on une phrase vraie ? »

#### 2. Définitions.

- D'une façon plus générale, soit  $E$ , un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$  et  $f$  et  $g$ , deux applications de  $E$  dans  $\mathbb{R}$ .

« Trouver le sous-ensemble  $S$  de  $E$  dont les éléments rendent vraie la phrase à une variable  $x$  :  $f(x) = g(x)$  » se dit encore :

« résoudre dans  $E$ , l'équation  $f(x) = g(x)$ , où  $x$  est l'inconnue ».

- Les éléments de  $S$ , lorsque  $S$  n'est pas vide, sont les solutions de l'équation ;  $S$  est alors l'ensemble des solutions.
- $f(x)$  est le premier membre de l'équation ;  $g(x)$  est le second membre de l'équation.

Suit un théorème d'équivalence utile à la résolution des équations.

Puis des exemples numériques d'équations du 1er degré à une inconnue.

Mais ne figurent aucune définition formelle de l'équation du 1er degré à une inconnue, ni aucun essai de résolution algébrique dans le cas général.

La mise en équation et la résolution de problèmes à une inconnue sont proposées en exercice seulement.

### Commentaires.

Commence par un exemple. Le mot "phrase" n'a pas été défini avant.

Introduction par "ostention" du type ii).

La définition présente simultanément un caractère statique et dynamique. Cette présentation est un mélange des types ostention ii) et formelle iv).

L'expression "équation du 1er degré à une inconnue" ne figure pas dans le manuel.

## 3. Mathématiques. Classe de 4ème. Henri Bareil - Christiane Zehren (Hachette)

### Phrase d'introduction.

- Nous allons, en ce chapitre, apprendre à résoudre des problèmes à l'aide d'équations.

### Définition.

• **Problème** : Chercher, en opérant dans  $\mathbb{D}$ , tous les décimaux  $x$  tels que l'égalité  $(x - 3)(x^2 + 25) = 0$  soit alors vraie.

Résoudre ce problème c'est résoudre l'équation d'inconnue  $x$

$$(x - 3)(x^2 + 25) = 0.$$

Au lieu de : « ... l'équation d'inconnue  $x$  ... », on abrège souvent en : « ... l'équation en  $x$  ... »

Chaque valeur de  $x$  qui convient est « une solution de l'équation ».

Quel est, ici, l'ensemble des solutions ?

### Commentaires.

D'entrée les équations sont présentées comme un outil nécessaire et performant à la résolution de problèmes.

Introduction des équations "par ostention" du type ii).

• Jim et Luc choisissent un même nombre, qu'ils désignent par  $x$ . Jim retranche 5 de  $x$  puis divise par 3. Luc retranche 3 de  $x$  puis divise par 5. Peut-on choisir  $x$  pour que Jim et Luc aient le même résultat?

Jim obtient, au bout de ses calculs,  $\frac{x-5}{3}$ . Et Luc?

Résoudre le problème c'est résoudre l'équation en  $x$  :

$$\frac{x-5}{3} = \dots \quad (1). \quad (\text{Complète.})$$

Catherine remplace l'égalité (1) par une succession d'égalités qu'elle dit équivalentes :

$$\left. \begin{array}{l} 5(x-5) = 3(x-3) \\ 5x - 25 = \dots \\ 2x = 16 \\ x = 8 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Complète, et} \\ \text{explique} \\ \text{ces calculs.} \end{array}$$

Elle conclut qu'il y a une possibilité et une seule : le nombre 8. Es-tu d'accord?

### Equation du 1er degré à une inconnue :

Des équations, à une inconnue  $x$ , où la lettre  $x$  ne figure pas avec un exposant supérieur à 1 et n'est pas en dénominateur, sont des équations du premier degré. Ce sont elles que nous étudierons d'abord.

Exemples d'équations du premier degré :

$$7x - 8 = x \quad ; \quad 4 - (x - 5) = 8 + 2x .$$

Contre-exemples (dis pourquoi) :  $x^4 = 64x$  ;

$$9x^2 - 7x = 0 \quad ; \quad -5x^3 + x = 9 \quad ; \quad \frac{x}{3} - \frac{5}{x} = 0 .$$

Sous forme d'activités, l'ouvrage détaille ensuite la résolution de quelques équations types, en expliquant pour chacune avec soin "les étapes et les objectifs" de chaque transformation. Puis suit une longue explication sur la mise en équation de problèmes solubles à l'aide d'une équation à une inconnue à partir d'un exemple.

**Problème :** Une salle de cinéma compte 115 places, les unes à 15 F, les autres à 22 F. Quand la salle est pleine, la recette totale est 2040 F. Quel est le nombre de places de chaque sorte?

### 4. Faire des mathématiques. Classe de 4ème. A. Deledicq (Cedic).

Propose en activités préparatoires de résoudre quelques problèmes.

- Les pommes coûtent 2 fois plus cher que les pommes de terre.  
J'ai acheté 2 kg de pommes et 5 kg de pommes de terre.  
J'ai payé 22,50 F. Quel peut bien être le prix au kilogramme des pommes et des pommes de terre?
- Un père a 40 ans et son fils a 6 ans.  
a) Dans combien d'années l'âge du père sera-t-il le triple de l'âge du fils?  
b) Et le double?  
c) Dans combien d'années l'âge du fils sera-t-il les  $\frac{3}{4}$  de celui du père?

Définition dynamique des équations : l'élève est constamment placé en situation d'action.

Définition approximative et peu rigoureuse. L'équation n'apparaît jamais sous sa forme générale :

$$ax + b = 0.$$

Le seul manuel à citer des contre-exemples.

Etude limitée à des exemples numériques. Pas de synthèse dans le cas général.

Exemple plus accessible que dans la nouvelle collection Durrande.

Commentaires.

Introduction utile du type iii).

**Définition.**

Une *équation d'inconnue  $x$  dans  $\mathbb{R}$*  se présente comme une *égalité contenant la lettre  $x$ ,  $x$  représentant un nombre de  $\mathbb{R}$ .*

Un nombre de  $\mathbb{R}$  qui, mis à la place de  $x$ , rend cette égalité vraie est une *solution* de l'équation.

On dit aussi que  *$x$  vérifie l'équation.*

*Résoudre* cette équation, c'est en trouver l'ensemble des *solutions*, c'est-à-dire *toutes les solutions.*

## Définition informelle

**Equation du 1er degré à une inconnue :**

Absence de définition générale mais mentionne

les propriétés suivantes :

---

L'équation, d'inconnue  $x$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $b + x = a$  a une solution unique dans  $\mathbb{R}$  : le nombre  $a - b$ .

L'équation, d'inconnue  $x$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $dx = c$  a (lorsque  $d \neq 0$ ) une solution unique dans  $\mathbb{R}$  : le nombre  $c/d$ .

---

Grâce aux propriétés des nombres réels et de l'égalité (chapitres E1-C2-C3-C4), tu dois maintenant savoir résoudre les équations du type suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} a, b, c \text{ sont des réels connus} \\ x \in \mathbb{R} \\ ax + b = c. \end{array} \right.$$

Tu vois en marge, sur un exemple, comment tu peux t'y prendre pour résoudre une telle équation.

A la suite d'un cours succinct on trouve un "**savoir résoudre une équation du 1er degré à une inconnue**" qui détaille longuement sur des exemples numériques les 3 cas pouvant se présenter :

$$S = \emptyset ; S = \mathbb{R} ; S = \{*\}.$$

La mise en équation de petits problèmes n'est proposée qu'en exercice.

Forme réduite originale qui diffère des formes réduites usuelles  
 $ax + b = 0$  ou  $ax = b$ .

L'équation du **premier degré** n'a jamais été définie.

La résolution n'est pas traitée dans le cas général.

Aucun essai de théorisation dans tout le chapitre.

En conclusion, 4 manuels sont cités (Durrande, Mauguin, Bareil-Zehren et Deledicq). Replaçons-les succinctement les uns par rapport aux autres dans :

- ce qu'ils ont de très différent :

Durrande fait une présentation très globale et formelle avant d'aborder les équations du 1er degré, mais le langage est "classique" tandis que Mauguin démarre sur un exemple mais avec un langage qui se veut résolument nouveau ("phrase à une variable", "rendre une phrase vraie"). Si Bareil-Zehren et Deledicq démarrent aussi sur des exemples, ils écartent quant à eux, tout formalisme de leur présentation.

- ce qu'ils ont d'analogue :  
la mise en équation d'un problème se situe, dans les 4 manuels, comme exercices d'application en fin de chapitre sur la notion.

Voilà brossées quelques approches possibles de la notion d'équation et leur mise en évidence au travers de quelques manuels.

Cette étude théorique nécessitait de soumettre des enfants ayant reçu différents types d'introduction à un test permettant d'appréhender quelle perception et quelle représentation de la notion d'équation ils se sont forgés. La question 6 du questionnaire ci-après laisse présager de la diversité des réponses.

Un volet manque à cette analyse, que je n'ai pas eu l'opportunité de clore : un volet reste ouvert...

## II - A PARTIR D'UN QUESTIONNAIRE, ANALYSE DES "PIERRES D'ACHOPPEMENT" SUR LESQUELLES BUTENT LES ELEVES DANS LA RESOLUTION ALGEBRIQUE D'UNE EQUATION SE RAMENANT AU PREMIER DEGRE.

### 2. A Variables ayant une influence sur les réponses et analyse a priori des conceptions erronées.

Les erreurs sont nombreuses et variées. On trouve cependant des régularités. Je vais donner, a priori, une description qualitative des erreurs commises par les élèves quant à la **résolution de l'équation  $ax + b = 0$** .

Les obstacles essentiels qui s'opposent à la compréhension et à l'apprentissage correct de la notion proviennent du fait que les équations se traitent de **façon hétérogène** suivant la nature des coefficients a et b.

#### 1. Obstacles liés au statut du "zéro".

- Bref regard historique sur zéro.

Il nous est difficile aujourd'hui de comprendre la difficulté de la **découverte du zéro** et du **principe de position** tellement ils nous sont devenus familiers. Mais il a fallu des millénaires à l'humanité pour le découvrir. Peut-être parce que "c'était un véritable défi au bon sens que d'oser désigner par un signe quelque chose qui n'existe pas, une absence, un trou, un vide" (J. Pelseneer).

Parlant de l'histoire des mathématiques jusqu'à la fin du Moyen-Age, M. Böll écrit:

"Telle est la première étape des mathématiques, l'histoire du nombre naturel qui de l'avis unanime, présente un tableau de stagnation pitoyable. Un point culminant, "**le miracle du zéro**" qui mit plus d'un millénaire à se populariser ; cette découverte reste une des œuvres les plus considérables de l'humanité ; sans elle on ne saurait concevoir le progrès de la science, de l'industrie, du commerce moderne ; par elle le nombre a pu être domestiqué".

Zéro est un nombre à plusieurs facettes, qui pose des problèmes et nécessite que soient fixées des règles propres à son utilisation. Par exemple lorsque Peano axiomatise  $\mathbb{N}$ , à la fin du XIXème, il rencontre le problème du zéro puisque sur six axiomes, trois le concernent.

A. Michelot (la notion de zéro) dégage 5 aspects de la notion de zéro :

- zéro comme rang vide dans la numération de position
- zéro comme symbole d'une quantité nulle : zéro acquiert le statut de nombre
- zéro comme facteur d'un produit
- zéro comme limite : que signifie  $\frac{7}{0}$  ?

C'est le mathématicien Rindar Baskara qui le premier a apprécié très exactement la limite représentée par  $\frac{a}{0}$

- zéro comme repère et comme origine des nombres négatifs.

• Erreurs liées au statut du "zéro".

$$E_1 : 4 \times x = 0 \text{ réponse : } x = -4 \text{ ou } x = 1/4$$

$$\frac{5}{7} \times x = 0 \text{ réponse : } x = 1 \text{ ou } x = -5/7 \text{ ou } x = 7/5$$

$$\frac{x}{2} = 0 \text{ réponse : } x = -2$$

0 apparaît sous ses aspects symbole d'une **quantité nulle** et **facteur d'un produit**.

Cette erreur, présente dans toutes les classes de la 4ème à la 2ème incluses, ne signifie pas que l'élève ne connaît pas les propriétés de zéro - quel élève ne connaît pas la "comptine" : "un produit de facteurs est nul si et seulement

si l'un des facteurs au moins est nul"? - mais il ne les mobilise pas dans ce contexte.

De plus, pour les équations  $ax = 0$ ,  $a \neq 0$ , les réponses fausses proposées relèvent de procédures erronées différentes.

Ainsi pour les trois réponses,

$$4x = 0 \text{ réponse } x = -4$$

$$\frac{5}{7}x = 0 \text{ réponse } x = -5/7$$

$$\frac{x}{2} = 0 \text{ réponse } x = -2$$

il s'agit d'une "confusion multiplication-addition". Tandis que les deux réponses,

$$4x = 0 \text{ réponse } x = 1/4$$

$$\frac{5}{7}x = 0 \text{ réponse } x = 7/5$$

relèvent plutôt d'une "confusion division-inverse".

$$E_2: \quad 0 \times x = 27 \quad \text{réponse : } S = \{0\}$$

Cette erreur, peu fréquente, mais qui existe, résulte de la confusion entre 0 symbole d'une quantité nulle et  $\emptyset$  symbole d'un ensemble vide.

$$E_3: \quad 0 \times x = 0 \quad \text{réponse : impossible } S = \emptyset$$

Si l'équation **sans solution** est correctement résolue par la majorité des élèves, il n'en est pas de même de l'équation "**indéterminée**" pour laquelle le taux de réussite est toujours très faible.

Liée à la notion d'infini et à plusieurs aspects de zéro, elle conduit à un ensemble de solutions ni **fini**, ni **discret** :  $S = \mathbb{R}$ .

L'antinomie entre 0 et  $\infty$  dépasse le domaine des besoins familiers et du "bon modèle" concret, dépasse "l'idéologie de la lumière naturelle" de l'élève, qui croit souvent qu'une lettre ne peut guère représenter plus d'un nombre à la fois.

D'autres erreurs liées à 0 seront examinées au paragraphe 5.

## 2. Obstacles liés au statut des nombres négatifs.

$$E_4: \quad -2 \times x = 3 \quad \text{réponse : } x = 3 + 2 = 5$$

Elle résulte de la confusion entre signe " – opératoire" et signe " – prédictif", distinction qui gênait encore Cauchy en 1821 !

$$E_5: \quad 3x - 1 = 0 \quad \text{réponse : } x = 1/3$$

$$\quad -3x + 1 = 0 \quad \text{réponse : } x = -1/3$$

Cette erreur résulte de la conception "la solution de l'équation "opposée" est l'opposée de la solution de l'équation initiale".

$E_6$ : "Erreurs de signes" et **tradition**.

Pour résoudre  $-3y + 4 = 0$  l'élève écrit la succession d'égalités :

$$\begin{array}{l} -3y + 4 = 0 \\ -3y = -4 \\ y = \frac{-4}{-3} \\ y = \frac{4}{3} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{changement de signes} \\ \\ \text{règle des signes} \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \text{au lieu de} \\ \\ \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} 4 = 3y \\ y = \frac{4}{3} \end{array}$$

Il multiplie ainsi les risques d'erreurs de signe.

Le premier membre d'une équation étant "traditionnellement" réservé à l'inconnue, le traitement dissymétrique des 2 membres d'une équation est très fréquent, voire systématique.

Cette démarche est analogue à celle qui consiste en géométrie à privilégier les lignes horizontales et verticales au dépend des lignes obliques dans les pays occidentaux.

$$E_7: \quad -\frac{x+1}{3} = 0 \quad \text{réponse : } -x + 1 = 0 \quad x = 1$$

Relève d'une mauvaise compréhension de la notation algébrique de l'opposé d'un quotient et de la règle des signes.

D'autres erreurs liées aux nombres négatifs seront examinées au paragraphe 5.

Notons que l'introduction conceptuelle des nombres négatifs a été un processus d'une lenteur surprenante. Elle a duré plus de 1 500 ans depuis l'époque de Diophante jusqu'à nos jours ! – précisément jusqu'en 1867 où paraît l'ouvrage d'Hermann Hankel. "Théorie du système des nombres complexes" –. Pendant tout cet intervalle, les mathématiciens maniaient les nombres relatifs, mais ils n'en avaient qu'une compréhension partielle avec d'étonnantes lacunes.

Il faut noter que jusqu'au XVIIIème, l'honnête homme a peu d'occasions de faire intervenir des nombres négatifs dans la vie courante. Même la pratique de la comptabilité chez les commerçants les incitait à opposer radicalement les avoirs et les débits pour ne les combiner qu'en bas des pages de registres.

En outre le modèle commercial des gains et des dettes, qui facilite la compréhension de l'addition est un obstacle à la compréhension de la multiplication et de la règle des signes.

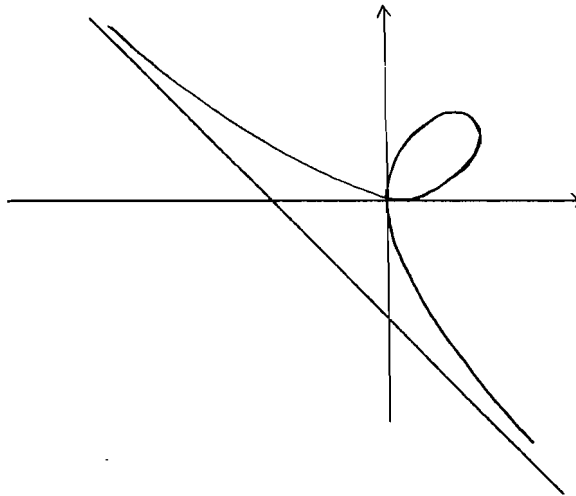
"Comment en multipliant 10 000 francs de dette par 500 francs, cet homme aura-t-il ou parviendra-t-il à avoir une fortune de 5 000 000 ?".

Face à l'intrusion non désirée des négatifs, on assiste à un **symptôme d'évitement** caractéristique.

Exemple :

- René Descartes utilise un système de coordonnées, mais jamais d'axe sur lequel l'abscisse varierait de  $-\infty$  à  $+\infty$ . les courbes qu'il trace sont ainsi réduites au 1er quadrant.

Ainsi la cubique d'équation  $x^3 + y^3 = 3axy$  appelée "folium de Descartes", avec son asymptote ne suggère guère la forme d'une feuille, sauf si on restreint son étude au 1er quadrant : ce que fit Descartes.



- Simon Stevin interprète les racines négatives d'une équation en faisant la proposition ingénieuse suivante :  
 "Les racines négatives des équations sont des racines positives de la transformée en  $-x$ . Autrement dit, si l'on trouve que  $-2$  est racine d'une équation  $x^2+px = q$ , cela signifie que  $+2$  est racine de  $x^2 - px = q$ ".  
 A cette époque et plus tard encore, on présente l'apparition d'une racine négative d'un problème, non comme la solution mais comme l'indice d'une question mal posée. Beaucoup de mathématiciens refusent d'envisager les solutions négatives d'une équation et utilisent maints subterfuges pour les éviter ou les passer sous silence.



- L'échelle thermique chez Fahrenheit (1713) s'explique par le désir d'éviter les nombres négatifs pour repérer les températures usuelles. ( $0^{\circ}\text{F} = -18^{\circ}\text{C}$ ).
- Jusqu'en 1940, beaucoup de manuels d'optique géométrique exposent la théorie des miroirs sphériques ou des lentilles mais répugnent à parler de distance focale négative.

Concluons : une bonne manipulation des nombres négatifs nécessite de s'écarter d'un sens concret attribué aux êtres numériques pour dépasser le stade des opérations concrètes et atteindre celui des opérations formelles.

### 3. Obstacles liés au statut des rationnels.

Voir  $E_1$  et  $E_7$

$$E_8: \quad \frac{x+1}{3} = 0 \quad \text{réponse : } x+1 = 0 \quad x = -1$$

$$\frac{x+1}{3} = 4 \quad \text{réponse : } x+1 = 4 \quad x = 3$$

Résulte de la règle "un quotient est nul ssi le numérateur est nul" généralisée abusivement à "un quotient est égal à 4 ssi le numérateur est égal à 4".

### 4. Obstacles liés au statut des irrationnels.

L'élève qui résout aisément  $3x = 4$ , hésite souvent devant des équations du type  $\pi x = 4$  ou  $\sqrt{2} x = 3\sqrt{2}$ . Pour lui, les irrationnels n'ont pas conquis un statut d'égalité avec les entiers ou les décimaux et, de ce fait, il les manipule maladroitement.

$$E_9: \quad 2x + 3,14x = 1 \quad \text{réponse : } 5,14x = 1 \quad x = 1/5,14$$

$$2x + \pi x = 1 \quad \text{réponse : } x = 1/5,14 \quad (\pi \text{ est remplacé d'auto-rité par } 3,14)$$

ou

$$x = \frac{1 - \pi x}{2} \quad \text{le résultat dépend de } x$$

... etc.

$$2x + \sqrt{3} x = 4 \quad \text{réponse : } x = 1/2\sqrt{3} \quad \text{confusion entre } + \text{ et } \times$$

ou

$$x = \frac{1 - \sqrt{3} x}{2} \quad \text{le résultat dépend de } x$$

ou

$$4x + 3x = 1 \text{ donc } x = 1/7$$

essais abusifs d'évaluation au carré

ou

$$4x^2 + 3x^2 = 1 \text{ donc } x = \sqrt{1/7}$$

L'enfant croit généralement que le résultat d'une addition doit être un **terme unique**. Ainsi la factorisation implicite dans  $2x + 3,14x = 5,14x$  n'est pas reconnue pour  $2x + \pi x$  ou  $2x + \sqrt{3} x$ .  $\pi$  sera facilement remplacé par 3,14,  $\sqrt{3}$  par 1,732 et une expression contenant des radicaux élevée hâtivement au carré : ses symptômes sont des **symptômes d'évitement** des irrationnels (analogues aux symptômes d'évitement des négatifs vus au paragraphe 2) : l'élève hésite à s'écarter du domaine numérique familier – les rationnels – et à investir dans un nouveau domaine – les irrationnels – mal maîtrisé. Aussi reste-il en deçà, avec des désignations approximatives des objets représentés.

### 5. Pour les équations se ramenant au 1er degré.

- Elles sont de 4 types :
- équation-produit
  - équation-quotient
  - équation écrite avec des racines carrées
  - équation écrite avec des valeurs absolues.

Mon propos n'est pas l'étude des problèmes de factorisation, de réduction au même dénominateur, de calcul avec des radicaux ou des valeurs absolues... mais celle des difficultés rencontrées dans la résolution algébrique de ces équations, une fois celles-ci ramenées à leur **forme réduite**, à savoir :

- pour l'équation-produit :  $(ax + b) \times (cx + d) = 0$
- pour l'équation-quotient :  $\frac{ax + b}{cx + d} = 0$
- pour l'équation avec des racines carrées :  $\sqrt{ax + b} = c, c \in \mathbb{R}$
- pour l'équation avec des valeurs absolues :  $|ax + b| = c, c \in \mathbb{R}$

#### i) Equation-produit.

Sa résolution est souvent bien assimilée. L'erreur la plus fréquente est la suivante :

$$E_{10} : \quad (3x - 5) \times (x + 4) = 0 \quad \text{réponse : si } 3x - 5 = 0 \text{ et } x + 4 = 0$$

Elle résulte de la confusion entre "ou" et "et", confusion que l'on retrouve par exemple avec " $\wedge$ " et " $\cup$ " ou avec "nécessaire" et "suffisante", présente dans toutes les classes de collège et qui trahit une mauvaise compréhension du vocabulaire de la logique.

ii) Equation-quotient.

$$E_{11} : \frac{2x - 1}{x + 4} = 0 \quad \text{réponse : } x = \frac{1}{2} \text{ ou } x = -4$$

Provient de deux difficultés :

- celle de concevoir 0 comme "**diviseur impossible**" et d'accepter l'antinomie  $\frac{0}{*} = 0$  mais  $\frac{*}{0}$  est impossible

- celle à traiter numérateur et dénominateur d'un rationnel de façon hétérogène, c'est-à-dire à dépasser la conception spontanée : "rationnel = juxtaposition de 2 entiers".

iii) Avec des racines carrées.

$$\sqrt{x} = -3 \quad \text{réponse : impossible car une racine carrée est toujours positive}$$

$$E_{12} : \sqrt{x} = 3 \quad \text{réponse : } x = 9$$

$$\sqrt{-x} = 3 \quad \text{réponse : impossible !}$$

On obtient le même type de réponse avec  $\sqrt{-2x - 1} = 3$  etc., qui résulte de la conception "une lettre x désigne un réel positif" donc -x est négatif, donc  $\sqrt{-x}$  n'existe pas.

C'est l'une des erreurs les plus courantes en calcul littéral au collège et tenace même au lycée.

$$E_{13} : x^2 = 25 \quad \text{réponse : } x = 5$$

$$x^2 = 13 \quad \text{réponse : } x = \sqrt{13}$$

Relève à la fois des équations-produit et des équations comportant des radicaux. Elle traduit un évident **symptôme d'évitement** des nombres négatifs : ce qui troublait Euler ou d'Alembert gêne encore aujourd'hui nos jeunes élèves.

iv) Avec des valeurs absolues.

$$E_{14} : |x + 1| = -5 \quad \text{réponse : } x = -6$$

Consiste à faire abstraction du symbole "| |".

$E_{15}$  :  $|x + 1| = 5$  réponse :  $x + 1 = 5$  donc  $x = 4$

Deux interprétations possibles :

- comme  $E_{13}$ , elle traduit par omission de  $x + 1 = -5$ , un symptôme d'évitement des négatifs,
- comme  $E_{12}$  ( $-x$  est négatif) elle est due à " $x + 1$  est positif donc  $|x + 1| = x + 1$ ".

v) Tous les manuels ne traitent pas systématiquement ces 4 types d'équations :

titre	équation produit	équation quotient	avec des $\sqrt{\quad}$	avec des $  $
mathématiques nouvelle collection Durrande 4ème	x	exercice		exercice
mathématiques nouvelle collection Durrande 3ème	x	x		exercice
mathématiques collection Mauguin 4ème				
mathématiques collection Mauguin 3ème	x			
mathématiques H. Bareil - Ch. Zehren 4ème	x			x
mathématiques H. Bareil - Ch. Zehren 3ème	x	x	x	x
faire des mathématiques A. Deledicq 3ème	x			x
faire des mathématiques A. Deledicq 4ème	x	x	x	x

N.B. Les racines carrées ne sont pas au programme de 4ème.

## 6. Obstacles liés à la mise en équation d'un problème du 1er degré.

Ils sont nombreux et variés mais leur analyse ne relève pas de cette étude et nécessiterait un article à elle-seule.

Notons simplement la difficulté majeure à traduire en **écriture symbolique** une proposition écrite en **langue naturelle** : des élèves parfois très à l'aise dans des activités du type factorisation, développement, résolution d'équations ne savent pas réaliser eux-mêmes la mise en équation d'une situation donnée.

J'ai essayé dans ce paragraphe de dégager quelques erreurs usuelles, a priori, mais il est certain que la liste ci-dessus n'a pas la prétention d'être exhaustive.

### **2. B 1. Conditions et commentaires de l'expérimentation.**

Un questionnaire comportant 6 questions a été distribué en trois temps.

(Ce questionnaire est reproduit page 26).

1) En mai 86, après enseignement des équations à 19 élèves de 4<sup>ème</sup>1 : une très bonne classe (allemand, anglais, latin).

2) En décembre 85, avant toute révision sur les équations aux quatre classes de 3<sup>ème</sup> du collège soit 93 élèves :

3<sup>1</sup> : une bonne classe,

3<sup>2</sup> et 3<sup>3</sup> : deux classes moyennes et hétérogènes.

3<sup>4</sup> : une classe faible mais composée de 20 élèves très appliqués.

3) En juin 86, après enseignement des équations aux 42 élèves de 3<sup>3</sup> et 3<sup>4</sup>. Les élèves répondaient individuellement au stylo à bille en 35-40 mn environ anonymement.

Ayant été élaboré au mois de décembre 85, avant toute analyse a priori des conceptions erronées, ce questionnaire ne permet pas de mettre en évidence certains types d'erreurs fréquentes.

Par exemple aucune équation sans solution ( $Ox = 27$ ) ou ayant une infinité de solutions ( $Ox = 0$ ) n'est proposée.

Il présente donc quelques lacunes par manque de préparation préalable minutieuse...

### **2. B 2. Dépouillement des résultats.**

Le tableau donnant les résultats est reproduit page 27.

## QUESTIONNAIRE

### QUESTION 1 :

a) Le réel 1 est-il une solution de l'équation  $x^2 + x - 6 = 0$  ?

oui                       non

b) Et le réel 2 ?             oui                       non

### QUESTION 2 :

a) Jojo dit : "La solution de l'équation  $x^2 = 144$  dans  $\mathbb{R}$  est le réel 12".  
Qu'en penses-tu ?

b) Quelles sont les solutions de l'équation dans  $\mathbb{R}$ ,  $(3x - 2)(x - 4) = 0$  ?

c) L'équation  $|x - 3| = -10$  a-t-elle des solutions ?

oui : lesquelles ?

non : pourquoi ?

### QUESTION 3 :

a) Peux-tu écrire une équation dans  $\mathbb{R}$  qui ait 10 pour solution ?

oui. Laquelle ?                       non

b) Peux-tu écrire une équation n'ayant pas de solution ?

oui. Laquelle ?                       non

c) Peux-tu écrire une équation ayant 2 solutions ?

oui. Laquelle ?                       non

### QUESTION 4 :

Entoure les cases qui te paraissent correctes :

La solution de l'équation  $2x - 1 = 0$  est 

-1	1	1/2	-1/2	2	-2
----	---	-----	------	---	----

La solution de l'équation  $-2x + 1 = 0$  est 

-1	1	1/2	-1/2	2	-2
----	---	-----	------	---	----

La solution de l'équation  $5x = 8$  est 

3	-3	5/8	8/5	-5/8	-8/5
---	----	-----	-----	------	------

La solution de l'équation  $\frac{4}{3}x = 0$  est 

0	1	3/4	-3/4	4/3	-4/3
---	---	-----	------	-----	------

La solution de l'équation  $\frac{4}{3}x = 1$  est 

0	1	3/4	-4/3	-3/4	1/4
---	---	-----	------	------	-----

### QUESTION 5 :

Le réservoir de mon automobile est vide. A la station service je mets 27 litres d'essence. La jauge m'indique alors qu'il est plein au  $\frac{3}{4}$ . Quelle est la contenance de mon réservoir ?

### QUESTION 6 :

Peux-tu inventer un problème qui se résolve à l'aide d'une équation ? A quoi servent les équations ?

## TABLEAU DES RESULTATS

	après enseignement	avant enseignement		après enseignement
	$4^1$ 19 élèves	$3^1 - 3^2$ 49 élèves	$3^3 - 3^4$ 44 élèves	$3^3 - 3^4$ 42 élèves
question 1 : <input type="checkbox"/> non <input type="checkbox"/> oui	<input type="text" value="17"/>	<input type="text" value="45"/>	<input type="text" value="42"/>	<input type="text" value="39"/>
question 2 : a) vrai : 1 solution 12 faux : 2 solutions 12 et -12 sans opinion b) $2/3$ et 4 4 $2/3$ sans opinion c) <input type="checkbox"/> non <input type="checkbox"/> oui sans opinion	<input type="text" value="16"/> <input type="text" value="2"/> <input type="text" value="1"/> <input type="text" value="11"/> <input type="text" value="4"/> <input type="text" value="2/3"/> <input type="text" value="8"/> <input type="text" value="11"/> <input type="text" value="6"/> <input type="text" value="2"/>	<input type="text" value="43"/> <input type="text" value="3"/> <input type="text" value="3"/> <input type="text" value="5"/> <input type="text" value="23"/> <input type="text" value="21"/> <input type="text" value="31"/> <input type="text" value="10"/> <input type="text" value="8"/>	<input type="text" value="41"/> <input type="text" value="/"/> <input type="text" value="3"/> <input type="text" value="6"/> <input type="text" value="5"/> <input type="text" value="/"/> <input type="text" value="33"/> <input type="text" value="19"/> <input type="text" value="16"/> <input type="text" value="9"/>	<input type="text" value="30"/> <input type="text" value="9"/> <input type="text" value="3"/> <input type="text" value="37"/> <input type="text" value="/"/> <input type="text" value="/"/> <input type="text" value="5"/> <input type="text" value="32"/> <input type="text" value="5"/> <input type="text" value="5"/>
question 3 : a) <input type="checkbox"/> oui + exemple juste b) <input type="checkbox"/> oui + exemple juste <input type="checkbox"/> non c) <input type="checkbox"/> oui + exemple juste	<input type="text" value="14"/> <input type="text" value="10"/> <input type="text" value="4"/> <input type="text" value="15"/>	<input type="text" value="21"/> <input type="text" value="11"/> <input type="text" value="16"/> <input type="text" value="11"/>	<input type="text" value="9"/> <input type="text" value="4"/> <input type="text" value="18"/> <input type="text" value="3"/>	<input type="text" value="12"/> <input type="text" value="13"/> <input type="text" value="10"/> <input type="text" value="32"/>
question 4 : $2x - 1 = 0$ <input type="text" value="1/2"/> $-2x + 1 = 0$ <input type="text" value="1/2"/> <input type="text" value="-1/2"/> $5x = 8$ <input type="text" value="8/5"/> $\frac{4}{3}x = 0$ <input type="text" value="0"/> $\frac{4}{3}x = 1$ <input type="text" value="3/4"/>	<input type="text" value="17"/> <input type="text" value="16"/> <input type="text" value="3"/> <input type="text" value="14"/> <input type="text" value="12"/> <input type="text" value="18"/>	<input type="text" value="36"/> <input type="text" value="29"/> <input type="text" value="9"/> <input type="text" value="33"/> <input type="text" value="35"/> <input type="text" value="40"/>	<input type="text" value="28"/> <input type="text" value="16"/> <input type="text" value="13"/> <input type="text" value="23"/> <input type="text" value="17"/> <input type="text" value="23"/>	<input type="text" value="41"/> <input type="text" value="32"/> <input type="text" value="10"/> <input type="text" value="41"/> <input type="text" value="23"/> <input type="text" value="39"/>
question 5 : résolution arithmétique exacte résolution algébrique exacte autre (faux ou non résolu)	<input type="text" value="11"/> <input type="text" value="1"/> <input type="text" value="7"/>	<input type="text" value="25"/> <input type="text" value="5"/> <input type="text" value="19"/>	<input type="text" value="22"/> <input type="text" value="/"/> <input type="text" value="22"/>	<input type="text" value="17"/> <input type="text" value="12"/> <input type="text" value="13"/>
question 6 : problème correctement posé pouvant se résoudre à l'aide d'une équation	<input type="text" value="4"/>	<input type="text" value="8"/>	<input type="text" value="3"/>	<input type="text" value="18"/>

## 2. B 3. Interprétation des résultats.

### Question 1.

Taux très élevé de réussite ( $\approx 93\%$ ) pour cette question d'introduction qui traduit une bonne compréhension de l'expression "solution d'une équation".

### Question 2.

a) Faible taux de réussite :  $\cong 10\%$  en 4ème et  $20\%$  en 3ème après enseignement.

Erreur caractéristique  $E_{13}$ .

Le taux d'échec est accentué par la formulation de l'affirmation. La distinction entre l'article défini "la" et l'article indéfini "une" est souvent inaperçue et considérée comme une subtilité de langage anodine si bien que l'élève s'attend à une remise en question de la valeur de la solution et non pas de son unicité.

Une formulation du type :

"Quelles sont les solutions de l'équation  $x^2 = 144$  dans  $\mathbb{R}$  ?" aurait augmenté le nombre de réponses justes.

b) Après enseignement l'équation-produit est correctement résolue par  $58\%$  des 4ème et  $88\%$  des 3ème.

Par contre en entrant en 3ème, avant toute révision sur les équations, beaucoup ont perdu leurs fragiles acquis de 4ème !

La fréquence de la réponse "4" alors que "2/3" seul n'apparaît jamais, traduit un penchant naturel pour les entiers au dépend des rationnels.

Notons que l'omission du "ou" dans la rédaction de la solution est courante. (référence à  $E_{10}$ ).

c) Ceux qui répondent  oui proposent des solutions variées

- (-7) car  $|-7 - 3| = -10$  relève de  $E_{14}$

- (-7 et 13)  $|x - 3| = -10$  équivaut à  $x - 3 = -10$  ou  $x - 3 = 10$

donc  $x = -7$  ou  $x = 13$

Provient de "2 quantités ont la même valeur absolue si elles sont égales ou opposées".



- $-7$  et  $7$  résulte des conceptions " $|-7 - 3| = -10$  et "deux nombres opposés ont la même valeur absolue".
- $-13$  et  $13$  même erreur que la précédente.

Je n'ai tenu compte que des  non  correctement justifiés.

Taux d'échec non négligeable après enseignement :  $\cong 42\%$  en 4ème et  $24\%$  en 3ème. Plus généralement, les erreurs liées à la manipulation des " $|$ " sont fréquentes et persistent même dans le second cycle.

### Question 3.

Dans les trois cas, je ne retiens que les  oui  assortis d'un exemple valable

a) Bien réussie en 4ème :  $\cong 74\%$ . Fort taux d'échec en 3ème.

Essentiellement deux types d'erreurs :

- Par exemple : "oui :  $2x + 20 = 0$ " ou "oui :  $x + 10 = 0$ ". Les réponses résultent de la conception spontanée "une équation à coefficients positifs a une solution positive, une équation à coefficients négatifs a une solution négative", donc correspondent à  $E_5$ .

- **Une erreur inattendue !** Bien que les élèves savent reconnaître si un nombre est solution ou non d'une équation (question 1), 45 d'entre eux donnent  $ax + b = 10$  comme exemple d'équation ayant 10 pour solution.

On trouve : " $x + 5 = 10$

$$2x + 3 = 10$$

$$2x = 10$$

$$|x - 3| = 10$$

$$x^2 + 6 = 10$$

$$x^2 + x - 2 = 10 \dots \text{etc "}$$

b) Un nombre important répond  non  et l'un d'eux écrit même :

"Non, car une équation a toujours une solution".

Parmi ceux qui répondent  oui  , certains fondent leur affirmation sur un exemple faux. En voici quelques uns.

- $\sqrt{-3} = 0$
  - $x\sqrt{-10} = 2$
  - $\sqrt{-5} + 2 = 0$
- } confusion entre  
équation sans  
solution et écriture  
incorrecte.
- $\sqrt{-x} = 0$
- } erreur E<sub>12</sub>
- $0x = 0$  (erreur E<sub>3</sub>)
  - $8 = 5x$
  - $x^2 = 0$
  - $|x| = 0$
- } erreurs liées au statut de zéro
- $(16x - 3) \times (4x - 12) = 25$
- } équation jugée "impossible" par  
l'élève qui ne sait pas la résoudre

c) Peu d'erreurs après enseignement.

La majorité propose une équation-produit, certains une équation du type  $x^2 = 9$ , deux seulement citent une équation comportant des valeurs absolues.

#### Question 4.

- $2x - 1 = 0$  fort taux de réussite
- $-2x + 1 = 0$  l'erreur majoritaire et E<sub>5</sub>  
(si  $E(x) = 0$  alors  $-E(-x) = 0$ )
- $5x = 8$  peu d'erreurs après enseignement.  
Avant enseignement on trouve quelques  $\boxed{3}$  (confusion  $5 + x = 8$  et  $5x = 8$ ) et  $\boxed{5/8}$
- $\frac{4}{3}x = 0$  fréquemment sont proposées les réponses 1, 3/4, -4/3 etc.,  
qui relèvent typiquement de E<sub>1</sub>  
même après enseignement le taux de réponses  
justes reste très moyen :  $\cong 64\%$  en 4ème et  $55\%$  en 3ème.
- $\frac{4}{3}x = 1$  il y a ici une confirmation du rôle perturbant du zéro  
contrairement à la précédente, excellente réussite après  
enseignement

#### Question 5.

Le problème posé ne nécessitait pas impérativement l'emploi d'une méthode algébrique.

- D'où prépondérance de solutions **arithmétiques** qui sont toutes des dérivées de la règle de trois. On trouve :

soit "  $27 : 3 = 9$  et  $9 \times 4 = 36$  "

soit "  $27 : 3 = 9$  et  $27 + 9 = 36$  "

soit "  $27 \times \frac{4}{3} = \frac{108}{3} = 36$  "

Les erreurs rencontrées sont :

" $27 \times \frac{3}{4} = 20,25$  l" mauvaise compréhension de la règle de trois.

" $\frac{3}{4} = 27$  L ;  $\frac{1}{4} = 9$  L ;  $\frac{4}{4} = 36$  L" : utilisation abusive du signe "=".

Le passage de l'expression usuelle "les  $\frac{3}{4}$  de la quantité 9" à l'écriture symbolique " $\frac{3}{4} \times 9$ " est l'obstacle majeur s'opposant à la compréhension des proportions et des pourcentages à tous les niveaux, de la 6<sup>ème</sup> à la terminale.

- Toutefois, après enseignement, 12 élèves de 3<sup>ème</sup> sur 42 ( $\cong 29\%$ ) résolvent le problème **algébriquement** à l'aide d'une équation.

On trouve :

$$\left. \begin{array}{l} x = 27 + \frac{27}{3} \\ x = 27 \times \frac{4}{3} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{deux solutions à mi-chemin entre} \\ \text{l'algèbre et l'arithmétique} \end{array}$$

$$\frac{3}{4}x = 27$$

27	x
$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$

donc  $27 \times \frac{4}{4} = \frac{3}{4} \times x$  : utilisation des proportions.

Quelques équations fausses.

$$27x = \frac{3}{4}$$

$$27 + x = \frac{4}{4} : \text{erreur du même type que } \frac{3}{4} = 27 \text{ L}.$$

- Il est intéressant de noter que la procédure arithmétique est prioritaire avant l'enseignement en 3<sup>ème</sup> et ne l'est plus autant après, ce qui n'est pas vrai en 4<sup>ème</sup> (voir tableau).

- Quelques résultats **aberrants**.

$\frac{1}{36}$  l ;  $\frac{7}{9}$  l ;  $\frac{30}{4}$  l ; 108 l ; 4,9075 l qui ne font pas sourciller leurs auteurs.

L'élève perd souvent tout sens critique quant à la vraisemblance des résultats trouvés en mathématiques, car à ses yeux, cette matière est par essence "déconnectée" des préoccupations de la vie quotidienne...

**Question 6.**

**Peux-tu inventer un problème qui se résolve à l'aide d'une équation ?**

- Fort peu de réponses plausibles (voir tableau).

La majorité des exemples proposés admet une solution arithmétique simple et la solution algébrique, utilisant une équation, apparaît souvent comme un artifice moins naturel et plus compliqué.

Un seul élève cite un exemple géométrique : "Soit A(3, 2), B(4, 2) C(2, 4), D(x, y). Trouver x et y pour que ABCD soit un parallélogramme".

- Après enseignement, quelques élèves de 3ème ont recours à un problème se résolvant à l'aide d'un système de 2 équations à 2 inconnues, dont l'étude est récente et fraîche.

Néanmoins 24 élèves sur 42 soit  $\cong 57\%$  n'arrivent toujours pas à formuler un problème simple du premier degré à 1 ou 2 inconnues. Ce résultat était attendu, les élèves souvent ne pratiquant pas la mise en équation en classe.

**2. B quatre. Conclusion... pour méditer.**

Je vais tenter de mettre en lumière les résultats les plus importants du dépouillement de ce test et de les regrouper pour voir, parmi les obstacles cités en 2A, quels sont ceux qui semblent surmontés après enseignement et ceux qui subsistent.

- Les élèves savent reconnaître si un nombre est solution d'une équation (question 1) mais ils citent  $ax + b = c$  comme exemple d'équation ayant c pour solution (question 3).

- Comment expliquer que  $\frac{4}{3}x = 1$  soit bien résolu après enseignement alors que  $\frac{4}{2}x = 0$  ne l'est pas : il y a ici confirmation du **rôle perturbant du zéro** mais cette perturbation ne joue que lorsqu'elle est combinée à une autre difficulté puisque  $2x - 1 = 0$  est très bien réussie (question 4). Ainsi subsistent après enseignement les obstacles liés à zéro.

- Si la majorité des 3ème, après enseignement, traite correctement une équation-produit (question 2) et peut donner un exemple d'équation ayant 2 solutions (question 3) en revanche elle résout toujours mal  $x^2 = 144$  (question 2) : il y a ici aussi confirmation d'une **compréhension lacunaire des négatifs**.

D'ailleurs, le signe "-" gêne encore un quart des élèves qui donne  $-1/2$  comme solution à  $-2x + 1 = 0$  (question 4).

- Enfin, il est intéressant de noter que si les trois quarts des élèves jugent impossible l'équation  $|x - 3| = -10$  (question 2), seul un quart peut écrire une équation sans solution (question 3).

Dans le même ordre d'idée, la plupart des élèves sait résoudre un problème simple du 1er degré à une inconnue (par voie arithmétique ou algébrique) (question 5) mais un sur deux seulement est capable d'en formuler un correct (question 6).

Ces résultats attendus s'expliquent : les élèves en classe ont l'habitude de résoudre des **problèmes posés** et non pas de **poser des problèmes** !

## CONCLUSION... POUR SOURIRE.

### A quoi servent les équations ?

Pour l'élève qui a compris que les équations sont avant tout un outil mathématique	<ul style="list-style-type: none"> <li>- "à résoudre un problème dans lequel il manque des données"</li> <li>- "à trouver une inconnue ou deux dans un problème"</li> <li>- "à résoudre un problème en aidant parfois pour la logique"</li> <li>- "à résoudre un problème plus rapidement ou plus simplement"</li> </ul>
Pour l'élève qui a appris sa leçon dans la nouvelle collection Durrande	<ul style="list-style-type: none"> <li>- "à trouver la valeur de x"</li> <li>- "à équilibrer 2 écritures"</li> <li>- "à trouver une solution dans <math>\mathbb{R}</math> pour que l'équation soit réalisable"</li> <li>- "à faire des mathématiques"</li> </ul>
Pour l'élève qui n'a rien appris du tout	<ul style="list-style-type: none"> <li>- "à rien"</li> <li>- "à ennuyer les élèves, particulièrement les nuls en maths"</li> <li>- "à passer le temps en musique et en EMT"</li> <li>- "à s'arracher les cheveux de la tête en essayant vainement de trouver la solution"</li> </ul>
Pour l'élève honnête qui a appris mais pas compris	<ul style="list-style-type: none"> <li>- "je ne sais pas"</li> </ul>

**BIBLIOGRAPHIE.**

BOLL. M. Histoire des mathématiques *Que sais-je ?* Presses Universitaires de France

COLETTE J.P. (1973) *Histoire des mathématiques* (Vuibert)

GLAESER G. (1981) Epistémologie des nombres relatifs, *Recherche en Didactique des Mathématiques*. Vol. 2.3. pp. 303-346.

MICHELOT A.(1966) La notion de zéro. *Vrin*.

**MANUELS SCOLAIRES**

- Leçon d'algèbre à l'usage de l'enseignement secondaire des jeunes filles. A. Salomon, classe de quatrième (1916). Librairie Vuibert.

- Arithmétique, Algèbre et Géométrie. Classe de 3ème. G. Cagnac, L. Thiberge, (1960). Editions Masson Paris.

- Mathématiques. Classes de 4ème et de 3ème. Nouvelle collection Durrande, (1984). Editions Bordas.

- Mathématiques. Classes de 4ème et de 3ème. Collection A. Mauguin (1960). Editions Istra-Casteilla.

- Mathématiques. Classe de 4ème et de 3ème. Henri Bareil, Christiane Zehren, (1983). Editions Hachette.

- Faire des mathématiques Classes de 4ème et 3ème. A. Deledicq (1983). Editions Nathan-Cedic.