HISTOIRES DES TECHNIQUES OPERATOIRES

par Raymond GUINET

«Quand on sait les quatre règles,
on est un aigle en finances.»

Mirabeau

«De 6 j'ôte 2, reste 4 ; 4 de 3, reste 1 ; 6 de 5, reste 1 ; 8 de 2, reste 6 ; 7 de rien, reste 7 ; et l'on trouve pour différence 76 114 unités» *

C'est ainsi qu'un enfant, au début du XIXème siècle effectuait une soustraction. Gageons que si depuis, les paroles ont changé, l'air est le même.

Le dossier que nous ouvrons ici est destiné essentiellement à donner une information sur l'évolution des techniques opératoires au cours des siècles. Ce qui paraît dans ce numéro est consacré à l'addition et à la soustraction. Dans les prochains numéros, nous verrons comment était effectuée une division il y a mille ans ou une multiplication il y a trois mille ans. En outre nous ouvrirons une importante parenthèse sur le calcul des fractions en Egypte (vers 1550 avant Jésus Christ), à propos de l'approche de la division dans cette civilisation, non seulement parce que ce calcul est d'une grande originalité mais parce qu'il conduit aussi à des développements intéressants.

(*) - Abrégé de toutes les sciences à l'usage des enfants - A Lyon chez JEAN AYME - An XII (1804)

Ne soyez pas étonnés par l'absence de signes opératoires dans la présentation des différentes techniques de l'addition et de la soustraction, l'auteur a en effet respecté, à ce sujet, ce qui se faisait aux différentes époques qu'il nous aide à parcourir.

Certaines des techniques opératoires présentées ici peuvent, bien sûr, faire l'objet d'exercices d'application dans les classes *. Nous mettons cependant le lecteur en garde contre une utilisation systématique de différentes techniques qui pourrait avoir pour conséquence de troubler les enfants en cours d'apprentissage. De plus certaines de ces techniques sont beaucoup trop complexes pour être présentées à des élèves de l'école élémentaire.

(*) *Les commentaires d'ordre pédagogique figurant dans l'article sont tapés en italique.*

I - L' ADDITION

C'est la technique de l'addition qui s'est stabilisée le plus vite et n'a pratiquement pas évolué depuis le XIIIème siècle.

En ce qui concerne **la somme de plus de deux nombres**, la méthode qui suit est signalée en Inde vers le XIIème siècle, mais elle est vraisemblablement antérieure.

Soit à calculer :

76 + 7 + 272 + 89 + 160

Somme des unités	6 , 7 , 2 , 9 , 0	24
Somme des dizaines	7 , 0 , 7 , 8 , 6	28
Somme des centaines	2 , 0 , 1	3
		604

Cette méthode est à rapprocher d'une méthode en usage au XVIème siècle en Allemagne où la même opération aurait donné :

	76
	7
	272
	89
	160
Somme des unités	24
Somme des dizaines	28
Somme des centaines	3
	604

Ces deux procédés visent à éviter les retenues ou du moins à les repousser. Un procédé que l'on peut considérer comme transitoire est cité par Baha EDDIN * dans son livre «**Les principes du calcul**».

(*) Baha EDDIN, auteur Syrien ayant écrit en arabe et en persan (1547-1622)

Appelons-la méthode arabe pour des raisons de commodité.

	7	6
		7
2	7	2
	8	9
1	6	0
~~3~~	~~8~~	4
~~5~~	0	
6		

Les nombres sont placés dans un tableau comme ci-contre, héritage des calculs sur abaque. Les additions sont effectuées colonne par colonne, en commençant par la gauche. L'opérateur au fur et à mesure des calculs, efface les résultats partiels, si le travail se fait sur ardoise, ou procède à des ratures comme ci-contre, si le travail est fait à la plume.

6	0	4	1
	7	6	4
		7	7
2	7	2	2
	8	9	8
1	6	0	7

Le procédé actuellement en vigueur, dont l'origine arabe ne semble pas faire de doute, a été adopté par Maximes PLANUDES *. Dans la marge on indiquait la preuve par neuf de l'opération. La seule différence avec notre méthode était que la somme était écrite en haut du tableau.

Remarquons au passage qu'aujourd'hui, de plus en plus nombreuses sont les classes òu l'on habitue les enfants à mettre le résultat des additions en haut ou en bas, dans le but de favoriser par la suite la technique de la soustraction par addition.

(*) - Maximes PLANUDE (1260-1310) écrivain byzantin.

II - LA SOUSTRACTION

«De six oiseaux, en tuant trois, combien en demeure ?
Il n'en demeure aucun, les autres s'enfuient.»

Tabarin *

La soustraction a pris une forme définitive vers le XVIème siècle, mais différentes méthodes subsistaient en même temps comme nous allons le voir.

Pour chacune des méthodes qui suivent, nous nous intéresserons au calcul de la différence :

$$6459 - 2872 = 3587$$

Ainsi, les comparaisons seront plus aisées.

2.1 – Méthode arabe

Cette méthode est citée par Baha EDDIN dans son livre «Les principes du Calcul».

6	4	5	9
2	8	7	2
4	6	8	7
3	5		

Les nombres sont placés dans une grille comme ci-contre puis les calculs se font en commençant par la gauche ou par la droite, colonne par colonne, sans tenir compte des retenues.

Dans un deuxième temps, on obtient le résultat final en tenant compte de ces retenues.

Cette disposition est, comme dans le cas de l'addition, un héritage des abaques qui servaient aux calculs.

(*) - TABARIN (1583-1634) Charlatan français.

2.2 – Méthode «moyenâgeuse»

RAMUS * la cite dans son arithmétique, mais elle est vraisemblablement antérieure à son époque. Une fois effectuée, elle se présente comme ceci :

$$\begin{array}{cccc}
3 & 5 & & \\
\cancel{4} & \cancel{6} & 8 & 7 \\
\cancel{6} & \cancel{4} & \cancel{5} & \cancel{9} \\
\cancel{2} & \cancel{8} & \cancel{7} & \cancel{2}
\end{array}$$

Le calcul se fait en commençant par la gauche. Decomposons ses différentes étapes.

$$\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc}
4 & & & & 3 & & & & 3 & 5 & & & 3 & 5 & & \\
\cancel{6} & 4 & 5 & 9 & \cancel{4} & 6 & & & \cancel{4} & \cancel{6} & 8 & & \cancel{4} & \cancel{6} & 8 & 7 \\
 & & & & \cancel{6} & \cancel{4} & 5 & 9 & \cancel{6} & \cancel{4} & \cancel{5} & 9 & \cancel{6} & \cancel{4} & \cancel{5} & \cancel{9} \\
\cancel{2} & 8 & 7 & 2 & \cancel{2} & \cancel{5} & 7 & 2 & \cancel{2} & \cancel{8} & \cancel{7} & 2 & \cancel{2} & \cancel{8} & \cancel{7} & \cancel{2}
\end{array}$$

(1) (2) (3) (4)

(1) 6 - 2 = 4

(2) 44 - 8 = 36

(3) 65 - 7 = 58

(4) 9 - 2 = 7

Un deuxième exemple aidera à mieux comprendre cette méthode :

$$\begin{array}{ccccc}
 & 2 & & 4 & \\
\cancel{5} & \cancel{3} & 7 & \cancel{5} & 5 \\
 & \cancel{5} & \cancel{3} & \cancel{8} & 2 \\
 & \cancel{2} & \cancel{6} & \cancel{3} & \cancel{7}
\end{array}$$

La différence est 2 745

(*) - RAMUS (1515-1572) Mathématicien et philosophe français.

2.3 – Méthode «par complément»

La méthode qui suit estbasée sur le principe suivant : si l'on veut calculer $12 - 7$, on peut ajouter 3 à 12 (3 étant la différence $10 - 7$) puis retrancher 10 soit : $15 - 10 = 5$.

Dans l'exemple qui nous intéresse, ceci est à faire colonne par colonne, en commençant par la droite, pour les unités, dizaines, centaines et milliers, et le discours que l'on doit tenir devient vite très lourd.

Voici un moyen moderne basé sur ce principe :

Calculons le complément à 10 000 de 2 872 soit 7 128 (si le deuxième nombre était comptis entre 100 et 1 000, on aurait calculé le complément à 1 000 de ce deuxième nombre).

Pour calculer mentalement ce complément, il suffit de calculer le complément à 10 du chiffre des unités puis le complément à 9 des autres chiffres.

$$\begin{array}{r} 6\ 4\ 5\ 9 \\ 2\ 8\ 7\ 2 \\ \hline 3\ 5\ 8\ 7 \end{array} \quad \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longleftarrow \end{array} \quad \begin{array}{r} 6\ 4\ 5\ 9 \\ 1\ 7\ 1\ 2\ 8 \\ \hline 0\ 3\ 5\ 8\ 7 \end{array}$$

Puis, on fait une simple addition sans oublier, compte tenu de la dernière retenue, de soustraire 1.

L'explication de cette méthode est fort simple. La série de calculs suivante le montre bien.

$$\begin{aligned} 6\,459 - 2\,872 &= 6\,459 + (10\,000 - 2\,872) - 10\,000 \\ &= 6\,459 + 7\,128 - 10\,000 \\ &= 13\,587 - 10\,000 \end{aligned}$$

*Cette méthode est très ancienne. Déjà au XIIème siècle BHASKANA * l'employait dans le LILAMATI, ouvrage d'algèbre d'une très grande originalité pour l'époque. Cette méthode est communément employée dans les calculs logarithmiques à la main où les soustractions de nombres de six chiffres sont monnaie courante, mais nul doute qu'avec l'apparition des calculatrices électroniques elle ne soit reléguée au rang de l'histoire comme celles qui précèdent.*

(*) - BHASKANA (1114-1185) mathématicien hindou.

2.4 – Méthode par compensation

Celle-ci consiste à ajouter un même nombre aux deux termes, de telle sorte que le premier nombre ne comporte, à l'exception du premier chiffre à gauche, que des 9 .

$$
\begin{array}{cccc}
 & 5 & 4 & \\
6 & 4 & 5 & 9 \\
2 & 8 & 7 & 2 \\
\hline
3 & 5 & 8 & 7
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
\\ \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longleftarrow
\end{array}
\quad
\begin{array}{cccc}
\\
6 & 9 & 9 & 9 \\
3 & 4 & 1 & 2 \\
\hline
3 & 5 & 8 & 7
\end{array}
$$

Elle fut employée sous une forme différente au XVIème siècle par RAMUS.

2.5 – Méthode «classique»

Le principe est le même que pour la méthode précédente mais il est employé de manière différente. Les tenants de la méthode précédente cherchaient certainement à éviter les différentes retenues. Ce n'est pas le cas ici.

$$
\begin{array}{cccc}
6 & {}_1 4 & {}_1 5 & 9 \\
2_1 & 8_1 & 7 & 2 \\
\hline
3 & 5 & 8 & 7
\end{array}
$$

Cette méthode est d'un usage très ancien. FIBONACCI * en 1202 l'employait déjà dans le LIBER ABACI.

$$
\begin{array}{cccc}
6 & 4 & 5 & 9 \\
3 & 5 & 8 & 7 \\
\hline
6 & 4 & 5 & 9 \\
2 & 8 & 7 & 2 \\
1 & 1 & &
\end{array}
$$

Mais elle prenait la forme ci-contre où le résultat est écrit juste au dessus de la ligne alors que la preuve de l'opération apparaît sur la première ligne.

Voici ci-dessous les détails des calculs étape par étape.

$$
\begin{array}{cccc}
 & & & 7 \\
\hline
6 & 4 & 5 & 9 \\
2 & 8 & 7 & 2 \\
 & & &
\end{array}
\quad\Bigg|\quad
\begin{array}{cccc}
 & & 8 & 7 \\
\hline
6 & 4 & 5 & 9 \\
2 & 8 & 7 & 2 \\
 & 1 & &
\end{array}
\quad\Bigg|\quad
\begin{array}{cccc}
 & 5 & 8 & 7 \\
\hline
6 & 4 & 5 & 9 \\
2 & 8 & 7 & 2 \\
1 & 1 & &
\end{array}
\quad\Bigg|\quad
\begin{array}{cccc}
3 & 5 & 8 & 7 \\
\hline
6 & 4 & 5 & 9 \\
2 & 8 & 7 & 2 \\
1 & 1 & &
\end{array}
$$

(1) (2) (3) (4)

(*) - FIBONACCI (1175-1240) dont le vrai nom est Léonard de Pise, fut un célèbre mathématicien italien.

On peut dire :

(1) $9-2=7$

(2) $15-7=8$ et il y a 1 de retenue

(3) $14-9=5$ et il y a 1 de retenue

(4) $6-3=3$

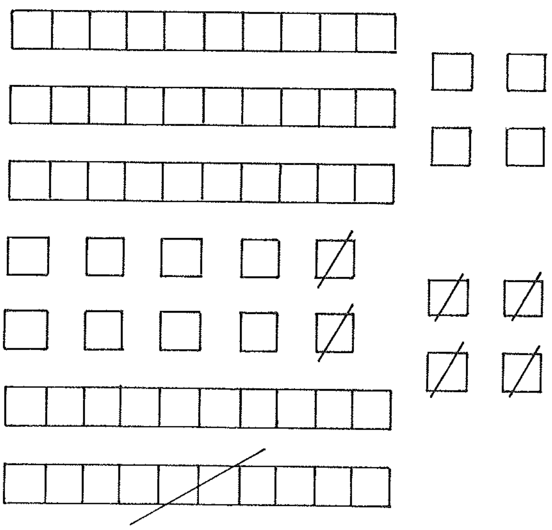
2.6 – Méthode «par emprunt»

Dans cette méthode, des transformations sont opérées non pas sur les nombres, mais sur leur écriture. C'est ainsi que 6459 apparaît ci-contre sous la forme : 5 milliers, 13 centaines, 15 dizaines, 9 unités.

$$\begin{array}{cccc} 5 & 13 & & \\ \cancel{6} & \cancel{4} & 15 & 9 \\ 2 & 8 & 7 & 2 \\ \hline 3 & 5 & 8 & 7 \end{array}$$

Montrons sur un exemple plus simple le principe de cette méthode à l'aide d'une manipulation.

Effectuons $34-18=16$

(1) 

En (1), $4-8$ étant impossible, on est amené à décomposer une dizaine en dix unités en (2). Puis, il suffit de dénombrer les éléments restants.

Comme on le voit, cette méthode est plaquée sur la manipulation, ce qui aurait pu lui réserver un avenir brillant. Cependant, bien qu'employée pour la première fois par RABBI BEN EZRA * vers 1140, elle n'eut pas la faveur des auteurs européens. Elle n'en fut pas moins enseignée en France dès le début du XIXème siècle comme le prouve «l'Abrégé de toutes les sciences à l'usage des enfants» (1804).

(*) - RABBI BEN EZRA (1093-1167) Mathématicien israélite né à Tolède, mort à Rouen.

2.7 – Méthode par addition

$$\begin{array}{cccc} 6 & 4 & 5 & 9 \\ 2^1 & 8^1 & 7 & 2 \\ \hline 3 & 5 & 8 & 7 \end{array}$$

Elle consiste en la recherche du nombre qu'il faut ajouter à 2 872 pour obtenir 6 459.

Elle demande une bonne maîtrise de la table d'addition.

La démarche à suivre est la suivante :

On calcule le nombre qu'il faut ajouter à 2 pour obtenir 9, puis ce qu'il faut ajouter à 7 pour obtenir 15, puis ce qu'il faut ajouter à 8 + 1 pour obtenir 14, enfin ce qu'il faut ajouter à 2 + 1 pour obtenir 6. Pour comprendre ce qu'il se passe, il suffit de voir que :

$$\begin{array}{ccccc} & 6 & 4 & 5 & 9 \\ - & 2^1 & 8^1 & 7 & 2 \\ \hline & 3 & 5 & 8 & 7 \end{array} \quad \text{revient au même que} \quad \begin{array}{ccccc} & 6 & 4 & 5 & 9 \\ \hline & 2^1 & 8^1 & 7 & 2 \\ + & 3 & 5 & 8 & 7 \end{array}$$

C'est JOHANNES BUTEO * qui le premier la suggéra au milieu du XVIème siècle (1559). Elle ne connaît la faveur des arithméticiens qu'à partir du XIXème siècle, où elle fut connue sous le nom de méthode autrichienne.

(*) - Johannès BUTEO (1492-1572) dont le vrai nom est Jean BOURREL fut un mathématicien dauphinois.

III - COMPARAISON DES METHODES 5, 6 et 7

Nous allons comparer les trois dernières méthodes, car se sont les seules qui actuellement font l'objet d'un enseignement systématique.

3.1 – Méthode «classique»

Un argument en faveur de cette méthode est son poids spécifique. En effet, nous y sommes habitués, nous, enseignants ou parents, car elle a été largement enseignée et est donc une des plus communément employée par les adultes. Elle n'en présente pas moins quelques inconvénients.

Il est difficile d'expliquer aux enfants le mécanisme et d'imaginer une manipulation simple qui puisse justifier la technique. Ainsi, on est conduit à des explications qui laissent les enfants indifférents et, en désespoir de cause, on donne la chanson.

La seconde difficulté provient de l'usage que l'on en fait dans la technique classique de la division. En effet, imaginons que l'on ait à chercher le quotient entier de 27 par 4.

$$\begin{array}{r|l} 27 & 4 \\ \cline{2-2} 3 & 6 \end{array}$$

On est amené à dire ceci :
«six fois quatre, vingt quatre»
à ce stade, on est gêné sur le plan du langage car on veut traduire dans la même phrase que l'on doit retrancher vingt-quatre de vingt-sept c'est pourquoi on enchaîne «ôté de vingt-sept, trois» et non «vingt-sept moins vingt-quatre, trois».

Il est vraisemblable que l'usage du verbe ôter dans la soustraction provient de là.

3.2 – Méthode «par emprunt»

Un argument en faveur de cette méthode tient à ce qu'elle constitue une simple description de la manipulation, mais il est des cas où la mise en œuvre pratique est mal aisée. Effectuons par cette méthode la différence 6 002 – 2 874

$$\begin{array}{ccccc} & 5 & 9 & 9 & \\ & \cancel{6} & \cancel{10} & \cancel{10} & 12 \\ - & 2 & 8 & 7 & 4 \\ \hline & 3 & 1 & 2 & 8 \end{array}$$

Comme nous le voyons, il faut répercuter sur les différents chiffres et en cascade les différentes transformations que l'on opère, ce qui demande beaucoup de soin. Mais, là ne s'arrêtent pas les difficultés. En plus des réticences d'ordre sociologique, l'emploi de cette technique dans la division est un frein à la rapidité et à l'aisance du calcul.

3.3 – Méthode «par addition»

Le principal inconvénient de cette méthode est lui aussi d'ordre sociologique. Cependant, elle comporte au moins deux avantages. Le premier est d'ordre pédagogique et exploite la propension des enfants à vouloir faire une addition à la place d'une soustraction : lorsqu'on donne à des enfants à résoudre un problème de type soustractif ils ont tendance à l'expliquer par une addition. Cette méthode ne demande rien de plus que de savoir faire une addition.

Le second est d'ordre pratique et confère à cette méthode un avantage sur les autres dans son emploi dans la technique classique de la division. Dans l'exemple cité ci-dessus, on pourrait dire «six fois quatre, vingt-quatre plus trois, vingt-sept.»

JEUX

par R. GUINET

SOLUTION DU JEU E.13.1 : NUMERATION ET CARRES MAGIQUES.

Une erreur d'ordre technique nous a fait publier un énoncé incomplet qui n'a pas permis à nombre de nos lecteurs de le résoudre. Il fallait ajouter : *Coder ce carré en base dix. Qu'obtient-on ? Pouquoi ?*

Solution du jeu

Carré G :
Pour déterminer le nombre désigné par (+) , il suffit de tenir le raisonnement suivant : (+) ne peut pas être 1 car il est déjà placé dans la première colonne. Ce ne peut pas être 3 car il est déjà placé dans la première ligne. Ce ne peut être ni 0, ni 2, car ils sont déjà placés dans la diagonale. Donc, ce ne peut être que 4. Pour déterminer le nombre désigné par (X), un même raisonnement permet de trouver 3. Ainsi, de proche en proche on pourra remplir le damier G .

+	3			
	0			
		2		
1				X

G

X				
	4			
2	1	+		
				3

D

Carré D :

Pour déterminer le nombre désigné par (+), il suffit de suivre le raisonnement suivant : (+) ne peut être ni 2, ni 1, car ils sont déjà placés dans la troisième ligne. Ce ne peut être ni 4, ni 3, car ils sont déjà placés dans la diagonale. Donc, ce ne peut être que 0.
Pour déterminer le nombre désigné par (X) un même raisonnement permet de trouver 1.
Ainsi, de proche en proche on pourra remplir le damier D.

Voici ci-dessous les solutions de G et D.

4	3	1	2	0
2	0	4	3	1
3	1	2	0	4
0	4	3	1	2
1	2	0	4	3

G

1	0	3	4	2
3	4	2	1	0
2	1	0	3	4
0	3	4	2	1
4	2	1	0	3

D

41	30	13	24	02
23	04	42	31	10
32	11	20	03	44
00	43	34	12	21
14	22	01	40	33

(1)

La superposition de ces deux damiers donne le damier ci-contre. (1)
Ce damier contient vingt-cinq nombres en base cinq.
Si on code ces nombres en base dix, on obtient le damier ci-après. (2)

21	15	8	14	2
13	4	22	16	5
17	6	10	3	24
0	23	19	7	11
9	12	1	20	18

(2)

Nous obtenons un carré magique contenant les nombres de 0 à 24 sans répétition.

La somme des nombres en lignes, colonnes ou diagonales est partout égale à 60.

La raison en est simple. Si l'on fait la somme des nombres de la première ligne du tableau (1) on obtient : (41) + (30) + (13) + (24) + (02)
(Les parenthèses signifiant que cette somme est en base cinq).

La coder en base dix, revient à écrire :
$(4 \times 5) + 1 + (3 \times 5) + 0 + (1 \times 5) + 3 + (2 \times 5) + 4 + (0 \times 5) + 2$

En regroupant les termes facteurs de 5, on obtient :
$(4 + 3 + 1 + 2 + 0) \times 5 \quad + (1 + 0 + 3 + 4 + 2) = 60$

La première somme représente justement la somme des nombres de la première ligne du damier G, la deuxième somme représentant la somme des nombres de la première ligne du damier D.

Il est possible d'effectuer ce même calcul pour les autres lignes, les colonnes et les deux diagonales du tableau (1).

E.14.1 – ROTATION, NUMERATION ET CARRES MAGIQUES

Voici un jeu numérique équivalent au jeu E.13.1.

2	1		
	3		

G

Dans le damier ci-contre, on doit placer les nombres 0 - 1 - 2 - 3 , de telle sorte que dans chaque ligne, chaque colonne et chacune des deux diagonales, aucun d'eux ne soit répété. On obtient ainsi un damier que l'on désigne par G.

On fait tourner ce damier d'un quart de tour dans le sens des aiguilles d'une montre. On obtient un damier que l'on désignera par D . On superpose ces deux damiers dans un troisième damier que l'on désignera par (1) .

Dans chacune des cases de ce dernier damier, on obtient un nombre de deux chiffres, le chiffre de gauche provenant du damier G , celui de droite, de la case correspondante du damier D. Le damier (1) contient des nombres codés en base quatre.

Qu'obtient-on quand on code ce dernier en base dix ?

Et si on avait fait tourner le damier G dans le sens inverse des aiguilles d'une montre ?