AVEC DES CARRÉS BICOLORES

par Robert NEYRET

AVERTISSEMENT.

Ce qui suit est la synthèse d'un travail effectué au cours d'un stage de formation continue à l' E.N.G. de Grenoble pendant l'année scolaire 1976-77.

Au départ nous nous étions simplement fixé comme thème : que peut-on faire avec des carrés bicolores ? Nous avons retrouvé beaucoup d'idées dans le livre : «Un module parcourt l'espace» de EMPAIN.

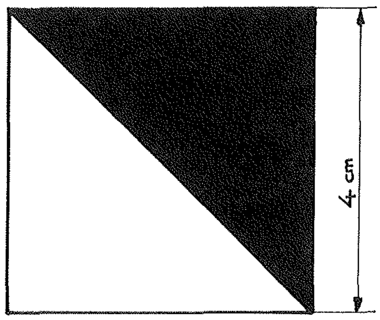
Nous nous sommes rapidement limités à une grille 4×4 qui sur le plan pédagogique présente l'intérêt d'avoir un nombre considérable de dispositions possibles, mais en même temps de n'avoir que seize dispositions ayant quatre axes de symétries.

Ce sont les symétries qui sont les plus apparentes dans la manipulation de ce matériel, mais d'autres transformations sont aussi sous-jacentes.

L'article commence par une étude combinatoire des différentes dispositions symétriques que l'on trouve, puis il indique ensuite comment nous avons utilisé ce matériel au niveau du CE_1 et au niveau du CM_2. Il envisage enfin quelques prolongements possibles.

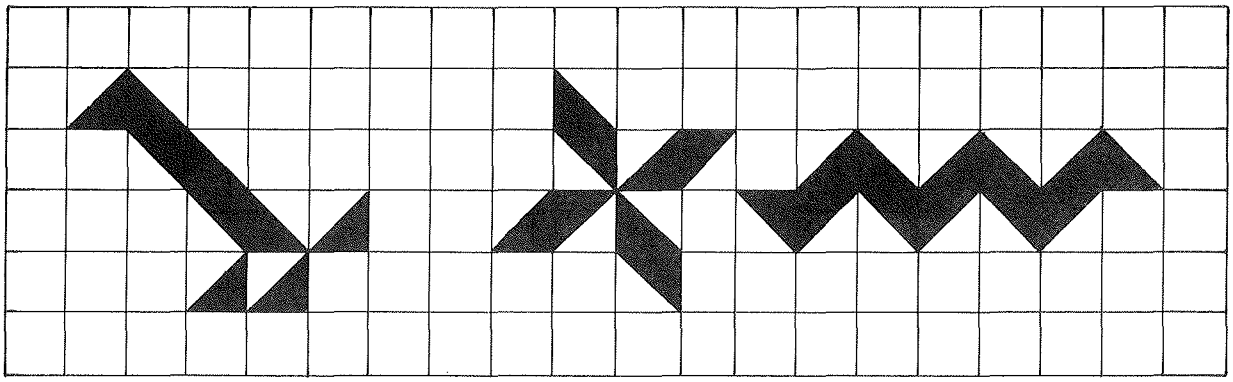
MATERIEL

On dispose d'une vingtaine de carreaux ayant deux couleurs comme ci-dessous.

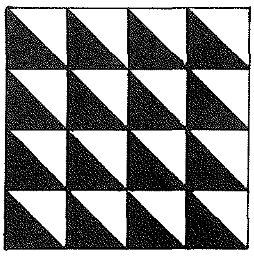


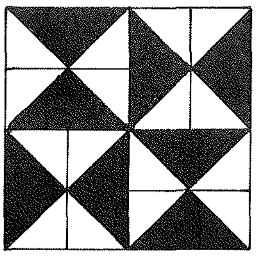
(Tous les dessins reproduits par la suite sont à l'échelle de 1/4)

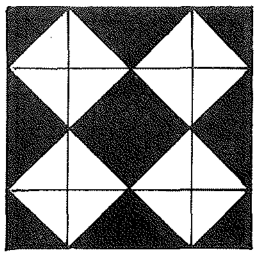
On peut dans un premier temps, les placer comme on l'entend afin de créer des formes, par exemple :



Dans un deuxième temps, on peut particulariser le problème et chercher à placer les carreaux dans une grille 4 X 4. On obtient diverses créations , par exemple :







C'est dans ce sens qu'a été conduite une séquence dans un CE_1

Au bout d'un moment, un certain nombre de questions ou de remarques ont été faites.

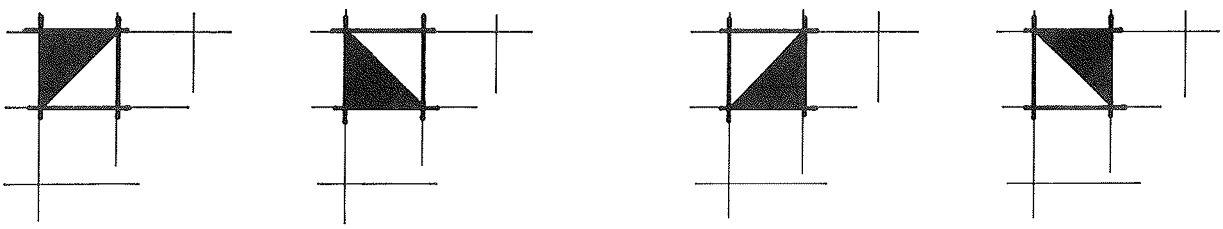
- il y en a beaucoup
- il y en a qui sont «jolis»
- il y en a qui sont «les mêmes» .

Nous avons approfondi chacune de ces remarques avec les stagiaires.

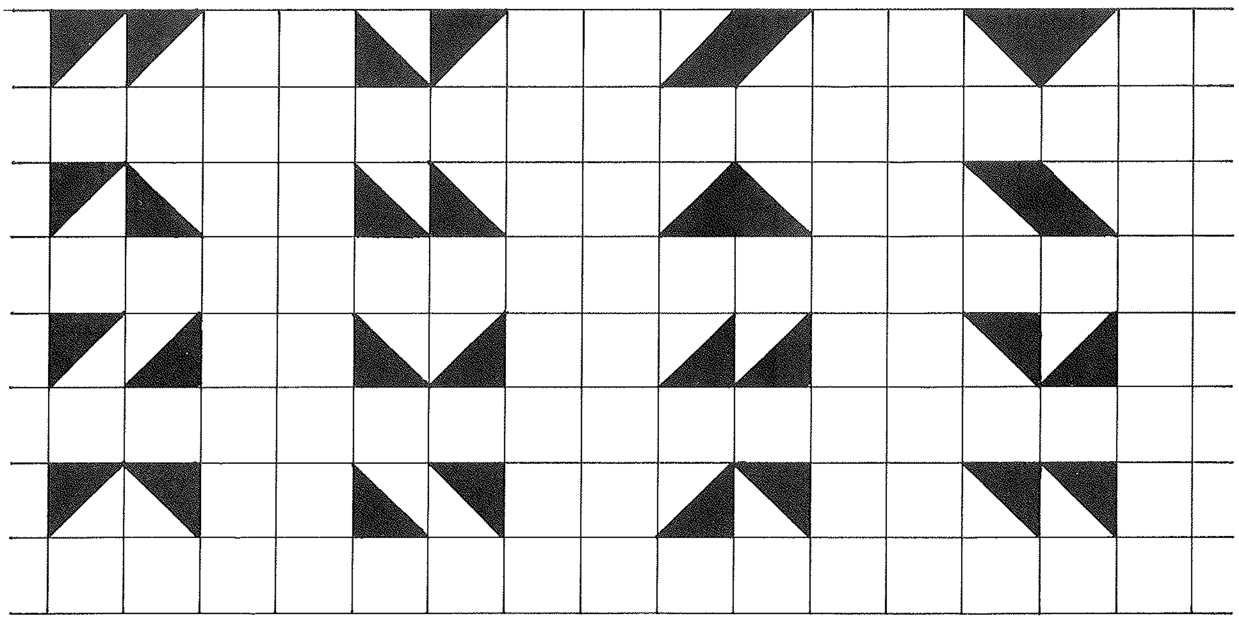
I – IL Y EN A BEAUCOUP

Il s'agit d'un problème de dénombrement intéressant. En effet il faut dénombrer toutes les configurations que l'on peut obtenir avec seize carreaux sur la grille 4×4 . Voyons le d'un peu plus près.

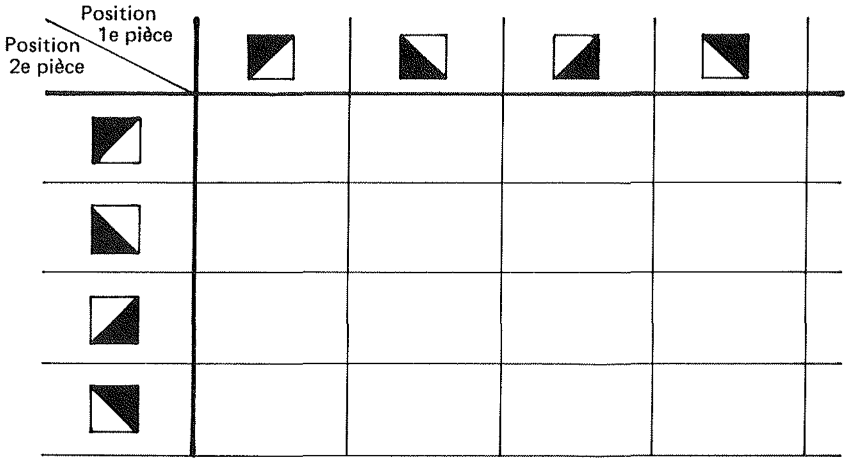
Il y a quatre façons différentes de poser un carreau sur une case de la grille.



Une fois le premier carreau posé il y a de nouveau quatre façons de poser un deuxième carreau, on obtient donc seize façons (4×4) de poser les deux carreaux.



Signalons qu'au cours de la recherche des différentes configurations possibles, certains stagiaires ont pensé à organiser leur recherche comme dans un tableau cartésien à double entrée :



Revenons à la grille 4×4 .

On peut continuer ainsi pour chacune des 16 cases. Le nombre de dispositions sera donc :

- pour une case $\quad 4$
- pour deux cases $\quad 4 \times 4 = 4^2$
- pour trois cases $\quad 4 \times 4 \times 4 = 4^3$

....

- pour seize cases $\quad \underbrace{4 \times 4 \times \ldots\ldots\ldots \times 4}_{16 \text{ fois}} = 4^{16}$

Il est intéressant de calculer ce nombre en utilisant la manière suivante :

$$4^2 = 4 \times 4 = 16$$

$$4^4 = (4^2)^2 = 16^2 = 256$$

$$4^8 = (4^4)^2 = (256)^2 = 65\,536$$

$$4^{16} = (4^8)^2 = 4\,294\,967\,296$$

On obtient le nombre impressionnant de :

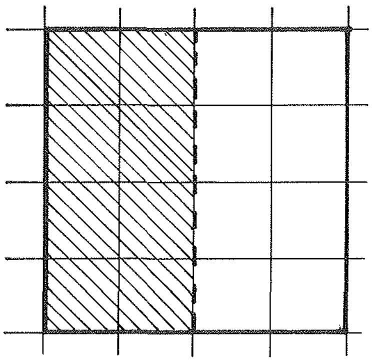
4 milliards 294 millions 967 milles 296 pavages du quadrilatère 4×4 !!!

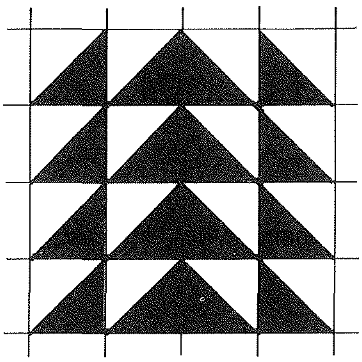
II – IL Y EN A QUI SONT «JOLIS»

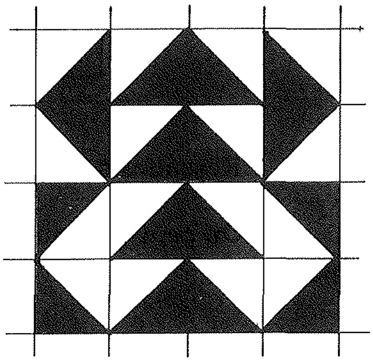
Dans la masse des productions possibles, certaines apparaissent plus souvent que d'autres : ce sont des productions qui possèdent au moins un axe de symétrie ou le centre de la grille pour centre de rotation.

Etudions-les de plus près.

2.1 - Figures symétriques par rapport à une seule médiane.



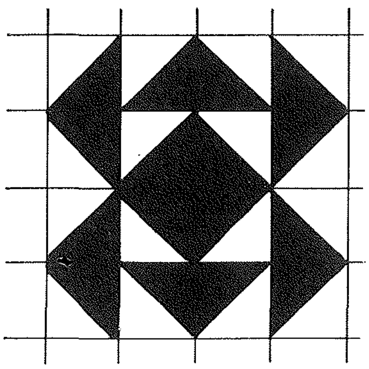


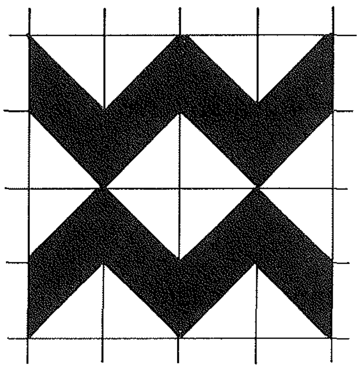


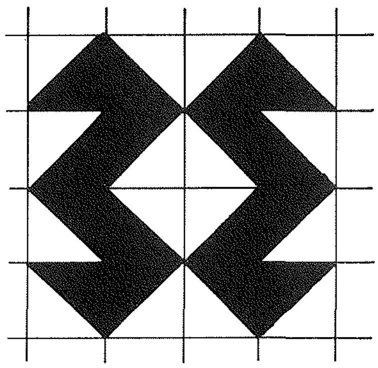
On voit en fait qu'il suffit de connaître la position des 8 carreaux sur la partie hachurée du carré pour savoir le nombre total de figures symétriques par rapport à une seule médiane , c'est-à-dire : $4^8 = 65\ 536$

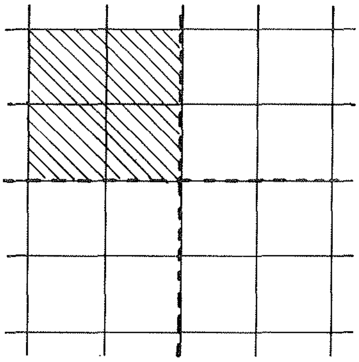
On trouvera évidemment autant de figures symétriques par rapport à la deuxième médiane, c'est-à-dire 65 536

2.2 - Figures symétriques par rapport aux deux médianes .





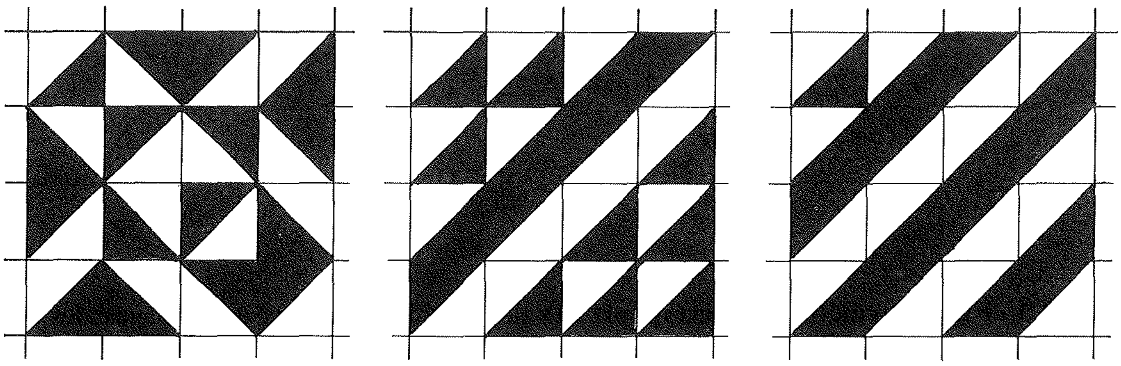


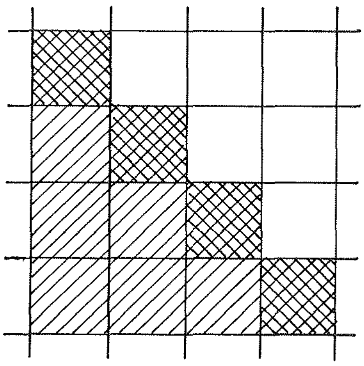


Cette fois la connaissance de la position de quatre carreaux sur la partie hachurée suffit pour déterminer une figure symétrique par rapport aux deux médianes.

Il y en a donc : $4^4 = 256$

2.3 - Figures symétriques par rapport à une diagonale.





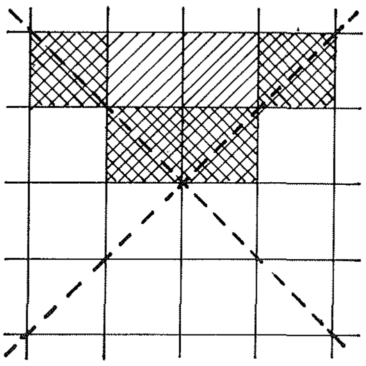
La connaissance de la position des 6 carreaux sur la partie hachurée et des carreaux situés sur la diagonale permet de déterminer une figure symétrique par rapport à une diagonale :

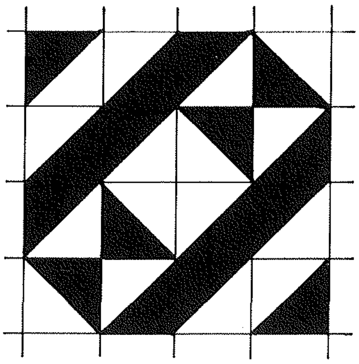
- sur un carreau hachuré 4 possibilités
- sur un carreau quadrillé 2 possibilités .

donc finalement :

$$\underbrace{4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4}_{6 \text{ fois}} \times \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2}_{4 \text{ fois}} = 4^8 = 65\,536$$

2.4 - Figures symétriques par rapport à deux diagonales.

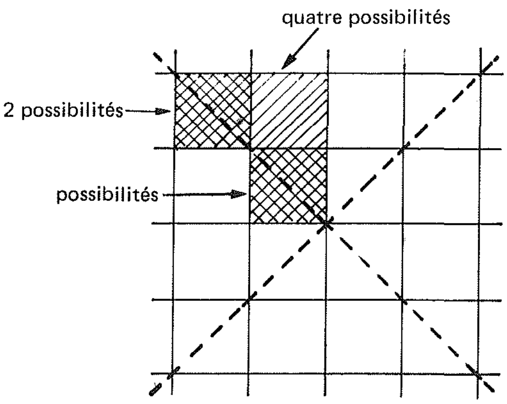




De même façon que précédemment on montre qu'il y a 256 possibilités

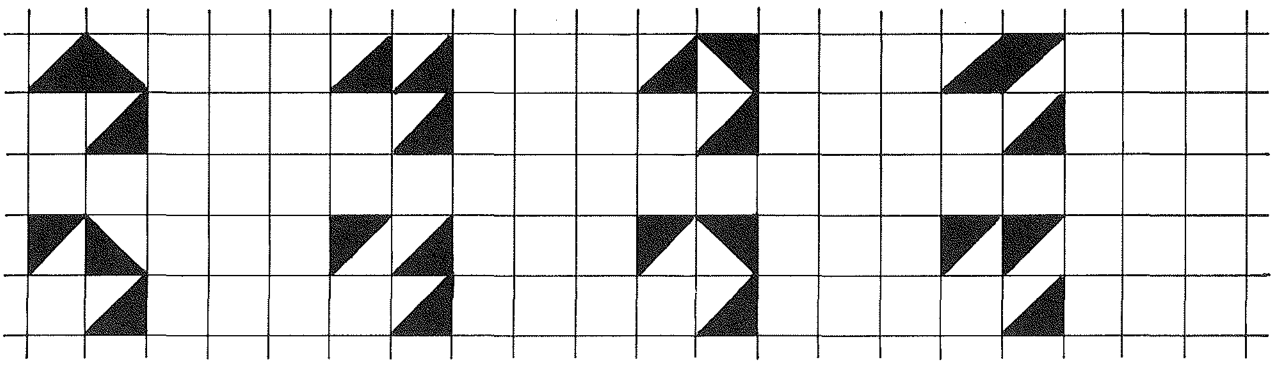
car $\underbrace{4 \times 4}_{2 \text{ fois}} \times \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2}_{4 \text{ fois}} = 4^4 = 256$

2.5 - Figures symétriques par rapport aux deux médianes et aux deux diagonales.



Une analyse identique aux précédentes montre que la connaissance de la position de 3 carreaux sur 3 cases suffit pour déterminer toutes figures ayant quatre axes de symétries.

Il y a donc 16 ($4 \times 2 \times 2$) figures que l'on peut dessiner systématiquement en choisissant une méthode qui a été mise en évidence pour les huit premiers dessins.

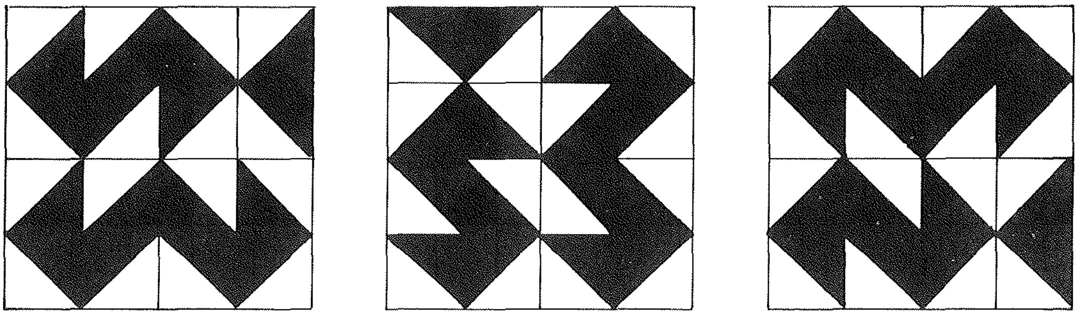


III – IL Y EN A QUI SONT «LES MEMES»

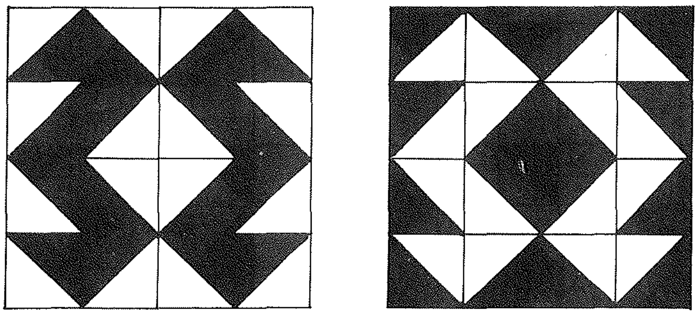
C'est un problème constant que l'on retrouve à l'école élémentaire. Deux représentations qui se déduisent par rotation ou par symétries droites sont-elles distinctes ou sont-elles les mêmes ? Nous avions déjà vu ce problème au sujet du Tangram (voir GRAND N n° 12).

Chaque fois ce sujet mérite discussion : en général deux configurations qui se déduisent par rotation sont appelées par les enfants les mêmes (*) tandis que deux configurations qui se déduisent par une symétrie droite sont considérées comme différentes.

Exemple :



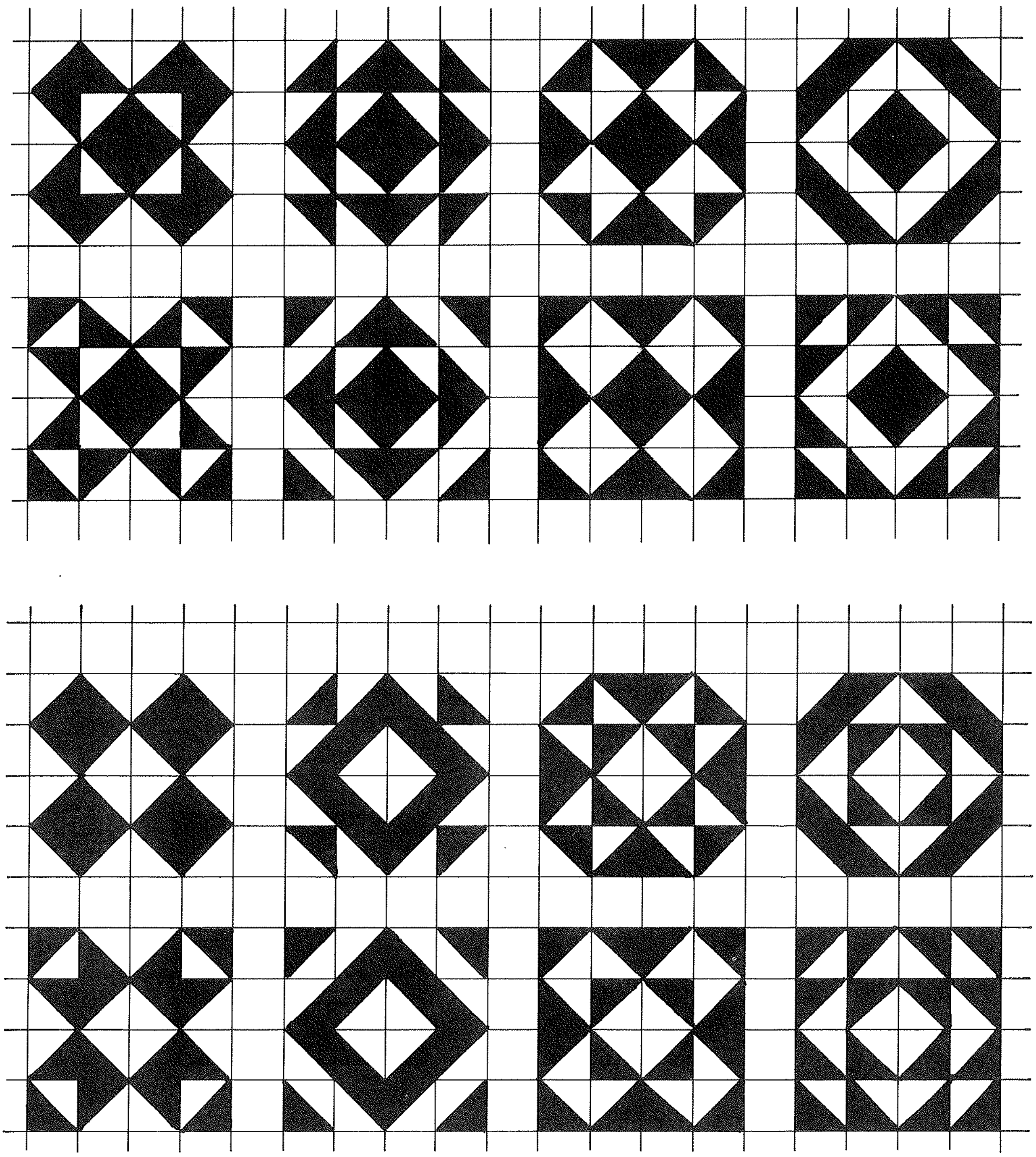
De plus le matériel permet d'obtenir des figures qui sont «presque les mêmes» : celles qui se déduisent l'une de l'autre par changement de couleur (voir exemple ci-dessous). On peut dire que l'une est le «négatif» de l'autre.



Or ceci n'échappe pas aux enfants comme en témoignent les recherches effectuées par certains.

(*) Dans le dénombrement précédent, elles ont été considérées comme différentes.

On obtient les seize figures suivantes :



QUELQUES APPLICATIONS AU NIVEAU PEDAGOGIQUE.

Niveau CE_1

L'essentiel au niveau d'un CE_1, est de faire manipuler les enfants et ensuite de leur faire représenter leurs réalisations. C'est pourquoi nous avons suivi la démarche suivante :

a) Manipulation libre : les enfants découvrent des propriétés en assemblant leurs carreaux (par exemple, on peut faire un carré 4×4 avec 6 carreaux).

b) On propose un modèle réalisé sur une grille 4×4 de 16 centimètres de côté. Les enfants doivent le reproduire avec leurs carreaux.

c) Les enfants créent un assemblage, puis le représentent sur une grille vide.

Nous avions prévu de faire travailler ensuite les enfants en leur fournissant des grilles vides 4×4 (de 8 cm de côté). Mais nous n'avons pas eu le temps de le faire. Nous pensons que c'est une activité importante notamment en éveil.

Niveau CM_2

Nous avons utilisé dans deux CM_2 le même matériel :

Dans le premier CM_2

Les enfants créent des configurations 4×4 puis représentent leurs réalisations sur du papier quadrillé, les découpent et disposent ainsi de cartes.

La séquence prend alors une direction imprévue : les enfants veulent absolument «jouer» avec les cartes et en particulier commencent à jouer à la bataille. cela les amène à définir un certain nombre de critères :

- ordre sur les couleurs : une couleur sera dite «plus forte» que l'autre.

- ordre sur les cartes d'une même couleur : une carte sera dite plus forte qu'une autre si elle a un nombre supérieur de carrés, de triangles, etc...

Les enfants sont invités à rédiger la règle du jeu et la séance s'arrête là.

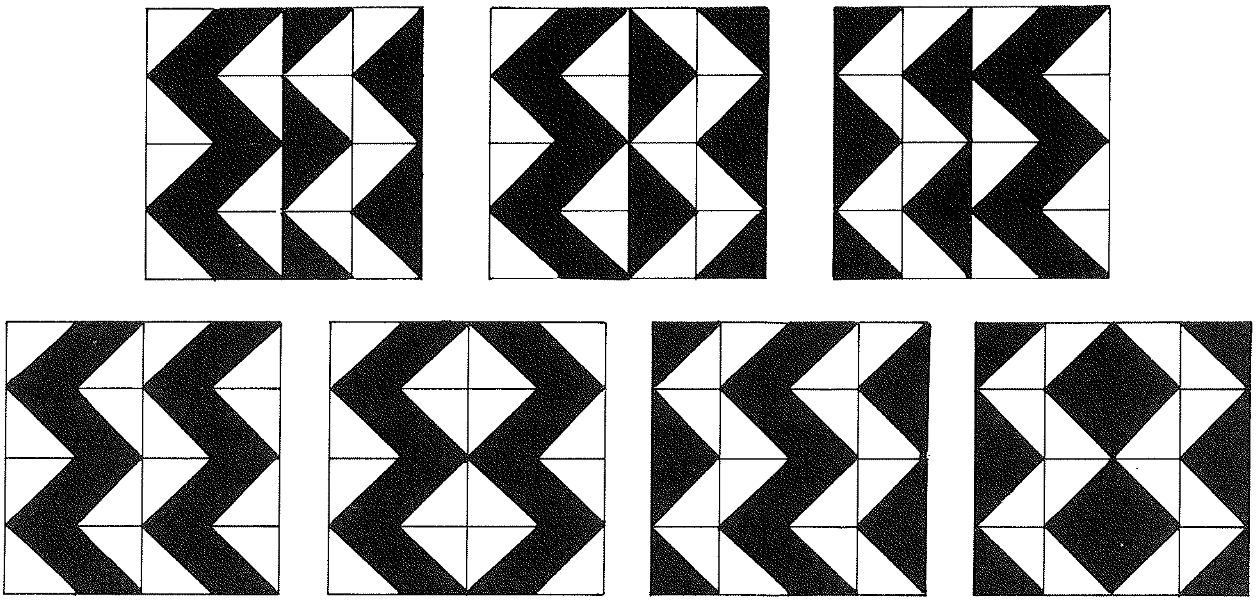
Au cours de la séquence suivante, les enfants sont répartis en groupes et bien qu'ils aient envie de continuer à jouer comme la fois précédente, nous les invitons à classer les cartes parce que nous nous étions fixés comme objectif l'étude des propriétés géométriques. Cependant il serait souhaitable de laisser jouer les enfants plus longtemps avec le matériel fabriqué (par exemple au jeu de la bataille) ce qui n'était pas possible dans le cadre de ce stage.

Les mêmes critères que précédemment (nombre de carrés, nombre de triangles.....) apparaîssent. Puis dans un groupe, certains enfants commencent à mettre à part certaines figures qui présentent des symétries : l'idée est valorisée par le maître et les enfants s'orientent sur la recherche des axes de symétrie ; pour beaucoup il est nécessaire d'effectuer des pliages correspondants. A la fin de la séance, une synthèse est faite au tableau : les enfants classent leurs cartes, suivant qu'elles ont 0, 1, 2 ou 4 axes de symétrie.

Dans le deuxième CM_2

Après la fabrication des carreaux, les enfants pouvaient les coller sur une grande feuille de papier : certains motifs (nuages, carrés,..... etc.) sont apparus.

Ensuite le maître a restreint la recherche à une grille (4 X 4) : les enfants travaillent uniquement au niveau du dessin. Nous remarquons que certains font des «variations» sur un même thème , obtenant les carrés suivants :



Cette idée est exploitée ensuite par toute la classe. Certains enfants amorcent l'utilisation de rotation en partant d'un quart de figures.

On voit donc que ce matériel se prête bien à une utilisation intuitive de diverses transformations géométriques : symétries, translations, rotations. La possibilité de jouer avec les négatifs (de toute une figure ou d'une partie seulement) est largement exploitée par les enfants.

On trouvera sur les pages suivantes des photographies de travaux réalisés à partir d'une autre sorte de carreau, dessiné ci-contre.