# QUELQUES REFLEXIONS A PROPOS DE LA MULTIPLICATION

*par Jacqueline VIENNOT et Michèle ARTIGUE*
*IREM de Paris Sud*

## I – PRELIMINAIRES.

L'enseignement de la multiplication ne se réduit pas à l'introduction du symbole " X " dans un cadre sémantique précis et à l'apprentissage d'une technique opératoire. Tout maître de l'enseignement primaire en est convaincu. La démarche suivie dans la plupart des manuels et brochures consacrés à la multiplication se présente de façon linéaire :

1 – Introduction du signe "X"

2 – Apprentissage d'une technique opératoire et parallèlement du répertoire standard, à savoir la table de multiplication.

3 – Application de situations multiplicatives, proportionnalité .....

De même que l'on sépare au niveau CP – CE 1 l'addition et la soustraction, on ne trouve pas trace dans ces progressions de division. Or, une telle séparation, artificielle puisque toute situation multiplicative est également une situation de division ne nous paraît absolument pas justifiée. Elle ne se comprend que si l'on se place effectivement dans le cadre rigide suivant : "Introduction d'un symbole - apprentissage d'une technique opératoire - applications".

**Toute construction est dialectique et une technique opératoire est, à un instant donné, le fruit d'un équilibre entre un répertoire et un certain savoir-faire. Cette technique évoluera avec le répertoire et les compétences calculatoires de l'enfant dans un souci d'économie pour aboutir à une forme stable.** Si comme cela paraît préconisé, on se lance trop tôt dans l'apprentissage opératoire, une telle construction dialectique se fera mal. La tentation sera grande pour l'enfant de se réfugier dans un apprentissage par conditionnement,sécurisant pour lui, car il aura ainsi l'impression de répondre au désir de performance de son maître. Dans ces conditions, les propriétés mêmes qui auront servi à la justification de la technique apparaîtront comme tout à fait accessoires. La technique sera le refuge et le moyen d'appréhender la multiplication. C'est ainsi que l'on voit des enfants au CM poser des opérations comme 240 X 20

Nous travaillons depuis plusieurs années sur l'évolution de la conception du nombre chez l'enfant, sur l'apprentissage des techniques opératoires dans l'enseignement élémentaire. Nos observations nous ont amenés à formuler un certain nombre d'hypothèses. Nous essayons d'organiser notre travail avec les maîtres en fonction de ces hypothèses, pour évaluer dans quelles mesures elles sont fondées et, si elles le sont, élaborer avec eux des progressions qui les prennent en compte.

**A propos de la multiplication, nos observations nous ont conduits à formuler les hypothèses suivantes :**

– une progression ne peut pas être linéaire,

– avant de se placer dans la problématique de l'apprentissage d'une technique opératoire particulière, il faut que les enfants manipulent le langage qu'ils ont construit et, expérimentalement, se forgent un modèle implicite de son fonctionnement,

– au lieu de séparer artificiellement multiplication et division, ilvaut mieux au contraire mettre l'accent sur la réciprocité des opérations et introduire tôt un langage qui donne à l'élève les moyens de le faire, ce qui doit faciliter l'utilisation des transformations inverses au niveau des schémas relationnels.

C'est pourquoi nous nous proposons d'introduire cette année dès le CE 1, un symbole " : " pour la division * avec le sens suivant :

$$a : b = c \quad \text{si et seulement si} \quad a = b \times c$$

et si le besoin en est ressenti par les enfants une notation pour la division euclidienne.

Mais l'introduction de ces signes ne signifie pas l'apprentissage de techniques de calcul et en fait, nous n'abordons l'apprentissage des techniques opératoires proprement dites qu'en milieu CE 2 pour la multiplication et, au début du CM 2 pour la division. Il nous semble que les élèves progressent plus rapidement qu'auparavant dans ces apprentissages. Nous pensons d'autre part, bien qu'il soit difficile de se prononcer avec certitude, qu'ils conservent dans l'étude que nous leur proposons, une souplesse dans la façon de concevoir les écritures et les calculs liés à celle dont ils ont eu à faire preuve tant qu'ils ne disposaient pas d'une technique opératoire.

---

*(*) – Comme l'ont montré au lecteur les articles sur multiples et division parus dans Grand N n 12 et 13, notre point de vue à ce sujet est un peu différent : nous préférons aborder la division dans le cas général, où le reste ne peut pas être nul, ce qui ne nous empêche pas de résoudre , dès le CE 1 les problèmes dont il est question dans ce paragraphe. Au lieu d'utiliser la notation $a : b = c$, nous écrivons tout simplement les choses sous la forme $a = cx$.*

**Nous proposons d'autre part, au cours des CE 1 et CE 2, aux enfants des activités variées visant à :**

– Leur faire manipuler le langage qu'ils ont élaboré.

– ne pas figer l'utilisation de ce langage dans le cadre sémantique où il a été introduit (grilles rectangulaires) mais les amener à prendre en compte également la multiplication comme mathématisasion d'additions répétées.

– faire construire par les enfants un répertoire (il ne s'agit pas là du répertoire standard). Il est constitué par les égalités que les enfants jugent "intéressantes". Il est affiché dans la classe et régulièrement mis à jour au cours de discussions collectives. A cette occasion, les enfants enrichissent le répertoire en rajoutant des égalités ; mais la place étant limitée, ils sont parfois obligés pour le faire d'effacer des égalités qui, à l'usage, se sont révélées d'un moindre intérêt.

– favoriser la prise de conscience des propriétés de la multiplication.

Nous voudrions que la nature même des situations proposées et des questions qu'elles peuvent susciter, conduise les enfants à organiser leurs calculs et à rechercher des procédés "économiques" pour les mener à bien (une telle économie ne pouvant s'évaluer qu'en fonction de leurs compétences calculatoires à un instant donné) donc à utiliser dans un certain domaine de nombres, même s'ils ne les explicitent pas, les propriétés de la structure de l'ensemble des naturels N muni de l'addition, de la multiplication, de la relation d'ordre et de l'égalité.

Une approche fonctionnelle de situations pouvant se mathématiser par des applications linéaires, * affines par morceaux , nous paraît propice à développer ce type de comportement : dans ce type d'activités, les enfants vont être conduits:

– d'une part à effectuer de nombreux calculs (ce qui ne les lasse obsolument pas à cet âge si la tâche proposée ne dépasse pas leurs compétences), donc à s'organiser, à s'économiser, et s'il s'agit d'un travail en équipes, se partager le travail et éventuellement discuter des "économies" proposées par certains,

– d'autre part à ne pas se cantonner dans un point de vue ponctuel, mais développer une approche globale et unifiée de ce type de situations.

Nous donnerons plus loin quelques exemples de telles activités. Elles ont été motivées par les intérêts des enfants de nos classes à un moment donné. Elles ne sont donc pas directement reproductibles n'importe quand, n'importe où. Mais ceci importe peu (dans toute la classe, les occasions sont fréquentes, il suffit de savoir les saisir !). Ce qui compte, c'est l'angle sous lequel de telles situations sont envisagées.

A ce propos les questions suivantes nous semblent très importantes.

---

*(*) – Il s'agit essentiellement d'activités liées à la proportionnalité.*

**La nature et l'intérêt même d'une situation varient en fonction des conditions didactiques de son introduction. Ces conditions didactiques sont liées aux caractéristiques informationnelles de la situation et au degré d'ouverture sous lequel elle est présentée :**

– Quelle quantité de données numériques fait-on intervenir ?.

– Quelle est la taille des nombres envisagés ?

– S'agit-il d'un problème précis posé par le maître auquel il faut répondre, ou présente-t-on une situation aux enfants, les laissant eux-mêmes l'explorer, se poser des questions, tenter d'y répondre ?

– S'il s'agit d'une situation ouverte, comment envisage-t-on de poursuivre l'activité ?

- résolution successive d'un nombre de problèmes précis ?

- classement des problèmes proposés et recherche d'informations permettant une résolution groupée par types de problèmes ?

● **Elles dépendent aussi de l'organisation de la classe :**

– S'agit-il d'un travail individuel, collectif, en équipes ?

– Comment se déroulent les phases de synthèse ?

– Quelle est la part de temps qui leur est consacrée ?

– Est-ce que tous les enfants, toutes les équipes ont la même tâche à remplir ?

● **Elles dépendent encore de la façon dont la situation proposée se rattache aux activités antérieures des enfants et de la façon dont ils la perçoivent :**

– S'agit-il pour eux, d'une activité entièrement nouvelle ou non ? Leur paraît-elle insérée dans un certain contrat éducatif ou non ? (Ont-ils l'impression que cette activité va déboucher sur l'appropriation d'un savoir utile et important, ou au contraire qu'elle est entièrement gratuite).

– Peut-on procéder à une analyse plus rigoureuse et formuler des hypothèses sur les rapports qui existent entre :

- d'une part les conditions didactiques dans lesquelles les activités sont proposées.

- d'autre part, l'utilisation qui peut en être faite dans les classes.

- Jusqu'où le maître doit-il exploiter de telles activités et comment ?

Il est évident que ce que les enfants retireront d'une activité sera fonction de leur compétence (au sens le plus large), en particulier de la connaissance des nombres qu'ils ont, et du domaine dans lequel leur langage est opératoire.

**Le maître s'efforcera simplement d'orienter les activités dans le sens d'une prise de conscience explicite des comportements mis en jeu ; mais, à quel moment une telle explicitation peut-elle avoir lieu et sous quelle forme ?**

Il nous semble quant à nous, qu'elle est tout "naturellement" à sa place, si à un instant donné, elle est nécessaire à la poursuite d'une activité, mais il est souvent très difficile, voire impossible de créer des conditions didactiques adaptées. Elle intervient assez fréquemment lors d'une phase de synthèse après un travail en équipes, chacun racontant sa démarche et cherchant à en expliquer l'intérêt. (Il va sans dire que ces comportements, même explicités, ne seront pas nécessairement repris à leur compte par les autres au cours d'activités ultérieures). Dans le cadre plus précis de la multiplication, elle peut aussi apparaître, lors de la discussion qui régulièrement préside à la mise à jour du répertoire.

Une telle explicitation est une prise de conscience d'un comportement. Elle ne se traduira pas du tout nécessairement par une écriture formelle générale (littérale). L'enfant ne sera pas non plus nécessairement capable de valider son comportement. Elle traduit plutôt la conscience d'un certain savoir faire. Exemple, cette petite fille qui avait su calculer $30 \times 40$ alors que beaucoup de ses camarades butaient dessus, et qui explique :

"Je me suis dit que 30 fois 40, c'était comme 3 fois 400 .

J'ai fait 400 plus 400 plus 400. J'ai trouvé 1 200"

ou un autre qui dit :

"Moi, j'ai fait 10 fois 40 en posant l'addition. J'ai trouvé 400 et puis ensuite 400 plus 400 plus 400, parce que 30 c'est 10 plus 10 plus 10" .

Si une écriture formelle des propriétés utilisées est exigée trop tôt sans nécessité réelle, elle pourra au mieux n'avoir aucune influence sur le comportement des enfants. Dans certains cas elle peut créer des blocages par utilisation précoce d'un formalisme mal digéré (exemple : instaurer prématurément comme règle l'adjonction de $n$ zéros quand on multiplie par $10^n$) .

## II – INTRODUCTION DU LANGAGE .

La multiplication permet de mathématiser deux types de situations :

– si l'on veut étudier la correspondance entre le nombre de tours de manège à 3,50 francs le tour et le prix que l'on doit payer pour effectuer ces tours, on a affaire à une loi externe,* de $\mathbb{N} \times \mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$ , qui à chaque couple (nombre de tours, prix d'un tour) fait correspondre le prix total, et la multiplication apparaît en fait comme l'écriture réduite d'additions répétées.

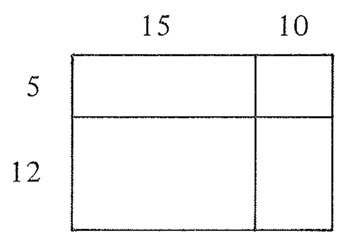
– si l'on se propose d'évaluer le cardinal de l'ensemble $A \times B$ en fonction des cardinaux de A et de B , l'aire d'un rectangle en fonction des mesures de ses côtés, on est dans une situation de "mesure-produit" et on a affaire à une loi interne ,* de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ ou de $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$ qui à chaque couple d'entiers (ou de décimaux) associe un entier (un décimal) .

La signification sémantique attachée au symbole " $\times$ " lors de son introduction sera de l'un ou l'autre type suivant la situation qui aura été proposée aux enfants. **Nous allons essayer d'expliquer pourquoi la situation de "mesure-produit" nous paraît préférable.**

- il s'agit d'une loi interne, les deux nombres considérés jouiront donc exactement du même statut : $n \times p$ sera le nombre de carreaux d'une grille rectangulaire de n lignes et p colonnes.

- la commutativité est une conséquence immédiate de la définition. Comme disent les enfants "qu'un rectangle soit debout ou couché il a toujours le même nombre de cases" .

- la double distributivité correspond au partage du rectangle en 4 morceaux par un trait vertical et un trait horizontal :




$$17 \times 25 = (5 + 12) \times (15 + 10)$$
$$= (5 \times 15) + (5 \times 10) + (12 \times 15) + (12 \times 10)$$

et c'est ainsi la base de l'apprentissage de la technique opératoire de la multiplication qui est ainsi visualisée.

---

*(*) – $\mathbb{N}$ est l'ensemble des naturels – $\mathbb{D}$ est l'ensemble des décimaux.*

- Seule, la multiplication par 0 n'intervient effectivement que lorsque les enfants ont rattaché le produit de deux nombres à une addition réitérée. Sur les rectangles il ne pourrait s'agir à leurs yeux que d'une convention.

**Si l'on se place dans le cadre de la loi externe :**

– les deux nombres ne jouent absolument pas le même rôle. Seules des expériences répétées peuvent convaincre de la commutativité de la multiplication et l'on peut se demander quel sera le champ de validité d'une telle conviction.

- si la distributivité à gauche est aisément perçue :

$23 \times 13 = (20 \times 13) + (3 \times 13)$ .

Il n'en est pas de même pour la distributivité à droite.

- Par contre le fait que 0 soit élément absorbant et 1 élément neutre sont des conséquences immédiates de la définition.

- Enfin quand il sera question d'étendre la multiplication aux nombres décimaux, la loi externe ne permettra jamais que de multiplier un décimal par un entier, et c'est d'ailleurs ce dont se plaignent de nombreux enseignants.

**Remarque 1** : les deux types de situations ne sont pas fondamentalement différents. Si l'on "oublie" certaines caractéristiques des objets considérés, toute situation conduisant à une somme réitérée, se mathématise aussi en produit cartésien.

Or, oublier des caractéristiques des objets ne présente aucun inconvénient puisque ce ne sont pas les objets en eux-mêmes qui nous intéressent mais leur dénombrement.

**Remarque 2** : rattacher la multiplication à la "mesure-produit" ne suppose pas que l'on ait fait une étude exhaustive préalable du produit cartésien et de ses propriétés. Le produit cartésien n'est pas commutatif. Le couple (a, b) n'est pas en général égal au couple (b, a) mais le cardinal du produit $A \times B$ est égal à celui du produit $B \times A$ .

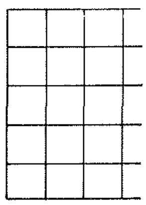
Si l'on veut introduire la multiplication à partir de tableaux cartésiens obtenus dans une situation de dénombrement par exemple, ce qui sera important, ce sera de constater que le nombre de cases du tableau ne dépend que du nombre de lignes et de colonnes du tableau : il faudra en quelque sorte oublier son contenu.

Mais on peut aussi se passer de tableaux cartésiens, demander aux enfants de dessiner des rectangles et de poser un jeton dans chaque case, les leur faire découper et ranger suivant le nombre de jetons utilisés.

## III – ACTIVITES POSSIBLES AVANT L'APPRENTISSAGE D'UNE TECHNIQUE OPÉRATOIRE.

3.1 **Première phase : les premières activités proposées aux enfants vont viser à assurer la définition de la multiplication dans le cadre où elle a été introduite, à leur faire trouver et reconnaître des écritures équivalentes** (ce qui assurera la liaison avec les additions répétées).

– Par exemple, on peut distribuer aux enfants des grilles rectangulaires (pas très grandes) ou les leur faire construire sur du papier quadrillé, et leur demander d'écrire sous différentes formes le nombre de cases de la grille (chaque écriture rappelant un procédé utilisé pour compter le nombre de cases de la grille).



Pour une grille de 5 lignes et 3 colonnes, on obtient généralement des écritures variées :

3 X 5, 5 X 3, 5 + 5 + 5, 3 + 3 + 3 + 3 + 3 mais aussi

10 + 5, 5 + 10, 9 + 6 .

– On peut aussi donner à chaque enfant un certain nombre de jetons (par exemple 72) et une feuille de papier quadrillé. La consigne est de disposer les jetons de toutes les façons possibles en grilles rectangulaires. Ce genre d'activités plait beaucoup aux enfants. Très souvent, ensuite, chacun veut se choisir un nombre de jetons. Ils sont très étonnés de s'apercevoir que certains obtiennent de nombreux rectangles, d'autres peu. Ils trient les nombres suivant les résultats obtenus, se posent des questions. Bien sûr, il n'est pas question de faire à cette occasion une théorie de la divisibilité et de la décomposition des entiers en facteurs premiers. Cette activité pourra d'ailleurs être reprise et approfondie ultérieurement.

– Dans cette première phase, nous proposons également aux enfants des situations multiplicatives simples, par exemple :

"dans un zoo, il y a 6 mamans singes, chacune vient d'avoir 4 bébés"

"dans un wagon, il y a 10 compartiments. Dans un wagon de première classe, chaque compartiment peut contenir 6 personnes, dans un wagon de deuxième classe, chaque compartiment peut en contenir 8"

"j'ai 21 fleurs, j'ai 3 vases, je veux mettre le même nombre de fleurs dans chaque vase"

ou pour éviter de présenter uniquement des situations où tous les objets considérés sont de même nature :

"je suis allée chez la fleuriste. J'y ai acheté 5 roses, 5 œillets, 5 tulipes, 5 glaieuls, 5 iris, 5 plantes vertes et 3 vases pour mettre mes bouquets" .

(Souvent nous reprenons d'ailleurs des problèmes inventés par d'autres élèves l'année précédente).

Pour chacun les enfants décident de ce qu'ils vont chercher et représentent la situation généralement soit en faisant un tableau, soit en dessinant des paquets de croix. Suivant la représentation choisie, ils écrivent des additions ou des multiplications, parfois les deux. Les différentes solutions trouvées sont exposées collectivement.

Nous leur suggérons ensuite d'inventer eux aussi des problèmes. Ces problèmes sont recopiés sur le cahier. Plusieurs séances sont consacrées à leur réalisation.

– L'introduction de la multiplication est aussi l'occasion de revenir sur des activités de numération. En effet, au CP les enfants, pour dénombrer des collections comportant un grand nombre d'objets, ont groupé les objets par paquets de même cardinal. Ils ont ensuite privilégié les groupements par dix qui correspondent à la numération usuelle. Au début du CE 1 les paquets figurent toujours dans leur écriture. C'est ainsi que le nombre "cent vingt trois" est écrit suivant les circonstances :

123 , 12 p * de 10 + 3 , 100 + 20 + 3 , 1 p de 100 + 2 p de 10 + 3 . . .

L'équivalence entre toutes ces écritures nécessitant une gymnastique intellectuelle généralement hors de leurs capacités.

Si on leur donne à compter de grosses quantités d'objets (plusieurs centaines) disposés de manière à faire apparaître des grilles rectangulaires de 100 objets et des rangées de 10 objets, les enfants découvrent que le symbole "p de" qu'ils utilisent depuis le CP est un symbole "X" camouflé et ceci permet d'établir un premier lien entre la multiplication et la numération.

*(*) – C'est la notation utilisée dans cette classe pour désigner 12 paquets de dix.*

**3.2 Deuxième phase : voici un exemple de situation fonctionnelle** * (début CE 2) .

Les enfants du CE 2 ont mené une enquête sur les tarifs des parkings de la ville. Voici les renseignements qu'ils ont ramenés :

| | | |
|---|---|---|
| Parking de la gare | 30 mm | 1 F |
| Parking de la gare | 1 mois | 60 F (abonnement) |
| Parcmètre en ville | 1 heure | 1 F 50 |
| Parcmètre du marché | 1 heure | 1 F 20 |

Dans un premier temps, ils cherchent des idées de problèmes. Cela ne manque pas. par exemple :

– *Quel est le prix de l'abonnement au parking de la gare pour un an ?*

– *Quel est le parking le plus cher ? le moins cher ?*

– *Si une dame se gare tous les jours pendant une heure au parking de la gare, a-t-elle intérêt à prendre un abonnement ?*

– *Combien vais-je dépenser si je laisse ma voiture 3 heures au parcmètre du marché ?*

Pour résoudre tous les problèmes inventés, les enfants décident de se partager en équipes. Chaque équipe étudiera plus particulièrement le tarif de l'un des parkings.

Toutes les équipes présentent les résultats obtenus sous forme de listes.

Pour résoudre les problèmes il faut disposer des renseignements obtenus dans les différentes équipes. Une élève propose de consigner tous les résultats sur une même feuille en traçant des représentations graphiques. Les autres acceptent. Le maître distribue à chaque équipe une feuille de papier millimétré de 50 cm de côté. Le choix de l'échelle se fait collectivement. Il soulève d'âpres discussions :

---

*(*) – Il s'agit ici d'un exemple de fonction affine par morceaux dont il était question plus haut.*

*— 5 centimètres pour 1 franc, c'est trop, on ne pourra pas mettre beaucoup de nombres.*

*— 1 cm pour 1 franc, ce n'est pas assez, on ne voit pas bien les 20 centimes.*

Finalement ils adoptent les échelles suivantes :

2,5 cm pour 1 franc

3 cm pour 1 heure.

Les trois premières droites sont tracées assez rapidement, les enfants repérant comment on passe d'un point au point suivant.

Mais, quand il s'agit de représenter le tarif du parking de la gare avec abonnement, ce n'est plus aussi simple. Les listes qu'ils ont obtenues sont du type :

| Mois | Prix en francs |
|---|---|
| 1 | 60 |
| 2 | 120 |
| 3 | 180 |
| ⋮ | ⋮ |

Elles ne peuvent servir à rien.

Ils se décident donc à calculer le nombre d'heures dans un mois, puis réduisent les nombres obtenus par divisions successives jusqu'à arriver à des points dans les limites de la feuille de papier :

| Heures | Prix en francs |
|---|---|
| 720 | 60 |
| 72 | 6 |
| 36 | 3 |
| 12 | 1 |
| 6 | 1/2 |

Ces deux derniers résultats leur permettent de tracer une droite mais la précision n'est pas excellente. (A cet âge là, tracer une droite sur du papier millimétré n'est pas chose aisée, surtout si la feuille mesure 50 cm de côté).

**Avant d'aborder la résolution des problèmes inventés par les enfants, le maître propose deux fiches avec les objectifs suivants :**

– assurer la lecture des représentations graphiques

– faire chercher par les enfants des méthodes leur permettant de répondre à des questions concernant de grands nombres (hors des limites de la feuille).

– soulever le problème de l'incertitude de la représentation graphique à propos de la droite associée au parking de la gare avec abonnement.

Les fiches sont les suivantes :

1 Notez les prix correspondants :

| Lieu / durée | parc mètre | parcmètre marché | parking gare | gare abonnement |
|---|---|---|---|---|
| 1 h | | | | |
| 2 h | | | | |
| 5 h | | | | |
| 8 h | | | | |
| 10 h | | | | |
| 12 h | | | | |
| 3 h 30 | | | | |

(2) Notez les temps de stationnement autorisés :

| Lieu / prix | parc mètre | parcmètre marché | parking gare | gare abonnement |
|---|---|---|---|---|
| 6 F | | | | |
| 8 F | | | | |
| 10 F | | | | |
| 13 F | | | | |
| 16 F | | | | |
| 30 F | | | | |

La lecture du graphique ne pose pas de problème pour 1 H, 2 H, 3 H 30, avec les trois premiers parkings. Par contre pour 8 H, 10 H, 12 H les points correspondants sur les droites sont très éloignés de l'axe des abscisses. Les enfants se trompent souvent en suivant avec le doigt. Puis l'un d'eux propose d'utiliser la règle placée verticalement comme guide : ("pour être sûr de ne pas changer de droite"). Cette méthode se révèle très satisfaisante et les enfants estiment tous alors que c'est bien plus facile de lire sur le graphique que de faire les calculs.

Pour remplir la dernière colonne, ils se trouvent conduits à faire des approximations. Tous n'obtiennent pas les mêmes nombres. Les réponses les plus couramment fournies sont :

10 c
20 c
40 c
65 c
80 c
1 F
30 c

Lors de la synthèse collective, plusieurs élèves font remarquer que ces résultats ne sont sûrement pas tous exacts :

– "si c'était 10 centimes pour 1 heure, ça devrait être 50 centimes pour 5 heures et pas 40 centimes".

– "et puis ça ferait 1 F 20 pour 12 heures".

– "on pourrait essayer 9 centimes de l'heure".

C'est encore trop. Ils essaient alors 8 centimes de l'heure, obtiennent 96 centimes pour 12 heures, et décident de faire les calculs avec ce tarif là (faute de mieux). Ils remplissent la colonne en utilisant la proportionnelle, sauf pour 12 heures bien entendu.

La seconde fiche est remplie beaucoup plus rapidement que la première. Les enfants utilisent les propriétés des fonctions linéaires pour vérifier les résultats obtenus :

– "sur la ligne des 16 F, on a la somme de la ligne des 10 F et de la ligne des 6 F."

– "c'est le double de la ligne des 8 F".

30 F ne correspond pas à une somme portée sur les axes, mais les enfants se débrouillent de différentes façons à partir des résultats connus pour remplir cette dernière ligne :

$$f(30) = 3\,f(10)$$

$$f(30) = 2\,f(15)$$

$$f(30) = 10\,f(3)$$

Pour la dernière colonne, cette fois-ci encore, aucun des nombres ne correspond à un point du graphique. Les enfants reprennent alors la liste commencée lors de la construction des droites, et remarquent qu'un jour de stationnement revient à 2 F.

| | |
|---|---|
| 6 H | 50 c |
| 12 H | 1 F |
| 24 H | 2 F |
| 3 j | 6 F |
| 4 j | 8 F |
| 5 j | 10 F |
| 6 j | 12 F |
| 8 j | 16 F |
| 15 j | 30 F |

Quelques enfants se trompent en calculant les moitiés de 13 et de 30.

Après toutes ces activités, résoudre les problèmes posés initialement et tous ceux qu'ils inventent ensuite leur paraît très facile.

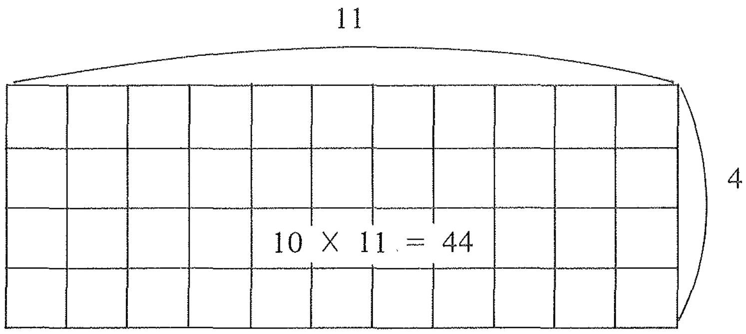
Un monsieur se gare pour 13 h. au marché il a 47F. dans son porte-monnaie, combien d'argent faut-il qu-il depense pour se garer 13h? 15F60 combien d'argent lui reste-il ? 31F40 et combien d'heures peut il encore se garer ? 26 5h lui reste de l'argent. combien lui en reste-t-il ? 20 centimes

## IV – TECHNIQUE PROPREMENT DITE .

On utilise pour élaborer une technique des grilles à n lignes et p colonnes.

### 4.1 Première phase

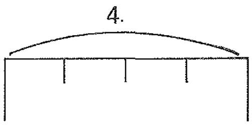
On fournit aux enfants des grilles de différentes tailles et on leur demande de trouver le nombre de cases de chaque grille. L'introduction du signe X a été faite grâce aux grilles ; il est donc normal que les enfants donnent n X p comme nombre de cases des grilles avant de les compter effectivement.




Les deux moyens les plus couramment utilisés par les enfants sont :
soit dénombrer les cases une par une en les cochant au fur et à mesure, soit faire des additions répétées : 11 + 11 + 11 + 11 = 44

Toutes les grilles peuvent être affichées au tableau pour que tous les enfants se persuadent que le nombre de cases des grilles ne dépend que de leur nombre de lignes et de leur nombre de colonnes.

Il est important d'indiquer sur le tableau :




La grande accolade permet aux enfants de ne pas oublier qu'il y a 4 colonnes par exemple, ils conservent l'accolade pendant assez longtemps lorsque les grilles sont terminées ou collées sur une feuille blanche.

Cette phase très libre permet, entre autres activités, de commencer à se constituer un répertoire, les résultats trouvés par les enfants peuvent être conservés écrits sur un tableau.

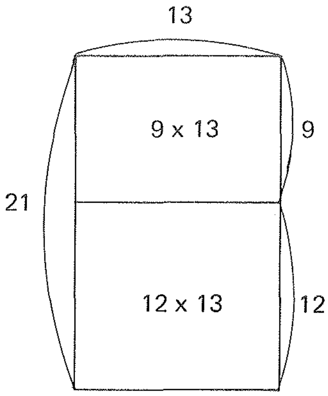
A la fin de cette phase, les enfants ont déjà une bonne connaissance de la commutativité de la multiplication et un début de répertoire.

### 4.2 Deuxième phase .

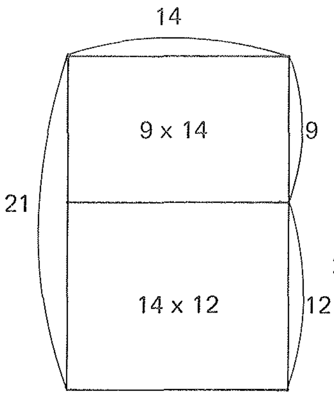
On peut, pour cette phase, grouper les enfants en équipes de quatre. A chaque enfant, on donne une grille dont il doit dénombrer les cases. Par exemple :

Un enfant a la grille 14 X 9 , un autre 13 X 9 , un autre la grille 14 X 12 et le dernier la grille 13 X 12 .

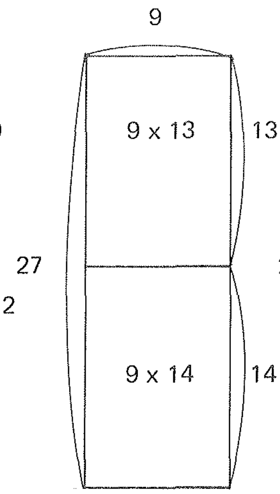
Quand ils ont dénombré chacun leur grille, par la méthode qui leur plaît, on leur demande de trouver les résultats d'autres multiplications en assemblant leurs grilles. Ils peuvent trouver :



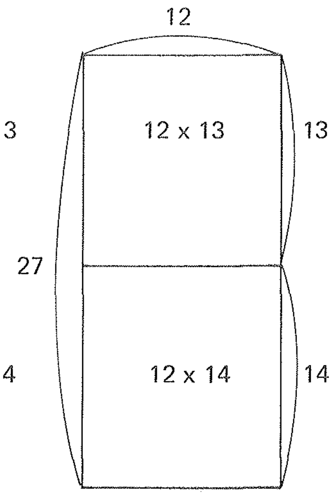

21 x 13 =
(9 x 13) + (12 x 13)



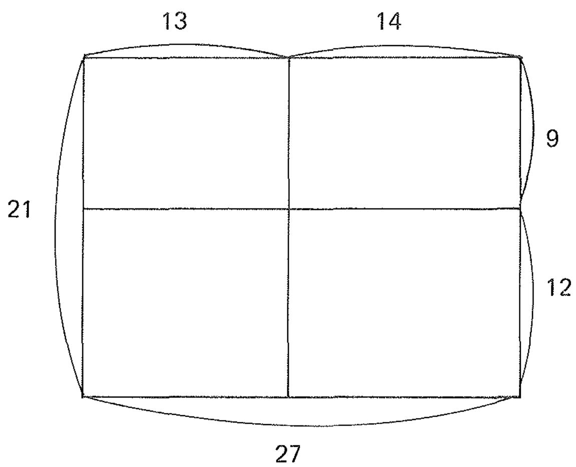

21 x 14 =
(9 x 14) + (12 x 14)




9 x 27 =
(9 x 13) + (9 x 14)

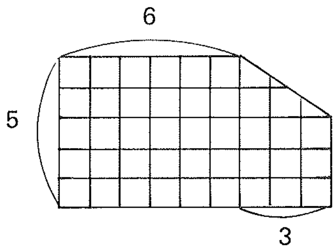



12 x 27 =
(12 x 13) + (12 x 14)



Les enfants vont ensuite exposer leurs résultats au tableau. Ils sont forcés de représenter ce qu'ils ont fait. La nécessité des grandes accolades est ici évidente. Les enfants, grâce à elle, ne perdent pas de vue la signification des nombres écrits sur le côté.

Parallèlement pour accroître leur connaissance des grilles, on peut aussi leur donner des grilles dont les coins sont repliés. Ils doivent dénombrer les cases sans déplier le coin.



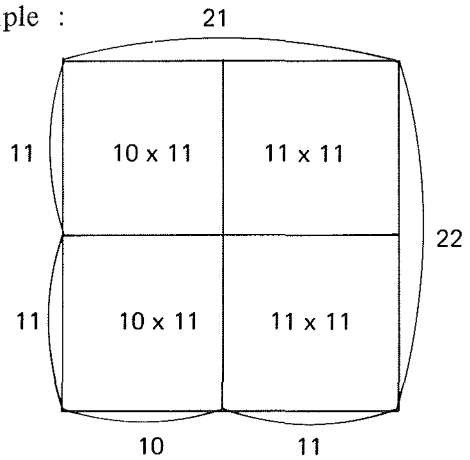

Pour résoudre le problème, ils sont obligés de décomposer la grille en deux sous-grilles, ce qui pourra leur donner l'idée de le faire ultérieurement pour simplifier leurs calculs. D'autre part, ils doivent prendre conscience que les deux côtés opposés d'un rectangle ont même dimension. Pour trouver le nombre de cases cachées, ils doivent dire que le nombre de cases du rectangle hachuré est $5 \times 3$

Cette dernière phase permet d'agrandir encore le répertoire des enfants et de leur faire manipuler la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

### 4.3 Troisième phase .

On va maintenant donner aux enfants de très grandes grilles $21 \times 22$ , $19 \times 21$, $17 \times 22$ etc . . . Maintenant dénombrer les cases une par une est à coup sûr voué à l'échec, les additions répétées vont être longues et compliquées ; il faut donc que les enfants trouvent d'autres méthodes. Les activités précédentes vont les amener à découper en sous-grilles pour se ramener à des grilles plus simples, et même éventuellement découper en sous-grilles dont on connaît déjà le nombre de cases (répertoire) .

Par exemple :




d'où

$$22 \times 11 = (10 \times 11) + (10 \times 11) + (1 \times 11) + (1 \times 11)$$

Ensuite les enfants viennent expliquer leurs découpages au tableau et ils doivent encore être très soigneux sur la représentation, pour que personne n'oublie la signification des nombres écrits autour et dans les grilles.

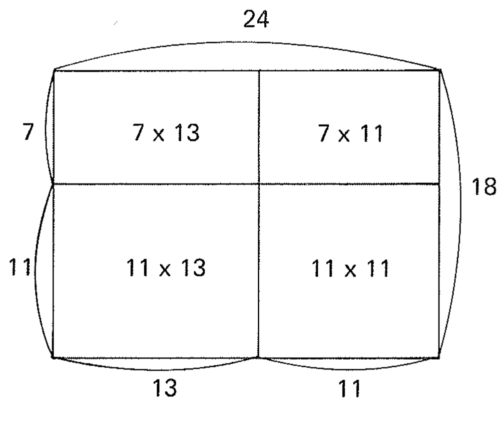
Bien entendu les enfants peuvent faire un très grand nombre de tels exercices. Cette phase doit être assez longue, pour que les enfants fassent chacun un grand nombre de découpages. Quand ils auront une grande expérience, ils sauront choisir les découpages privilégiés qui simplifient le calcul.

### 4.4 Quatrième phase .

Dans cette phase, les enfants auront toujours à découper des grilles, mais cette fois-ci le découpage leur sera plus ou moins imposé.

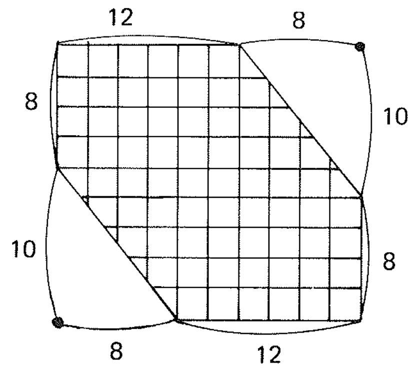
Par exemple les enfants ont à calculer le nombre de cases $24 \times 18$, ils doivent le calculer en utilisant les résultats suivants :

| | | | |
|---|---|---|---|
| $7 \times 12 = 84$ | $13 \times 11 = 141$ | $13 \times 13 = 169$ | $13 \times 15 = 175$ |
| $11 \times 7 = 77$ | $7 \times 15 = 105$ | $13 \times 7 = 91$ | $12 \times 12 = 144$ |
| $12 \times 11 = 132$ | | | |




$$18 \times 24 = (11 \times 11) + (7 \times 11) + (7 \times 13) + (11 \times 13)$$

Ou encore on donne des grilles aux coins cachés compliquées :

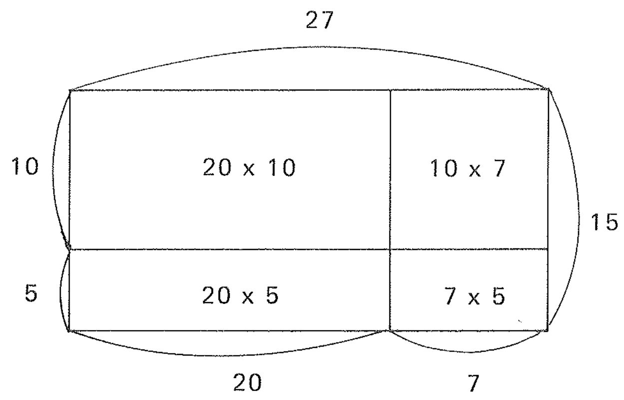



Le nombre de cases de cette grille lorsque l'on déploie les coins est :

$$(12 \times 8) + (8 \times 10) + (8 \times 8) + (12 \times 10)$$

soit : $20 \times 18$

Pendant longtemps, on ne va privilégier aucun découpage particulier ; puis quand les enfants auront découvert qu'il est beaucoup plus facile de découper en 10, les répertoires ou les coins cachés seront astucieusement choisis de façon à favoriser les découpages en grilles dont au moins l'une des dimensions est 10.




$27 \times 15 =$
$(20 \times 10) + (10 \times 7) + (20 \times 5) + (7 \times 5)$

**Remarque 1**

Les résultats des multiplications par 10 peuvent être démontrés grâce à la numération. En fait ces démonstrations supposent que la numération est parfaitement connue, or on ne peut maîtriser la numération si l'on ne connaît pas bien la multiplication, en effet,

$$3591 = (3 \times 1000) + (5 \times 100) + (9 \times 10) + 1$$

Les enfants enrichissent donc parallèlement leur connaissance en numération et leur connaissance en multiplication mais ils ne peuvent enrichir la multiplication par la numération.

Les résultats des multiplications par les puissances de dix seront découverts par l'expérience, il faudra donc un long apprentissage et de nombreux calculs.

**Remarque 2**

**Il ne faut pas oublier d'enrichir le répertoire des enfants en feur faisant étudier des situations diverses et variées de situations multiplicatives. En effet, on constate que chaque technique opératoire est le résultat d'un équilibre entre l'algorithme utilisé et le répertoire connu. Si le répertoire est restreint, l'algorithme nécessaire est long ; au contraire un répertoire très copieux permet de raccourcir l'algorithme.**

**Remarque 3**

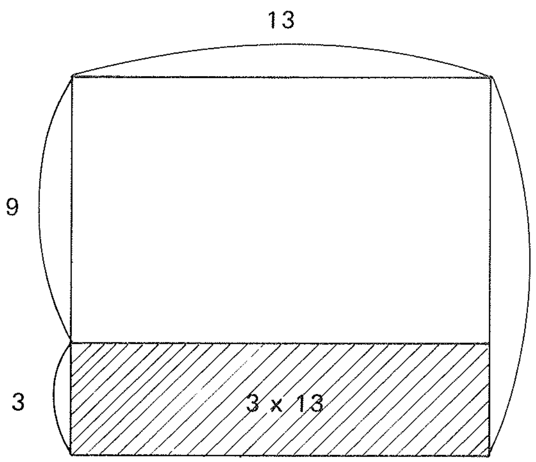
On pourrait aussi donner aux enfants des exercices qui leur permettraient de mieux maîtriser les grilles. Par exemple, comme dans la deuxième phase, on groupe les enfants par équipes et on leur donne à chacun une grille (Par exemple $14 \times 9$ , $13 \times 9$ , $14 \times 12$ , $13 \times 12$) .

La première partie se déroule comme dans la deuxième phase, les enfants assemblent des grilles pour trouver de nouvelles multiplications. Une fois ce travail, le maître demande si grâce à ces grilles on ne peut pas encore trouver de résultat : par exemple 3 X 14 ?

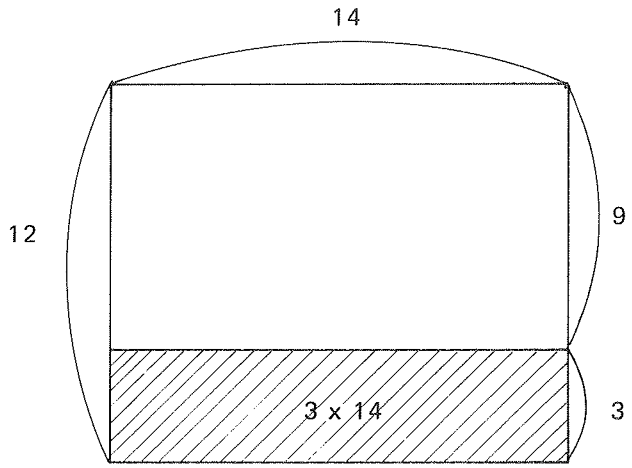
Les enfants sont alors amenés à superposer leurs grilles et à ne s'intéresser qu'à la partie qui dépasse :

Par exemple :

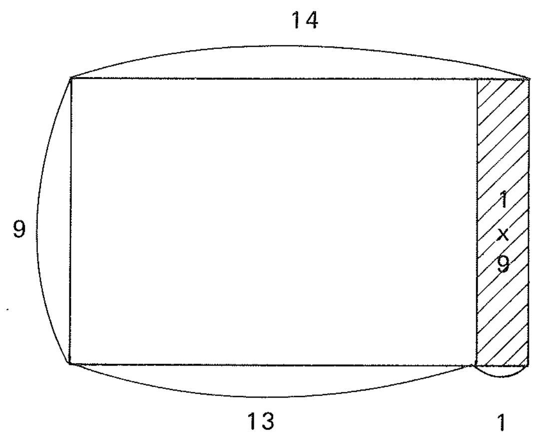
Tout d'abord, les enfants assemblent leurs grilles (voir page 2) puis lorsqu'ils sont sollicités pour de nouveaux résultats ils essayent de découvrir d'autres manipulations et finalement ils superposent leurs grilles :



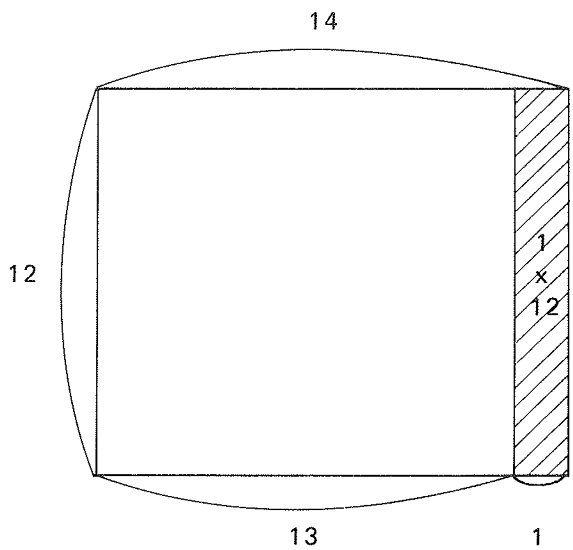

3 x 13 = (12 x 13) – (9 x 13)



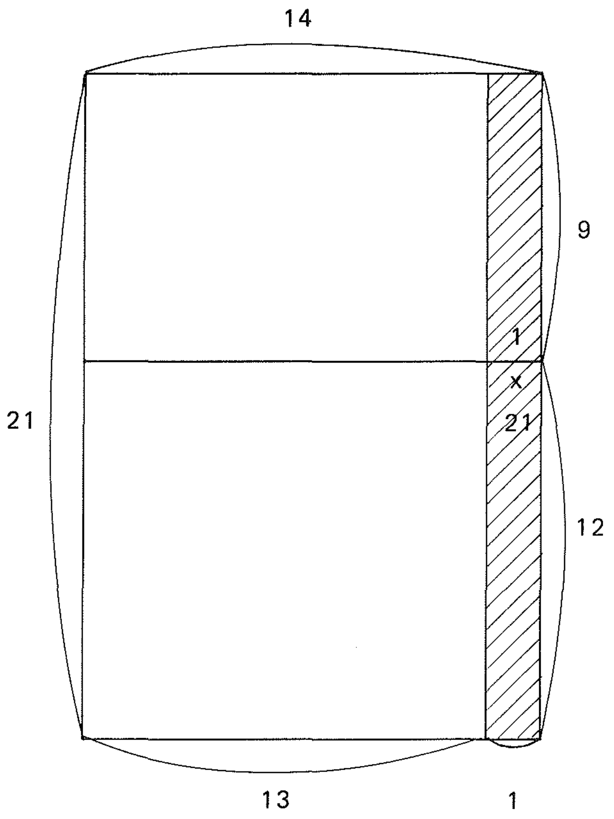

3 x 14 = (12 x 14) – (9 x 14)



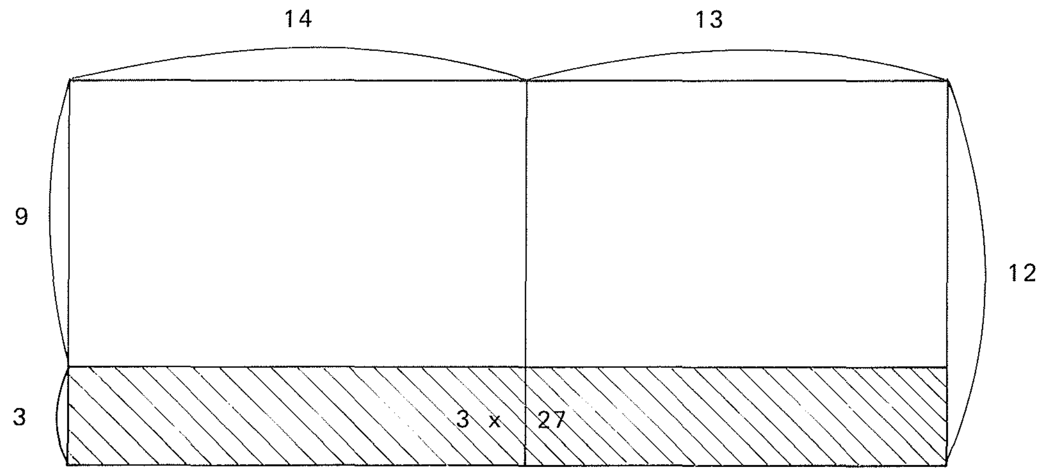

1 x 9 = (14 x 9) – (13 x 9)




1 x 12 = (14 x 12) – (13 x 12)



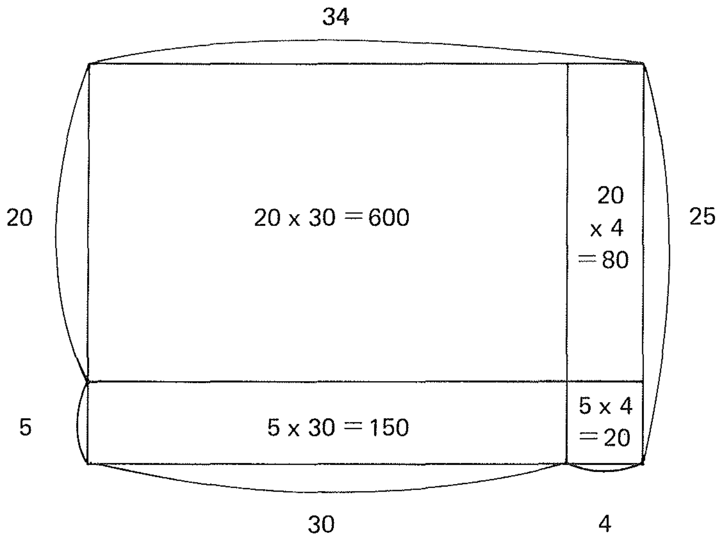

$1 \times 21 = [\ (14 \times 9) - (13 \times 9)\ ] +$
$[\ (14 \times 12) - (13 \times 12)\ ]$




$3 \times 27 = [\ (12 \times 13) - (9 \times 13)\ ] + [\ (12 \times 14) - (9 \times 14)\ ]$

### 4.5 Cinquième phase .

A la fin de la quatrième phase, les enfants en sont au stade suivant : Lorsqu'on leur demande de calculer 34 X 25, ils dessinent le schéma :

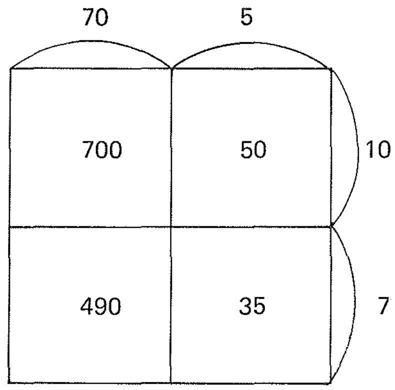


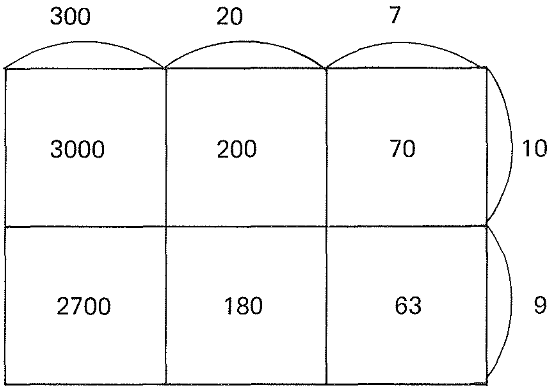

$$\begin{array}{r} 600 \\ +\ 150 \\ +\ 80 \\ +\ 20 \\ \hline 850 \end{array}$$

34 X 25 = 850

Au bout d'un certain temps, les enfants trouvent lassant de respecter l'échelle et très vite ils passent aux schémas suivants :

$$\begin{array}{r} 70 \\ +5 \\ \hline 75 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 10 \\ +7 \\ \hline 17 \end{array}$$



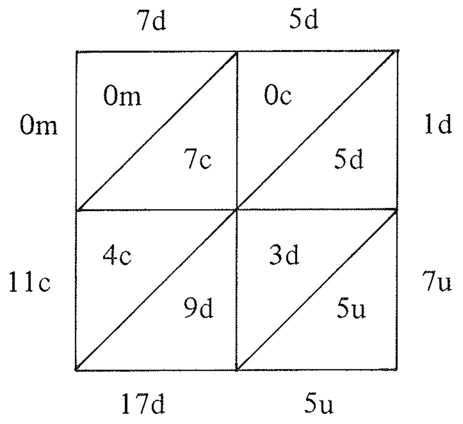




$$\begin{array}{r} 300 \\ +20 \\ +\ 7 \\ \hline 327 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 10 \\ +9 \\ \hline 19 \end{array}$$

75 x 17 = 700+490+50+35
= 1275

327 x 19 = 3000+2700+200+180+70+63
= 6213

Pour que la technique soit plus performante, il faut maintenant se débrouiller pour ne pas avoir à réécrire l'addition. Si l'on est très au courant de la numération, il suffit de remarquer que dans chaque carré il y a (en haut à gauche) 1 chiffre pour les milliers, 1 chiffre pour les centaines (en haut à droite et en bas à gauche) 1 chiffre pour les centaines et 1 chiffre pour les dizaines, (en bas à droite) il y a 1 chiffre pour les dizaines et 1 chiffre pour les unités, d'où l'idée d'additionner en diagonale : d'abord les unités, puis les dizaines ensemble, puis les centaines ensemble et enfin les milliers.




d'où 75 X 17 = 1 275

en utilisant la technique habituelle de retenue dans les additions

Le langage en milliers, centaines, unités ne peut pas être très parlant pour les enfants qui n'ont qu'une connaissance très partielle de la numération puisqu'ils n'avaient pas encore la multiplication pour éclairer les mécanismes de la numération.

Nous allons donc utiliser un moyen qui va ramener les enfants dans une situation qu'ils connaissent très bien : à savoir les unités, les paquets de 10, les paquets de 100, les paquets de 1 000 etc.

Pour cela le maître suggère un code , lorsque l'on écrira un nombre, on utilisera un carton orange pour le chiffre des paquets de 10 000, un carton vert pour le chiffre des paquets de 1 000, un carton rouge pour le chiffre des paquets de cent, un carton bleu pour le chiffre des paquets de dix, un carton jaune pour le chiffre des unités.

Ex : 3487 se code $\boxed{3}\ \boxed{4}\ \boxed{8}\ \boxed{7}$ c'est très facile pour les enfants.
V R B J

Ensuite le maître leur demande de coder tous les nombres d'une multiplication :

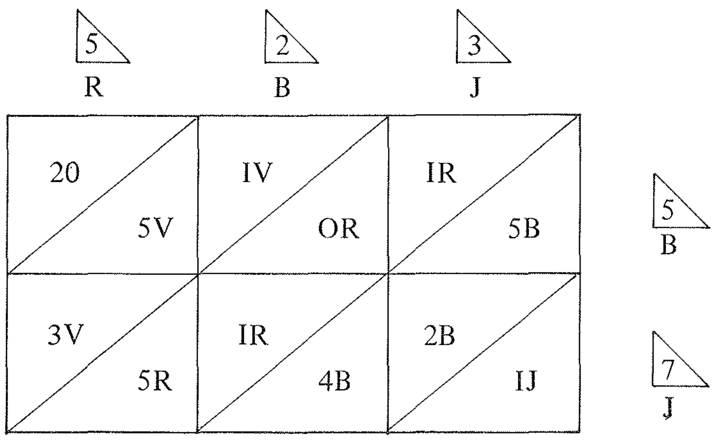
| $\boxed{4}$ R | | $\boxed{8}$ B | | $\boxed{7}$ J | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\boxed{1}$ O | $\boxed{2}$ V | $\boxed{2}$ V | $\boxed{4}$ R | $\boxed{2}$ R | $\boxed{1}$ B | $\boxed{3}$ B |
| $\boxed{2}$ V | $\boxed{8}$ R | $\boxed{5}$ R | $\boxed{6}$ B | $\boxed{4}$ B | $\boxed{9}$ J | $\boxed{7}$ J |

Ensuite on rappelle que pour faire les additions, on additionne ensemble les unités, puis les paquets de dix, puis les paquets de cent, etc . . .

Ensuite on fait les conversions nécessaires :

19 paquets de cent, c'est un paquet de 1 000 et 9 paquets de cent.

Ensuite le maître ne fournit que des triangles rectangles isocèles pour écrire les chiffres, cela donne :




Ils reconnaissent leur technique habituelle d'addition en colonnes (unités, paquets de 10, paquets de 100, etc . . .), la seule différence est que les colonnes suivent les diagonales du quadrillage au lieu d'en suivre les verticales. L'avantage de l'utilisation des couleurs est de visualiser de façon très voyante les colonnes habituelles de l'addition ; (son autre avantage étant bien entendu de pouvoir supprimer les zéros sans arguments trop sophistiqués de numération).

**Remarque**

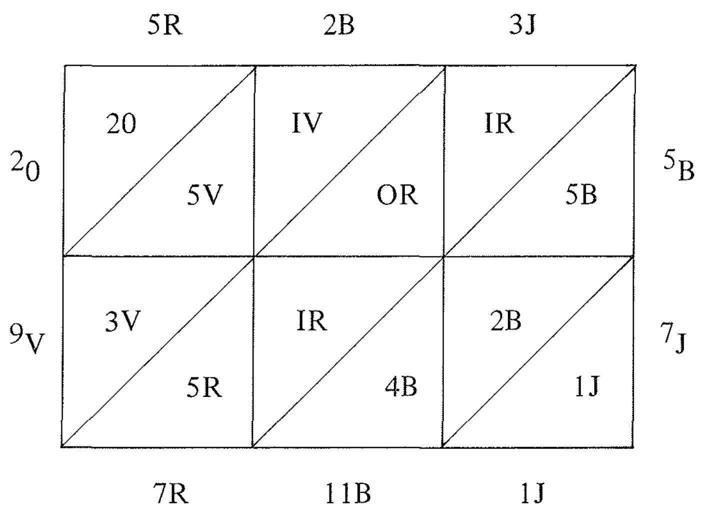
On pourrait avoir l'espoir qu'en faisant beaucoup d'additions avec les zéros, les enfants découvriront que l'on additionne en diagonales, en fait il n'en est rien :

| 500 | 20 | 3 | |
|---|---|---|---|
| 25000 | 1000 | 150 | 50 |
| 3500 | 140 | 21 | 7 |

L'addition que l'on effectue est

523 + 57 = 29 811

$$
(1) \quad \begin{array}{r} 25000 \\ +\ 1000 \\ +\ 3500 \\ +\ 140 \\ +\ 150 \\ +\ 21 \\ \hline 29811 \end{array}
$$



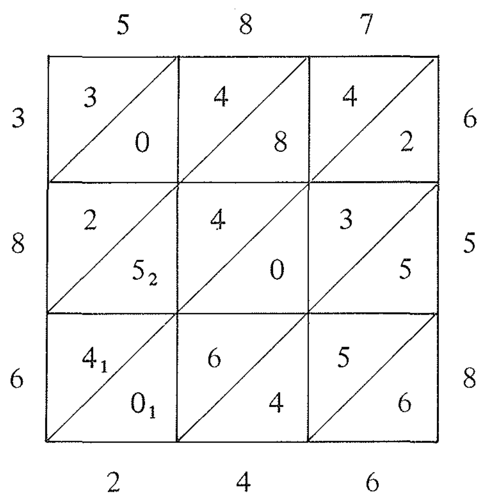

d'où le résultat 29 811

L'addition que l'on effectue alors est :

|   |   |   |
|---|---|---|
|   | 1 |   |
| + | 50 |   |
|   | 20 |   |
|   | 40 |   |
| + | 100 |   |
|   | 100 |   |
|   | 500 | (II) |
| + | 1000 |   |
|   | 5000 |   |
|   | 3000 |   |
| + | 20000 |   |
|   | 29811 |   |

Les deux additions sont essentiellement différentes et l'on ne pourra pas passer directement de (I) à (II) .

Les enfants font, pendant un certain temps, leurs multiplications sur les cartons de couleur qu'ils collent, mais c'est long et fastidieux. Très vite ils pensent qu'il suffit d'écrire les nombres en couleur et ensuite ils s'aperçoivent que la position suffit et ils abandonnent tout codage en couleur, ils sont alors arrivés à la technique finale très fiable et très performante :




$587 \times 658 = 386\ 246$