LA MODÉLISATION EN MATHÉMATIQUES : UN LEVIER PÉDAGOGIQUE POUR DONNER DU SENS AUX APPRENTISSAGES, SUSCITER DU PLAISIR ET MOTIVER LES ÉLÈVES L'EXEMPLE DES IMPÔTS

Pierre ARNOUX[1]
IRES d'Aix-Marseille

Véronique LE PAYEN POUBLAN[2]
IRES d'Aix-Marseille

Résumé. Cet article interroge la place des activités de modélisation dans l'enseignement des mathématiques au lycée. À travers des exemples concrets, il montre comment ces activités permettent de redonner du sens et du plaisir à la pratique mathématique, tout en préservant la rigueur et la solidité des savoirs enseignés.

Mots-clés. Modélisation, problème ouvert, mathématiques incarnées, sens, pente, fonction des impôts.

Introduction : modèles, sens, abstraction et formalisation

Le problème du sens en mathématiques n'est pas neuf. Dès la fin du XIX^e siècle et au début du XX^e siècle, un courant pédagogique, porté par des mathématiciens et des réformateurs de l'éducation comme Félix Klein en Allemagne ou Henri Poincaré en France, a mis en avant la nécessité de relier l'enseignement des mathématiques à des applications concrètes, afin de le rendre plus accessible et pertinent pour les élèves. Dans ce contexte, le mathématicien français Émile Borel plaidait pour un enseignement des mathématiques ancré dans le réel, soulignant la nécessité « d'introduire plus de vie et de sens du réel » afin que les élèves « se rendent compte par eux-mêmes que les mathématiques ne sont pas qu'une pure abstraction » (Borel cité par Gispert, 2014). Cette réflexion s'inscrivait dans un mouvement plus large de réforme de l'enseignement scientifique, marqué par des initiatives telles que la Commission internationale sur l'enseignement des mathématiques de 1908, impulsée par Félix Klein, qui visait à moderniser les programmes en les reliant aux besoins pratiques et industriels de l'époque, ainsi que par les travaux de l'École nouvelle, qui prônait un enseignement actif et ancré dans l'expérience des élèves. Ces approches visaient à rendre les mathématiques plus accessibles et pertinentes, en réponse aux transformations sociales et technologiques du début du XX^e siècle, tout en préparant les élèves à une utilisation éclairée des savoirs scientifiques dans leur vie future.

Près d'un siècle plus tard, cette préoccupation reste d'actualité et se traduit par une interrogation persistante chez les élèves, comme dans la société : « À quoi servent les mathéma-

[1] pierre@pierrearnoux.fr

[2] v.lepayen.poublan@gmail.com

tiques ? », interrogation qui en cache souvent une autre, peut-être plus fondamentale et plus dure à exprimer : « Quel est le sens de ce qu'on fait en mathématiques ? », car les élèves n'ont pas forcément une demande utilitariste.

Dans ce contexte, la modélisation mathématique peut apparaître comme une réponse à cette préoccupation. La compétence « modéliser » est d'ailleurs au cœur des programmes scolaires de mathématiques du cycle 2 jusqu'au lycée. Depuis la réforme du lycée de 2019, une nouvelle option est proposée aux élèves de terminale : l'option « Mathématiques Complémentaires ». Pour la suivre, les élèves doivent avoir suivi l'enseignement de spécialité de première ou, depuis septembre 2022, l'enseignement scientifique mathématique de première. L'organisation du programme de cet enseignement se fait autour de neuf thèmes d'études issus de divers domaines (sciences, économie…) et la modélisation est clairement mentionnée dans le Bulletin Officiel :

> *Les thèmes d'étude du programme proposent une approche nouvelle, avec des problèmes issus des autres disciplines ou internes aux mathématiques. Les compétences de modélisation et de communication sont particulièrement mises en valeur* (MENJ, 2019).

Il est assez explicite dans ce programme que l'enseignant doit s'appuyer sur les thèmes d'étude pour construire son enseignement et donc sa progression pédagogique. Plutôt que d'organiser l'apprentissage autour d'une progression par notions mathématiques, l'objectif est de structurer une progression thématique, où les concepts mathématiques sont introduits en réponse à une problématique issue de divers domaines tels que l'économie, la physique ou la biologie. Cette approche permet un ancrage des mathématiques dans des contextes concrets et favorise des interactions entre les disciplines. Elle contribue ainsi à une cohérence des apprentissages et facilite l'accès aux concepts abstraits pour les élèves.

En France, comme dans de nombreux autres systèmes éducatifs, l'enseignement des mathématiques peut s'appuyer sur différentes approches pédagogiques. Certains enseignants plaident pour un enseignement qui met l'accent sur la compréhension et l'application des concepts, au-delà de la simple mémorisation des formules et procédures ; d'autres insistent sur la nécessité d'acquérir d'abord une maîtrise rigoureuse des bases et des techniques mathématiques avant d'aborder des problèmes plus complexes. Selon cette dernière vision, le sens des mathématiques émerge naturellement de la solidité des fondements et de la capacité à résoudre des problèmes avec méthode. Ces approches ne sont pas incompatibles, et un équilibre est à rechercher entre compréhension conceptuelle et compétence procédurale.

C'est ce que nous avons cherché à faire dans les activités que nous vous présentons dans cet article. Elles ont été d'abord créées et testées dans le cadre de l'option « Mathématiques Complémentaires » puis, depuis trois ans, dans des classes de secondes, premières et terminales, tant en filières générales que technologiques. Elles s'inscrivent également dans une continuité avec certains enseignements universitaires, par exemple ceux dispensés en licence Sciences & Humanités à l'Université d'Aix-Marseille.

Au-delà de leurs aspects techniques, ces activités poursuivent un objectif principal : redonner du sens et de l'intérêt à la pratique des mathématiques, mais aussi et surtout du plaisir. Ce plaisir, moins souvent mis en avant dans les parcours scolaires, est pourtant un moteur essentiel de l'engagement des élèves en mathématiques. Comme le souligne Marie-France Vignéras dans Boccon-Gibod (2011), *« Les mathématiciens ont un plaisir fou. Quand vous faites des mathématiques, vous vous amusez beaucoup. Vous cherchez quelque chose qui est là. C'est à vous de le découvrir »* (p. 87). Cette citation met en lumière une dimension essentielle du travail mathématique : le plaisir de la recherche, de la découverte, de la résolution progressive. En proposant aux élèves des situations concrètes et ouvertes, comme celles issues de la modélisation, on les invite à adopter une posture d'explorateur — à « chercher quelque chose qui est là », et à éprouver la joie de le trouver par eux-mêmes. Ainsi, le plaisir devient un moteur d'engagement dans la tâche mathématique, et il facilite la dévolution du problème aux élèves. De plus, en confrontant les élèves à des problématiques réelles et en les amenant à réfléchir aux modèles proposés, elles stimulent leur esprit critique et illustrent la puissance des mathématiques comme outil d'analyse et de prise de décision, préparant ainsi les élèves à un usage éclairé des mathématiques dans leur vie de futur citoyen.

Avant de poursuivre avec des exemples explicites, il est essentiel de distinguer deux mots importants en mathématiques, et souvent confondus dans le discours : l'abstraction et la formalisation. La distinction entre ces deux termes n'est pas toujours évidente pour les élèves, ni parfois pour leurs enseignants.

Si on regarde l'étymologie du mot « abstraction », les élèves déduisent eux-mêmes que l'*abs-traction*, c'est le fait de *tirer à partir de* ; à partir de quoi ? Du concret, évidemment. Le concret n'est pas le contraire de l'abstrait, mais son origine. L'abstraction en mathématiques consiste donc à identifier et à isoler les caractéristiques essentielles d'un problème, en ne gardant que ce qui permet de les généraliser pour les appliquer à divers contextes ; c'est une action, et l'abstrait est le résultat de cette action. Par exemple, les pourcentages permettent de représenter de manière universelle le rapport d'une grandeur à une autre prise comme unité ; c'est en fait une fraction particulière, et 20 % est une écriture conventionnelle de la fraction $\frac{20}{100}$, ou encore 0,2. Écrire un nombre comme pourcentage sous-entend qu'il ne s'agit pas d'une grandeur, mais d'un nombre pur, c'est-à-dire d'un rapport de deux grandeurs du même type. Dans le cas particulier où ce pourcentage représente une partie d'un tout, il est compris entre 0 et 100 (ou, mieux, entre 0 et $1 = 100\,\%$!), mais d'autres cas sont possibles, comme on le verra . Dans les programmes scolaires, on commence par travailler sur des exemples précis de proportionnalité, puis on généralise à d'autres situations pour arriver au fait que les pourcentages permettent de transcender les détails spécifiques d'un problème et de se concentrer sur les relations entre les grandeurs, facilitant la compréhension et l'analyse des données ; c'est un exemple typique d'abstraction.

En mathématiques, la formalisation signifie l'utilisation de systèmes symboliques et de règles précises pour exprimer et manipuler ces symboles. Il s'agit de la structure logique et de la syntaxe qui permettent de formuler des théories mathématiques de manière rigoureuse et non ambiguë. Une formalisation complète permet de travailler sur les symboles de façon purement syntaxique, sans utiliser la sémantique. Cela a le grand avantage de permettre la mise au point d'algorithmes efficaces (ce qui est très utile, et spécialement intéressant pour un ordinateur) ; mais cela a aussi le très grave inconvénient d'évacuer le sens, et avec lui, les moyens de contrôle sur le résultat des calculs. Par exemple, l'algèbre utilise des symboles et des équations pour représenter des relations et des opérations.

Lorsqu'on modélise en mathématiques, on utilise à la fois l'abstraction et la formalisation. Ces deux processus sont intrinsèquement liés et souvent réalisés de manière itérative. Quand on travaille sur un problème ou une situation, on peut commencer par abstraire une idée pour en comprendre l'essentiel, puis la formaliser pour la simplifier et la structurer. Ensuite, on peut revenir à l'abstraction pour affiner ou généraliser davantage. Il n'y a pas d'ordre strict entre les deux ; ils se complètent et s'enrichissent mutuellement. C'est le cas en particulier dans une activité de modélisation. Blum et Leiß (2005) proposent un cycle de modélisation, repris en français par Hankeln et Hersant (2020). Ce cycle se décompose en sept étapes, ce qui permet de détailler plus finement les différents processus mis en jeu : définition du problème, collecte de données, prétraitement des données, sélection du modèle, validation du modèle, ajustement du modèle, interprétation. Il est évident que les deux actions d'abstraire et de formaliser sont nécessaires à plusieurs étapes de ce cycle. Elles permettent à partir d'une situation réelle de construire des théories mathématiques applicables, tout en simplifiant l'approche de concepts complexes.

Notre démarche est d'introduire les notions fondamentales du programme scolaire en nous appuyant sur des situations réelles bien choisies. C'est ce que nous avons cherché à appliquer dans les activités proposées aux élèves. Parmi celles-ci, nous avons choisi de vous présenter la séquence pédagogique sur la fonction des impôts sur le revenu. Au-delà de l'aspect technique, l'objectif est ici d'inviter les élèves à explorer une réalité sociale et économique concrète et d'en faire émerger les objets mathématiques sous-jacents. En créant des échanges entre le réel et le formalisme mathématique, nous ouvrons un espace propice au questionnement : comment représenter la progressivité de l'impôt ? À partir de quand devient-il « injuste » ? Peut-on concevoir un système fiscal plus équitable ? Autant de questions qui ne possèdent pas de réponse unique, mais qui obligent à formuler des hypothèses, à tester des modèles et à affiner des raisonnements.

En mobilisant des outils variés (fonctions continues par morceaux, dérivées, tableaux, représentations graphiques, échelle logarithmique…), ces situations redonnent aux mathématiques leur caractère vivant et expérimental. Le plaisir ne réside plus dans la simple bonne réponse, mais dans l'acte même de chercher et de comprendre. On passe alors d'une logique de solution à une logique de sens. Cela présente un intérêt pour les élèves, tout en mettant en lumière la diversité des objectifs de la discipline scolaire « mathématiques », qui inclut à la fois le développement de la réflexion et la maîtrise des outils de calcul.

Il faut aussi signaler que ce travail conduit à un saut conceptuel : les élèves voient initialement l'impôt comme un nombre (toujours trop élevé), mais le travail mené leur permet de réaliser qu'il s'agit d'un algorithme (qui calcule l'impôt en fonction du revenu), et donc d'une fonction, dont les propriétés (continuité, croissance, convexité…) ont un sens, permettent de préciser les problèmes, et peuvent être étudiées, ce qui permet de répondre à diverses questions. Si l'on veut comparer les impôts entre plusieurs pays, ou plusieurs années, ce point de vue est essentiel.

Mais pour amorcer ce travail sur les impôts, il est nécessaire de s'appuyer sur une notion fondamentale : les pourcentages, et leur lien avec la pente d'une droite et le coefficient de proportionnalité d'une fonction affine, parfois appelé, dans les manuels, coefficient directeur de la fonction, par assimilation à la droite qui en est la représentation graphique.

1. – L'escalier du lycée comme laboratoire mathématique : entre angle, pente et pourcentage

Comment un simple escalier peut-il devenir le point de départ d'une activité mathématique ? En partant d'une idée concrète, la pose de panneaux de signalisation dans les escaliers du lycée, les élèves sont amenés à questionner le sens du mot « pente » à travers différents registres : la pente d'une droite, le coefficient directeur d'une fonction affine, la tangente d'un angle dans un triangle rectangle, ou encore l'expression d'un pourcentage. Ces notions bien que liées sont souvent abordées séparément dans les programmes scolaires : chapitres différents mais aussi moments différents dans le cursus des élèves. L'un des objectifs de cette activité est donc de permettre aux élèves de tisser des liens entre ces notions et d'enrichir leur compréhension.

Le point de départ est le suivant :

« Quelle est la signification des panneaux ci-contre ? »

Figure 1

Figure 2

« Et celui-là ? Qu'en pensez-vous ? »

Figure 3

La réponse généralement donnée par les élèves est que ce panneau est impossible car on ne peut pas avoir une pente à 90°. Cette erreur vient d'une confusion entre le pourcentage de pente et l'angle d'inclinaison. Les élèves entendent « 90 % » et l'associent immédiatement à « 90° » parce qu'ils savent qu'un angle droit mesure 90°, donc 90 égal « vertical » pour eux. Ils n'ont pas encore construit la signification d'un pourcentage de pente comme un rapport de longueurs $\left(\frac{\textit{hauteur}}{\textit{longueur horizontale}}\right)$, et non un angle. Cela traduit une non-différenciation des grandeurs : il n'y a pas de distinction entre un pourcentage (mesure sans unité) et un angle (mesure en degrés).

Une autre source de confusion vient d'une définition erronée (mais rationnelle !) de la pente comme rapport entre le dénivelé et la distance parcourue (au lieu de la distance horizontale parcourue). En termes de collège : $\frac{\textit{côté opposé}}{\textit{hypoténuse}}$, ou en terme de lycée, sinus au lieu de tangente ; cette erreur est d'autant plus fréquente qu'elle est inoffensive en pratique pour de petites valeurs. Quand on fait le dessin, les élèves voient qu'ils ont pris comme définition de la pente comme sinus de l'angle, et non comme tangente et, dans ce cas, il est tout à fait logique qu'elle ne puisse dépasser 1 ! Une courte enquête les convainc rapidement que ce n'est pas la définition adoptée de la pente, y compris dans les travaux publics. Une pente de 100 % correspond en fait à une tangente de 1, soit un angle de 45°. Une pente de 90 % correspond à un angle d'environ 42°. L'idée que la tangente d'un angle est une mesure de pente est le lien-clé entre géométrie et modélisation réelle. Elle montre une difficulté à revenir à la définition trigonométrique de la tangente dans un triangle rectangle : $tan(\alpha)=\frac{hauteur}{base}$, donc $tan^{-1}(0{,}90)\approx 42\,°$. Certains élèves disent aussi : « 90 %, c'est presque 100 %, donc c'est presque vertical ». Ici, le pourcentage est interprété de façon intuitive ou imagée (comme si on disait « c'est à 200 à l'heure ! » pour dire « c'est rapide »). C'est le signe que la grandeur « pente » n'a pas encore été stabilisée comme concept, et qu'on est encore dans une approche intuitive.

Ce type d'erreur est une opportunité précieuse pour introduire le lien entre tangente, pourcentage et angle. C'est le point de départ pour notre activité. Sortons de la salle de classe et dirigeons-nous vers les escaliers du lycée !

Les élèves sont invités à mesurer la pente des escaliers de leur lycée pour créer un panneau de signalisation. Ils commencent par formuler des hypothèses. Ils effectuent ensuite des mesures à l'aide d'outils simples comme des mètres rubans et des rapporteurs. Ces mesures vont leur permettre de calculer la tangente de l'angle d'inclinaison et de déterminer le pourcentage de pente.

Figure 4 *: Les élèves effectuent des mesures pour déterminer la pente de l'escalier.*

Mais pour y parvenir, ils doivent mettre en relation des notions de trigonométrie élémentaire, notamment la tangente et les propriétés des triangles rectangles, les pourcentages et le coefficient directeur d'une fonction affine.

L'activité intègre donc plusieurs types de représentations :

- géométrique : les élèves dessinent des schémas des escaliers et prennent des mesures ;
- graphique : ils représentent la fonction associée et sa pente ;
- numérique : ils manipulent des valeurs et des pourcentages ;
- symbolique : ils utilisent des formules et des équations pour leurs calculs.

Le passage d'une représentation à une autre aide les élèves à mieux comprendre les concepts mathématiques en jeu.

Un autre aspect important de cette activité est la communication. Les élèves doivent justifier leurs choix. Ils conçoivent un support visuel clair (leur panneau) et présentent leurs raisonnements de manière structurée, à l'écrit et/ou à l'oral.

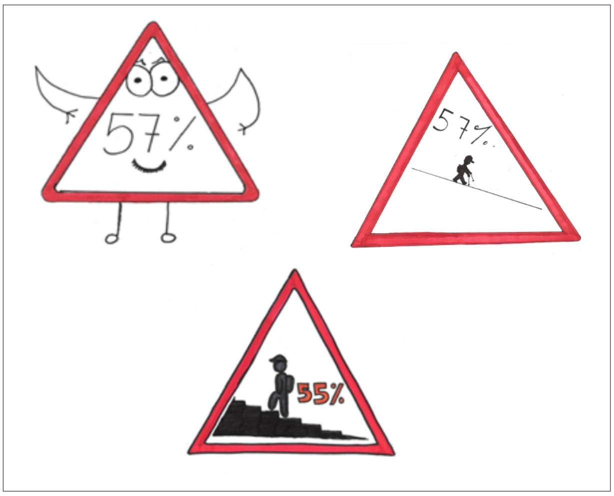


Figure 5 *: Panneaux réalisés par les élèves.*

Après avoir étudié la pente des escaliers de leur lycée, les élèves sont invités à rechercher la piste de ski la plus pentue et la rue la plus pentue au monde.

Pour chaque exemple trouvé, les élèves calculent l'angle d'inclinaison correspondant. Ils utilisent les mêmes outils trigonométriques : la tangente et les propriétés des triangles rectangles. Cette étape leur permet de comparer les pentes des escaliers de leur lycée avec celles de ces exemples extrêmes.

Ensuite, les élèves représentent des fonctions affines dont le coefficient directeur est égal à la pente calculée. Le travail est fait sur du papier quadrillé afin de retravailler la détermination graphique du coefficient directeur d'une fonction affine. Cette étape permet de visualiser concrètement l'inclinaison et de comprendre qu'une pente de 10 %, par exemple, est une montée forte sur le terrain (à vélo par exemple) mais apparemment très légère sur le papier : monter d'un carreau tous les 10 carreaux.

Pour conclure l'activité, les élèves reviennent sur le panneau de danger initial avec une pente de 90 %. En calculant l'angle réel correspondant à une pente de 90 %, ils réalisent que cette inclinaison n'est pas verticale, contrairement à ce qu'ils pensaient initialement. Cette prise de conscience les amène à mieux comprendre la relation entre pourcentage de pente et angle d'inclinaison. En comparant cet angle avec ceux des exemples précédents, ils affinent leur compréhension des notions de pente, pourcentage et angle, et apprennent à éviter les confusions fréquentes.

Ce travail sur le lien entre pente et pourcentage constitue une étape essentielle avant d'aborder la fonction des impôts sur le revenu. En effet, cette fonction est affine par morceaux, et chaque segment possède un coefficient directeur exprimé en pourcentage. En maîtrisant la relation entre la pente et le pourcentage, les élèves sont mieux préparés à comprendre comment les taux d'imposition varient en fonction des tranches de revenus.

Il est maintenant temps de découvrir la fonction des impôts.

2. – Des escaliers du lycée aux impôts sur le revenu : transition entre géométrie et économie

Les fonctions d'une variable réelle sont omniprésentes dans notre environnement quotidien et ne se limitent pas aux mathématiques, mais trouvent également des applications dans de nombreux domaines, tels que l'économie, la physique ou les sciences sociales. Parmi ces fonctions, les fonctions continues et affines par morceaux constituent un type particulier, peu abordé dans les programmes du secondaire, mais particulièrement riche pour illustrer des concepts mathématiques complexes à travers des situations concrètes.

Nous avons choisi d'étudier la fonction utilisée pour le calcul de l'impôt sur le revenu en France, car elle offre une illustration pertinente de l'utilisation des mathématiques dans la vie quotidienne d'un citoyen. En effet, le calcul de l'impôt sur le revenu repose sur un barème progressif, où chaque tranche de revenu est soumise à un taux d'imposition différent.

Mathématiquement, cela se traduit par une fonction affine par morceaux, où chaque segment correspond à une tranche de revenu. Ce type de fonction est continue (il n'y a pas de « saut » entre les tranches), mais sa dérivée, qui représente le taux marginal d'imposition, est discontinue et présente des sauts aux points de changement de tranche. Cette propriété en fait un exemple concret et rare de fonction continue mais non dérivable en un nombre fini de points, ce qui permet d'aborder des notions avancées de manière accessible.

La pratique montre que, même dans les premières années du supérieur, et parfois jusqu'en L3, la notion de « fonction continue par morceaux » n'est pas acquise, et qu'à la place, beaucoup d'étudiants semblent conceptualiser, de façon floue, une famille de fonctions linéaires définies sur $\mathbb{R}$; la différence entre taux marginal et taux moyen n'est pas acquise non plus.

Cette séquence pédagogique se compose de trois activités et permet de mettre en œuvre des compétences mathématiques, mais également transversales.

La première activité aborde le calcul de l'impôt sur le revenu. Elle se déroule en deux temps : d'abord un travail de recherche en autonomie, puis un travail en classe pour comprendre comment fonctionne le calcul des impôts à partir de cas concrets. Dans cette activité, les élèves découvrent la notion de fonction continue, affine par morceaux. Ils découvrent aussi la fonction de taux marginal, qui est une fonction en escalier, dérivée de la précédente. On discute en particulier le mythe très répandu du saut du montant de l'impôt au moment du changement de tranche, et la différence entre le taux moyen et le taux marginal.

On commence par proposer aux élèves ce document, issu du site du gouvernement (*cf.* figure 6) :

Tableau - Barème progressif applicable aux revenus de 2024

Tranches de revenus	Taux d'imposition de la tranche de revenu
Jusqu'à **11 497 €**	**0 %**
De **11 498 €** à **29 315 €**	**11 %**
De **29 316 €** à **83 823 €**	**30 %**
De **83 824 €** à **180 294 €**	**41 %**
Plus de **180 294 €**	**45 %**

Le **taux marginal d'imposition** (TMI) est le taux d'imposition qui s'applique à la **tranche la plus élevée** de vos revenus.

Le **taux moyen d'imposition** est le taux moyen auquel vos revenus sont taxés. Il vous indique la **part que représente votre impôt dans vos revenus**.

Figure 6 *: Premier document : taux d'imposition par tranche (source : site du gouvernement).*

Puis on pose cette question aux élèves :

> *Vous gagnez 29 000 € et votre patron vous propose d'augmenter votre salaire de 100 euros par mois, devez-vous accepter ou refuser ?*

Cette question provoque toujours un vif débat dans la classe et la réponse majoritaire est souvent « non » car « on va forcément payer plus d'impôts ! » Les élèves voient qu'il y a un changement de tranches et donc un pourcentage qui augmente. Donc il faut refuser l'augmentation.

Afin de nourrir le débat, nous proposons un deuxième document aux élèves, toujours issu du site du gouvernement (*cf.* figure 7).

5. QUOTIENT FAMILIAL CORRESPONDANT À VOTRE NOMBRE DE PARTS ET BARÈME DE CALCUL DE VOTRE IMPÔT "I"

CALCULER LE QUOTIENT FAMILIAL DU FOYER EN APPLIQUANT LA FORMULE QUI SUIT	Q	=	R	÷	N	=	Q

R : Revenu imposable du foyer. N : nombre de parts

Q quotient familial	inférieur à 11 497 €	IMPÔT NUL								I	NUL
Q supérieur à 11 497 €	et inférieur à 29 315 €	IMPÔT ÉGAL À	(R	×	0,11)	−	(N	×	1264,67)=	I	
Q supérieur à 29 315 €	et inférieur à 83 823 €	IMPÔT ÉGAL À	(R	×	0,30)	−	(N	×	6 834,52)=	I	
Q supérieur à 83 823 €	et inférieur à 180 294 €	IMPÔT ÉGAL À	(R	×	0,41)	−	(N	×	16 055,05)=	I	
Q supérieur à 180 294 €		IMPÔT ÉGAL À	(R	×	0,45)	−	(N	×	23 266,81)=	I	

Figure 7 *: Deuxième document : formulaire de calcul de l'impôt.*

Les élèves appliquent les formules proposées et nous abordons alors avec eux la notion de revenu disponible après impôt. Ils réalisent alors que oui, la somme d'impôt à payer est plus importante, mais que la somme restante après déduction est plus élevée. Donc oui, il faut accepter l'augmentation !

Un aspect intéressant dans l'utilisation de ces deux documents est de montrer qu'il y a un décalage d'un euro entre les limites de tranches sur les deux documents. Mais tous les calculs d'impôts sont effectués en entiers, et le revenu imposable est toujours réduit à sa partie entière. En pratique, 29315,50 est réduit à 29315, et donc il n'y a pas de nombre entre 29315 et 29316. Les services d'impôts ont voulu éviter de proposer deux formules pour le point de transition. L'objectif est que le 1er document ait une plus grande lisibilité par le grand public. Mais d'un point de vue mathématique c'est le deuxième qui montre vraiment les points de discontinuité de la dérivée.

De plus, les nombres par lesquels on multiplie le nombre de parts, qui semblent être un peu « magiques » pour les élèves, sont justement calculés pour qu'il n'y ait pas de discontinuité. Pour leur faire réaliser qu'il n'y a pas de saut, on peut leur demander de calculer le montant des impôts quand on est pile sur la tranche. Ils voient alors que deux formules peuvent s'appliquer mais qu'elles donnent le même résultat. C'est ce qui permet de montrer la propriété de continuité par morceaux de la fonction. Il n'y a pas de saut, contrairement à une idée bien répandue chez nos concitoyens. À partir de cette formule et de la définition des tranches, on travaille également le taux marginal et la fonction dérivée de la fonction des impôts. C'est cette fonction qui est discontinue et qui a des sauts. Il est important de faire représenter ces deux fonctions par les élèves. Cela leur permet de retravailler le lien entre fonction et dérivée. On a ici, ce qui n'est pas si fréquent dans les programmes du secondaire, un exemple concret et rare de fonction partout continue, mais non dérivable en un nombre fini de point. Cette discontinuité, perçue de façon erronée par la plupart des gens avec une confusion entre taux moyen et taux marginal, explique beaucoup de fausses conceptions sur les impôts. Cette première activité provoque beaucoup de questionnement chez les élèves qui montrent un réel intérêt pour comprendre « comment ça marche ? ».

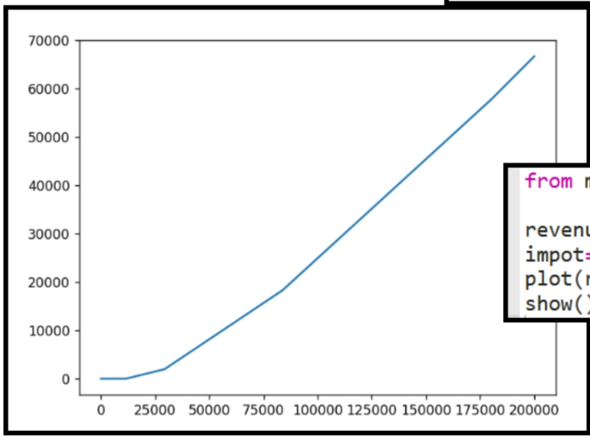
En terminale, on peut faire remarquer que, puisque la fonction « taux marginal » T est la dérivée de la fonction « impôts » I, alors la fonction I est une primitive de T : c'est la primitive qui s'annule en 0. Elle est donc continue, comme primitive d'une fonction bornée, et même de dérivée toujours inférieure à 1. La fonction « revenu disponible » D, définie par $D(R)=R-I(R)$, est donc aussi continue, et strictement croissante, ce qui est la réponse à la question du changement de tranche. On peut signaler que ces propriétés de continuité et de convexité ne sont pas respectées dans tous les pays : le système anglais d'impôt sur le revenu n'est ni convexe, ni même continu. Cela donne aussi une occasion naturelle de manipuler des fonctions qui ne s'appellent pas f, d'une variable qui ne s'appelle pas x, ce qui peut être utile !

Ensuite, les déclarations d'impôts se faisant essentiellement en ligne maintenant, il nous paraissait pertinent de créer une deuxième activité utilisant l'outil informatique. Il est donc proposé aux élèves de construire une fonction *Python* qui prend en paramètre le revenu imposable et le nombre de parts et qui calcule le montant de l'impôt. C'est une fonction simple qui utilise uniquement des instructions conditionnelles et la notion de liste. Ils programment ensuite une deuxième fonction pour tracer la représentation graphique. Il est possible de le faire très simplement avec une liste de coordonnées.

```python
from math import*

def calcul_impot(N,R):
# N  représente le nombre de parts et R le revenu imposable net.
    Q=R/N
# Q est le quotient familial
    if Q<11497:
        return ('il n"y a pas d"impôt à payer')
    elif Q>=11497 and Q<29315:
        I=R*0.11-N*1264.67
# I est le montant de l'impôt
    elif Q>=29315 and Q<83823:
        I=R*0.30-N*6834.52
    elif Q>=83823 and Q<180294:
        I=R*0.41-N*16055.05
    else:
        I=R*0.45-N*23266.81
    return I
```

```
Python 3.12.1 (main, Nov 15 2024 14:17:00)
Type "help", "copyright", "credits" or "license" f
>>> # script executed
>>> calcul_impot(2.5,15226)
'il n"y a pas d"impôt à payer'
>>> calcul_impot(2,150000)
31330.96
>>>
```




```python
from matplotlib.pyplot import *

revenu=[0,11497,29315,83823,180294,200000]
impot=[0,0,1959.98,18312.38,57865.49,66733.19]
plot(revenu,impot)
show()
```

Figure 8 *: Fonctions en Python : calcul de l'impôt selon la tranche, et représentation graphique de l'impôt en fonction du revenu.*

L'intérêt de cette activité est aussi de retravailler la notion de fonction, tant du point de vue mathématique (une fonction associe à chaque valeur d'entrée une valeur de sortie bien définie) que du point de vue informatique (une fonction est un bloc de code réutilisable qui ne renvoie pas forcément une valeur numérique). Cette activité ne pose en général pas de difficultés particulières aux élèves et elle permet encore une fois de visualiser la propriété de continuité de la fonction.

Enfin, la dernière activité propose une approche plus historique en étudiant l'évolution de l'impôt sur le revenu, exprimé en pourcentage du revenu net imposable, des années 1970 à aujourd'hui. L'objectif principal est de les amener à réfléchir de manière critique et nuancée à certaines idées reçues sur les impôts notamment celle selon laquelle « on paie toujours plus d'impôts en France ! ».

Dans cette activité, les élèves travaillent en groupes et choisissent un ménage type, parmi la liste proposée. Partant de la situation actuelle avec un certain revenu, ils remontent dans le temps jusqu'aux années 1970. Il est préférable de partir d'aujourd'hui pour remonter dans le temps afin que les élèves se rendent compte de la valeur des revenus manipulés. Cette activité met en jeu de nombreuses compétences transversales et peut se faire en lien avec un collègue de Sciences économiques et sociales. En effet, il est nécessaire de convertir les francs en euros et d'aborder le concept d'euro constant. C'est un concept économique qui permet de comparer les montants monétaires de différentes années en les ajustant pour tenir compte de l'inflation. En d'autres termes, il s'agit d'exprimer les montants passés en euros d'aujourd'hui, ce qui permet de voir la valeur réelle des revenus et des impôts sans la distorsion causée par la hausse générale des prix au fil du temps. Il existe de nombreux sites internet qui permettent de faire ses conversions.

Les élèves utilisent également le tableur pour faire les calculs et les représentations graphiques.

Part de l'impôt en % du revenu net imposable	1975	1985	1995	2000	2010	2022
Ménage1	34,06 %	35,46 %	34,42 %	31,44 %	19,57 %	19,87 %
Ménage2	2,19 %	0,00 %	6,15 %	9,22 %	1,81 %	0,00 %
Ménage3	9,10 %	6,94 %	11,87 %	9,22 %	3,97 %	3,50 %
Ménage4	59,66 %	64,64 %	56,53 %	52,99 %	40,70 %	44,59 %

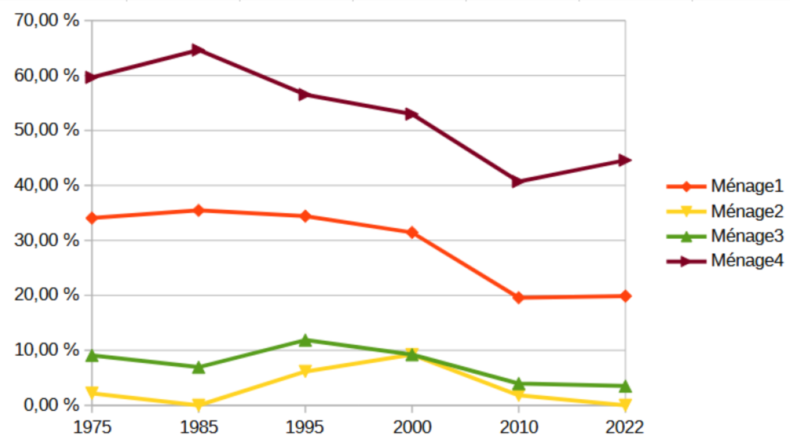


***Figure 9** : Comparaison de l'impôt de plusieurs ménages entre 1975 et 2022.*

Cette activité, conçue pour être menée en groupe, s'inscrit dans une démarche de modélisation qui sollicite les élèves sur plusieurs plans. Elle leur permet tout d'abord de réinvestir et d'approfondir les notions mathématiques, déjà abordées dans les activités précédentes, telles que les pourcentages, les fonctions affines par morceaux, ou encore la lecture et l'interprétation de graphiques. Cela permet de mesurer en particulier si ces outils sont mieux maîtrisés qu'au début de la séquence et si les élèves sont capables de les réinvestir sur des questions complexes.

Sur un plan pédagogique, le travail en groupe est essentiel : il favorise les échanges, la confrontation des idées et la répartition des tâches. Cette collaboration permet également de rendre l'activité accessible à tous, chacun pouvant contribuer selon ses forces, que ce soit dans la manipulation des outils mathématiques ou dans l'interprétation des résultats.

Enfin, cette activité dépasse le cadre strictement mathématique en abordant une problématique concrète et actuelle : l'évolution de la fiscalité en France depuis les années 1970. En étudiant ce sujet, les élèves prennent conscience de l'importance des mathématiques dans la compréhension des mécanismes économiques et sociaux. Ils découvrent ainsi que les concepts qu'ils étudient en classe ont des applications directes dans la vie quotidienne, ce qui renforce leur intérêt et leur motivation.

L'ensemble de cette séquence permet donc de montrer comment les mathématiques, souvent perçues comme formelles et sans connexion avec le réel, peuvent être un levier puissant pour analyser et résoudre des problèmes concrets, préparant ainsi les élèves à une citoyenneté éclairée.

Conclusion

Cette séquence pédagogique, qui allie théorie et pratique, a été testée depuis 2020 auprès d'élèves de terminale suivant l'option « Mathématiques Complémentaires ». Mais il nous est apparu assez rapidement qu'elle était transférable à d'autres niveaux, en filières générale comme technologique. Les observations réalisées au cours de ces séances montrent non seulement un engagement des élèves, mais aussi une amélioration notable dans leur capacité à réinvestir et à transférer les compétences acquises. Plusieurs éléments concrets permettent d'illustrer ce bilan positif.

Les élèves ont développé une compréhension plus précise des concepts mathématiques en jeu : pourcentages, pentes, notions de fonctions affines par morceaux, continuité, revisitant et mettant en cohérence des notions fondamentales enseignées depuis le collège. Leurs productions, telles que les graphiques de fonctions d'imposition, les calculs de pentes ou encore les programmes *Python* fonctionnels, attestent de cette maîtrise. Par ailleurs, ces activités ont permis de renforcer des compétences transversales essentielles : l'esprit critique, à travers l'analyse et la remise en question des modèles, notamment ceux liés aux idées reçues sur les impôts ; la collaboration, grâce au travail en groupe pour résoudre des problèmes complexes ; et l'autonomie, par la recherche d'informations et la résolution de tâches complexes.

Les retours des élèves mettent en lumière l'importance de la contextualisation et de l'authenticité des situations pour donner du sens aux apprentissages. Leurs témoignages reviennent souvent sur des éléments clés : « Parce que c'était concret », « On voyait vraiment à quoi ça servait », « On travaillait en autonomie », ou « Ce n'était pas un exercice comme dans le livre ». Ces retours, bien que positifs, ne se limitent pas à une simple appréciation. Ils révèlent une appropriation effective des savoirs et des compétences, comme en témoignent les réutilisations des outils ou des notions dans d'autres situations en mathématiques ou dans d'autres matières.

Pour poursuivre ce travail, il faudrait, mais ce serait une autre recherche, aborder ces situations, ainsi que d'autres présentées dans notre polycopié (Arnoux et Le Payen Poublan, 2022) comme des situations adidactiques au sens de Brousseau (Brousseau, 1998) ; de fait, à des moments-clés de ces activités, on voit les élèves ou les étudiants réagir, de façon reproductible, par des gestes qui montrent les obstacles rencontrés. Nous avons vu à plusieurs reprises, et dans des contextes très divers, que des élèves de tout type sont intéressés par ces activités, qui leur permettent de retrouver le fameux « goût des mathématiques ». Sont-elles efficaces ? Nous le pensons et ce serait un travail de recherche intéressant à poursuivre.

En conclusion, cette approche pédagogique ne se substitue pas aux exercices plus classiques, mais les complète en offrant des modalités variées pour répondre à la diversité des besoins des élèves. Son principal atout réside dans sa capacité à renforcer la compréhension des concepts mathématiques tout en développant des compétences transversales, préparant ainsi les élèves à une utilisation éclairée des mathématiques dans leur vie quotidienne et citoyenne.

Pierre ARNOUX
IRES d'Aix-Marseille
Département de Mathématiques,
Institut de mathématique de Marseille-I2M
(UMR73-73), Université d'Aix-Marseille

Véronique LE PAYEN POUBLAN
IRES d'Aix-Marseille
Lycée Jean Cocteau, Miramas

Références bibliographiques

Arnoux, P. & Le Payen Poublan, V. (2022). *Modélisation mathématique et activités économiques pour l'option Mathématiques Complémentaires de terminale*. Publication sur le site de l'IRES d'Aix-Marseille :
https://amubox.univ-amu.fr/s/ka7R3rs3JN2S7qn (une version modifiée sera publiée comme livre en 2026).

Blum, W. & Leiß, D. (2005). « Filling up » - The problem of independance-preserving teacher interventions in lessons with demanding modeling tasks. Dans M. Bosch (dir.), Proceedings for the CERME 4, Spain (p. 1623–1633).

Boccon-Gibod, I. (2011). *Fors intérieurs : rendez-vous avec des mathématiciens*. Éditions Léo Sheer

Brousseau, G. (1998). *Théorie des Situations Didactiques*. La pensée sauvage.

Gispert, H. (2014). *Culture commune et enseignement des mathématiques à travers deux siècles d'histoire*.
https://www.democratisation-scolaire.fr/spip.php?article189

Hankeln, C. & Hersant, M. (2020). *Processus de modélisation et processus de problématisation en mathématiques à la fin du lycée*. Presses universitaires de Rennes.

Références institutionnelles

MENJ (2019). Programme en annexe du BO. Bulletin officiel spécial n°8 du 25 juillet 2019.
https://cache.media.education.gouv.fr/file/SPE8_MENJ_25_7_2019/13/4/spe265_annexe_1159134.pdf