

MODÉLISATION DU MOUVEMENT SUR UN PLAN INCLINÉ, INSPIRÉE D'UNE EXPÉRIENCE ATTRIBUÉE À GALILÉE

Mariza KRYSINSKA¹

Laure NINOVE²

Résumé. Dans cet article, le processus de modélisation est centré sur le mouvement libre d'une bille sur un plan incliné, à la manière de l'expérience présumée de Galilée. L'intérêt de cette modélisation est de proposer une activité mathématique qui permet une construction collective du savoir mathématique. Elle a un caractère authentique au sens où elle vise la compréhension d'un phénomène physique de notre environnement, ce qui requiert de construire le modèle fonctionnel du second degré. On rencontre ce modèle fonctionnel d'abord sous la forme de ses premières différences — c'est-à-dire la suite des différences entre les valeurs successives prises par la fonction pour les valeurs naturelles de la variable indépendante —, puis on le transforme en deux représentations : un tableau numérique et la formule algébrique. L'analyse du texte de Galilée éclairera certains aspects de cette modélisation, tandis que l'expérimentation en classe permettra de se rendre compte de la portée de cette approche pour l'apprentissage de la pensée fonctionnelle chez les élèves de 15-16 ans. Le sujet traité dans cet article illustre la manière dont une modélisation mathématique permet aux élèves de pratiquer une véritable activité mathématique dont le but est avant tout de produire de nouvelles connaissances mathématiques.

Mots-clés. Modélisation, pensée fonctionnelle, modèle fonctionnel du second degré, mouvement uniformément accéléré.

Introduction

L'objet de la modélisation présentée dans ce texte est le mouvement d'une bille sur un plan incliné, à la manière d'une expérience attribuée à Galilée. Cette expérience consiste à disposer le long du parcours d'une bille sur un plan incliné des clochettes à intervalles variables de telle manière que leur tintement soit régulier.

Selon l'hypothèse de Galilée,

Les espaces parcourus en des temps égaux par un mobile partant du repos ont entre eux même rapport que les nombres impairs successifs à partir de l'unité (Galilée, 1638/1970).

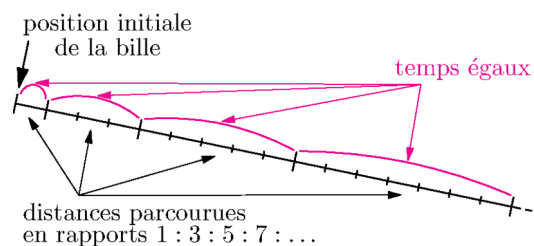


Figure 1 : Hypothèse de Galilée.

Cette hypothèse suscite plusieurs questions, qui méritent d'être abordées :

- Pourquoi le mouvement sur le plan incliné est-il associé ici à la suite des nombres impairs ?
- Pourrait-on associer une autre suite arithmétique à un tel mouvement ?

¹ krysinska.mariza@gmail.com

² laure.ninove@uclouvain.be

MODÉLISATION DU MOUVEMENT
SUR UN PLAN INCLINÉ, INSPIRÉE
D'UNE EXPÉRIENCE ATTRIBUÉE À
GALILÉE

- Une autre suite qu'arithmétique pourrait-elle convenir ?
- Comment calculer la position de la bille en fonction du temps dans le cas de l'hypothèse de Galilée ?

Les éléments d'analyse du processus de modélisation engagé par ces questions seront inspirés par le schéma de modélisation mathématique exposé par Chevallard (1989, p. 53).

*Nous n'introduisons d'abord qu'un schéma simplifié, qui suppose essentiellement **deux registres d'entités** : un **système**, mathématique ou non mathématique, et un **modèle** (mathématique) de ce système. Le processus de **modélisation** comporte, schématiquement, trois étapes.*

*1. On définit le système que l'on entend étudier, en en précisant les « aspects » **pertinents** par rapport à l'étude que l'on veut faire de ce système, soit l'ensemble des **variables** par lesquelles on le découpe dans le domaine de réalité où il nous apparaît. [...]*

*2. On construit alors le modèle à proprement parler en établissant un certain nombre de relations [...] entre les variables prises en compte dans la première étape, le modèle du système à étudier étant l'**ensemble de ces relations**.*

*3. On « travaille » le modèle ainsi obtenu, dans le but de produire des **connaissances** relatives au système étudié, connaissances qui prennent la forme de nouvelles relations entre les variables du système.*

L'étape 3 est toujours une phase proprement mathématique, tandis que les étapes antérieures sont du ressort du domaine de réalité dont est censé relever le système — les mathématiques s'il s'agit d'un objet mathématique, etc.

Chevallard formule également trois remarques qui seront éclairantes pour notre analyse :

- **modélisation mathématique comme production de connaissances nouvelles** : outre que le travail sur le modèle permet d'apporter les réponses aux questions posées sur le système, « [p]lus généralement, un modèle est intéressant lorsqu'il permet de produire des connaissances qu'une autre voie ne nous donnerait pas aussi facilement » (ibid., p. 55) ;
- **récurrence du processus de modélisation** : « Ce que nous avons appelé plus haut « travail sur le modèle » peut ainsi être interprété comme la construction de modèles successifs, mieux adaptés à l'étude » (ibid., p. 57) ;
- **réversibilité de la relation de modélisation** : le modèle peut devenir un système et le système au départ peut devenir son modèle. « Lorsqu'un système a été étudié et est, de ce fait, « supposé connu », il fournira, par translation, des indications sur l'un ou l'autre de ses modèles » (ibid., p. 57). Souvent, dans ce cas, les mathématiciens parlent d'interprétation du modèle.

Notons que, contrairement à d'autres acceptions de la modélisation mathématique, qui ne considèrent que l'étude mathématique de systèmes non mathématiques, le schéma proposé par Chevallard entend englober tant des emplois *intramathématiques* qu'*extramathématiques*, les premiers se rapportant à l'étude d'objets mathématiques et les seconds à l'étude d'objets non mathématiques.

Le système de Galilée est extramathématique : il est composé d'un plan incliné, de plusieurs clochettes disposées le long du plan et d'une bille en mouvement libre sur le plan. Comme l'inclinaison du plan et la disposition

des clochettes ne sont pas précisées d'avance, il s'agit ici d'un système quelconque, d'un système générique de toute une classe de systèmes.

La question qu'on se pose est de savoir comment évolue, avec le temps, la distance parcourue par la bille.

Dans la suite, nous présentons en section 1 un processus de modélisation qui peut être réalisé à partir du système étudié, avec la construction de plusieurs modèles successifs. À la section 2, nous présentons et analysons l'expérimentation d'une leçon avec deux groupes d'élèves de 4^e et 5^e secondaire en Belgique, c'est-à-dire correspondant à la seconde et la première du lycée (15-16 et 16-17 ans). En section 3, nous donnons quelques précisions sur la différence entre la chronologie de l'approche présentée par Galilée dans ses *Discours et démonstrations* et celle utilisée ici. Nous enchaînons ensuite, en section 4, sur la question de la validation de l'hypothèse de Galilée, avant de présenter quelques conclusions.

1. – Processus de modélisation

1.1. - Modèle arithmétique de Galilée

Le premier modèle mathématique du système étudié que nous considérons ici est proposé par Galilée lui-même (Galilée, 1638/1970, p. 125) : « *Les espaces parcourus en des temps égaux par un mobile partant du repos ont entre eux même rapport que les nombres impairs successifs à partir de l'unité* ». Il a la forme de la suite arithmétique des nombres impairs :

$$1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 9 ; \dots ; 2n-1 ; \dots$$

qui modélise *toute* suite des distances successives, sur le plan incliné, d'un tintement à l'autre, pendant des intervalles de temps successifs égaux. Le quantificateur « toute » devant le terme « suite » est dû au caractère générique du système : son modèle arithmétique est accompagné implicitement d'un quantificateur universel. Par exemple, si le mobile parcourt 40 cm durant la première seconde, l'hypothèse de Galilée affirme qu'il parcourra 120 cm pendant la deuxième seconde, puis 200 cm pendant la troisième seconde, et ainsi de suite.

1.2. - Modèle fonctionnel sous forme d'un tableau de nombres

Le modèle arithmétique de Galilée que nous venons de présenter ne permet pas de connaître directement la distance totale parcourue par la bille en fonction du temps. Nous allons donc continuer le processus de modélisation, qui entre ainsi dans sa phase de modélisation intramathématique.

À cette étape, on fait fonctionner l'idée de la récurrence mentionnée par Chevallard : le nouveau système à modéliser est celui des rapports $1 : 3 : 5 : 7 : \dots$ des longueurs correspondant aux temps égaux, le modèle recherché prendra la forme d'un tableau numérique donnant quelques distances parcourues en un temps donné.

Construisons, pas à pas, le modèle fonctionnel correspondant à l'hypothèse de Galilée. Nous présentons plusieurs étapes — dont certaines sembleront probablement redondantes au lecteur — de manière à illustrer les raisonnements qui peuvent être réalisés avec les élèves. Pour alléger les notations, nous considérons le cas particulier³ d'un plan incliné tel

³ On pourrait bien entendu travailler de manière générale en considérant que la bille parcourt une unité de

**MODÉLISATION DU MOUVEMENT
SUR UN PLAN INCLINÉ, INSPIRÉE
D'UNE EXPÉRIENCE ATTRIBUÉE À
GALILÉE**

que la bille parcourt un mètre lors de la première seconde après avoir été lâchée⁴.

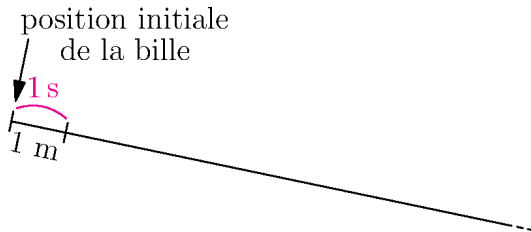


Figure 2 : Le premier mètre est parcouru pendant la première seconde.

Notons $d(t)$ la distance parcourue, en mètres, par la bille depuis l'instant initial, jusqu'au temps t , mesuré en secondes. À l'instant initial, on a donc $d(0)=0$, et après une seconde, $d(1)=1$.

Nous commençons par calculer quelques distances totales parcourues après des petites fractions du temps, avant de passer à des valeurs entières et de plus grandes fractions du temps.

Distance totale parcourue par la bille après $\frac{1}{2}$ seconde

Pour trouver la distance parcourue par la bille lors de la première demi-seconde, on peut prendre comme « temps égaux » de l'hypothèse de Galilée non pas des secondes, mais des demi-secondes. L'hypothèse de Galilée nous dit alors que l'espace parcouru pendant la première demi-seconde et celui parcouru pendant la deuxième demi-seconde sont dans le même rapport que les deux premiers nombres impairs, c'est-à-dire 1 et 3.

Autrement dit,

longueur (1 u.l.) lors de la première unité de temps (1 u.t.).

⁴ Cela correspond à un angle d'environ 12° , comme on peut le montrer à l'aide des formules de cinématique usuelles.

$$d(1) - d\left(\frac{1}{2}\right) = 3 \left(d\left(\frac{1}{2}\right) - d(0) \right).$$

Comme on sait que $d(1)=1$ et $d(0)=0$, on trouve

$$d\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

La bille parcourt donc un quart de mètre pendant la première demi-seconde.

On peut aussi le visualiser sur un schéma tel que ci-dessous.

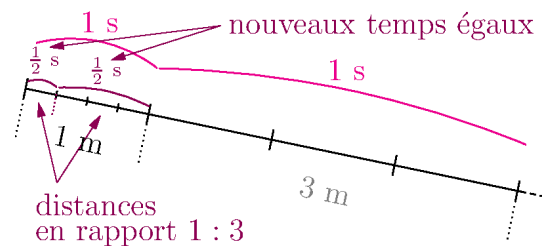


Figure 3 : Visualiser la distance parcourue en $\frac{1}{2}$ seconde.

De manière encore plus schématisée, on peut le représenter comme ci-dessous.

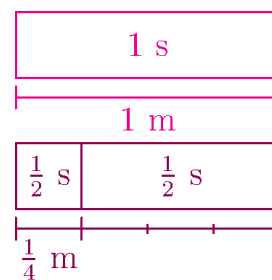


Figure 4 : Autre schématisation permettant de visualiser la distance parcourue en $\frac{1}{2}$ seconde.

Distance totale parcourue par la bille après $\frac{1}{3}$ ou $\frac{2}{3}$ de seconde

Pour déterminer le temps parcouru en un tiers de seconde, on peut prendre comme

« temps égaux » des tiers de seconde. On trouve

$$d\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9}, \text{ car}$$

$$1 = d(1) = d\left(\frac{1}{3}\right) + 3d\left(\frac{1}{3}\right) + 5d\left(\frac{1}{3}\right) = 9d\left(\frac{1}{3}\right).$$

Cela peut s'illustrer schématiquement comme sur l'une des représentations ci-après.

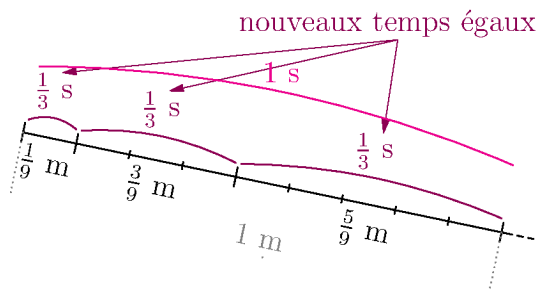


Figure 5a

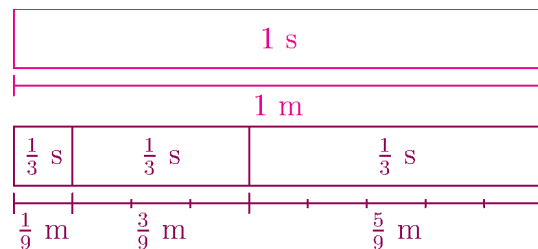


Figure 5b

Figures 5 : Visualiser la distance parcourue en $\frac{1}{3}$ ou $\frac{2}{3}$ de seconde.

On peut également soit calculer à partir de la valeur de $d\left(\frac{1}{3}\right)$ soit directement lire sur l'un ou l'autre de ces schémas que

$$d\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{4}{9}\right).$$

Distance totale parcourue par la bille après 2 et 3 secondes

D'après l'hypothèse de Galilée, on trouve aisément que

$$d(2) = 1 + 3 = 4,$$

$$d(3) = 1 + 3 + 5 = 9.$$

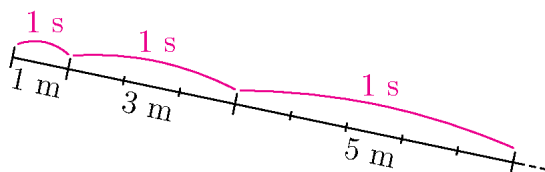


Figure 6 : Distances parcourues sur les premiers intervalles d'une seconde

Distance totale parcourue par la bille après $\frac{3}{2}$ secondes

Pour déterminer la distance parcourue après trois demi-secondes, on peut raisonner de deux manières différentes.

On peut prendre comme « temps égaux » des demi-secondes. On trouve alors

$$\begin{aligned} d\left(\frac{3}{2}\right) &= d\left(\frac{1}{2}\right) + 3d\left(\frac{1}{2}\right) + 5d\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= 9d\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{9}{4} \end{aligned}$$

comme visualisé ci-dessous.

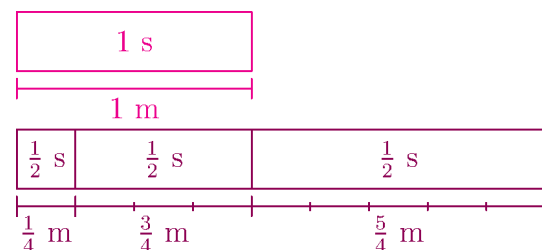


Figure 7 : La « demi-seconde » prise comme unité.

**MODÉLISATION DU MOUVEMENT
SUR UN PLAN INCLINÉ, INSPIRÉE
D'UNE EXPÉRIENCE ATTRIBUÉE À
GALILÉE**

On pourrait aussi prendre des intervalles de $\frac{3}{2}$ secondes comme « temps égaux ». Comme pendant le deuxième intervalle de $\frac{3}{2}$ secondes, on parcourt trois fois la distance parcourue pendant le premier intervalle, et que sur ces 3 secondes au total, on a déjà établi qu'on parcourait 9 mètres, on en déduit qu'on parcourt $\frac{9}{4}$ de mètre pendant le premier intervalle de $\frac{3}{2}$ secondes. Cela peut se visualiser sur le schéma ci-dessous (qui n'est pas à la même échelle que les précédents).

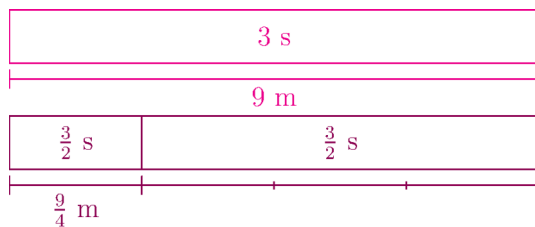


Figure 8 : « Trois demi-secondes » pris comme unité.

Construction d'un tableau de nombres

Rassemblons à présent dans un tableau à deux entrées les résultats du calcul des distances en fonction du temps déjà engrangés.

Temps en s	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{3}{2}$	2	3
Distance en m	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{9}$	1	$\frac{9}{4}$	4	9

Tableau 1 : Tableau de distances parcourues en fonction du temps.

Remarquons que ce n'est pas le seul tableau possible pour représenter la distance en fonction du temps : pour d'autres choix des valeurs de temps, on aurait obtenu d'autres valeurs correspondantes de la distance.

1.3. - Modèle fonctionnel algébrique

Poursuivons le travail de récurrence du processus de modélisation en construisant à présent un modèle fonctionnel algébrique. Celui-ci est obtenu comme l'expression algébrique de la régularité du tableau construit ci-dessus. Son but est l'économie de pensée atteinte par une formule algébrique.

Pour mettre en évidence cette régularité, remplaçons le tableau précédent par le tableau équivalent suivant :

Temps en s	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{3}{2}$	2	3
Distance en m	0	$\left(\frac{1}{3}\right)^2$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\left(\frac{2}{3}\right)^2$	1^2	$\left(\frac{3}{2}\right)^2$	2^2	3^2

Tableau 2 : Régularité du tableau de distances parcourues en fonction du temps.

Mais la régularité observée pour les quelques valeurs du temps considérées jusqu'à présent ne peut être généralisée *a priori* pour des valeurs quelconques.

Commençons donc par examiner le cas d'une valeur entière quelconque du temps, avant de nous intéresser aux valeurs fractionnaires.

Distance totale parcourue par la bille après un nombre entier quelconque n de secondes

Rappelons qu'on a supposé que la bille parcourait le premier mètre lors de la première seconde, ce qui s'écrit $d(1)=1$. L'hypothèse de Galilée nous dit qu'alors, avec un nombre entier naturel n de secondes, on a

$$\begin{aligned}d(1) - d(0) &= 1, \\d(2) - d(1) &= 3, \\d(3) - d(2) &= 5, \\&\vdots \\d(n) - d(n-1) &= 2n - 1.\end{aligned}$$

En sommant ces égalités, on peut donc exprimer la distance parcourue après un nombre entier n de secondes comme

$$d(n) = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1).$$

Or la somme des n premiers nombres impairs peut être écrite sous une forme compacte :

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2,$$

le pourquoi de cette formule (qui pourrait également être prouvée par récurrence) pouvant être éclairé par une figure faisant apparaître des « gnomons » comme ci-dessous.

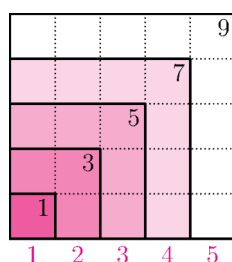


Figure 9 : Des gnomons pour visualiser la somme des premiers entiers naturels.

On a donc établi que l'hypothèse de Galilée implique que, pour tout temps n naturel,

$$d(n) = n^2,$$

ce qui est bien compatible avec les résultats obtenus pour les temps entiers dans le tableau 1.

Notons que ce passage est une double récurrence intramathématique du processus de modélisation dans lequel un modèle devient un système pour le modèle suivant. En effet, d'abord le carré ci-dessus devient un modèle de la somme $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$. Ensuite, cette figure « carré » devient à son tour système dont le modèle algébrique sera l'expression littérale n^2 vérifiant ainsi l'égalité

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

pour les nombres naturels, quels qu'ils soient, mis à la place de la lettre n .

Distance totale parcourue par la bille après une fraction quelconque de secondes

Le même type de raisonnement que celui réalisé par exemple pour déterminer la distance parcourue en $\frac{1}{3}$ s, sur base d'un schéma comme celui ci-dessous, permet d'établir que la distance parcourue après la première $\frac{1}{\ell}$ seconde (avec ℓ naturel) vaut $\left(\frac{1}{\ell}\right)^2$, en utilisant l'identité $1 + 3 + 5 + \dots + (2\ell - 1) = \ell^2$.

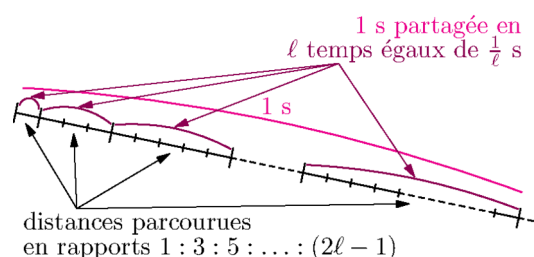


Figure 10 : Visualisation de la distance parcourue en $\frac{1}{\ell}$ s.

De manière équivalente, on peut aussi travailler algébriquement, en décomposant, à l'aide de l'hypothèse de Galilée, la distance parcourue sur une seconde en toutes celles parcourues sur les ℓ intervalles successifs de $\frac{1}{\ell}$ seconde :

MODÉLISATION DU MOUVEMENT
SUR UN PLAN INCLINÉ, INSPIRÉE
D'UNE EXPÉRIENCE ATTRIBUÉE À
GALILÉE

$$\begin{aligned}
 d(1) &= d\left(\ell \cdot \frac{1}{\ell}\right) \\
 &= 1d\left(\frac{1}{\ell}\right) + 3d\left(\frac{1}{\ell}\right) + \dots + (2\ell - 1)d\left(\frac{1}{\ell}\right) \\
 &= \ell^2 d\left(\frac{1}{\ell}\right),
 \end{aligned}$$

dont on tire

$$d\left(\frac{1}{\ell}\right) = \left(\frac{1}{\ell}\right)^2 d(1) = \left(\frac{1}{\ell}\right)^2.$$

Enfin, pour une fraction quelconque de secondes, en utilisant à nouveau l'hypothèse de Galilée et l'identité établie plus haut, on trouve

$$\begin{aligned}
 d\left(\frac{k}{\ell}\right) &= 1d\left(\frac{1}{\ell}\right) + 3d\left(\frac{1}{\ell}\right) + \dots + (2k - 1)d\left(\frac{1}{\ell}\right) \\
 &= k^2 d\left(\frac{1}{\ell}\right),
 \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$d\left(\frac{k}{\ell}\right) = k^2 \left(\frac{1}{\ell}\right)^2 = \left(\frac{k}{\ell}\right)^2.$$

On a donc établi la formule fonctionnelle

$$d(t) = t^2$$

exprimant la distance parcourue en fonction du temps $t > 0$. Autrement dit, la régularité observée dans le tableau 2, selon laquelle la distance est le carré du temps, est résumée par la formule $d(t) = t^2$, validée pour tous les valeurs rationnelles du temps.

Distance parcourue par des valeurs du temps irrationnelles

La question de savoir si la formule $d(t) = t^2$ reste valable pour les valeurs du temps irrationnelles peut sembler purement théorique : quel intérêt autre que théorique au-

rait-on à connaître la distance parcourue par une bille en un temps de valeur irrationnelle ?

Poser la question à l'envers peut néanmoins en faire entrevoir l'intérêt.

Peut-on estimer le temps après lequel la bille aura parcouru les deux premiers mètres ?

Puisque $d(1) = 1$ et $d(1,5) = 2,25$, on sait que ce temps sera situé entre 1 et 1,5 seconde. Pour obtenir une estimation à 0,1 seconde près, calculons $d(1,4) = 1,4^2 = 1,96$. Le temps de parcours des deux premiers mètres est donc compris entre 1,4 et 1,5 seconde. On peut continuer ainsi le processus d'encadrement et montrer que le temps est compris entre 1,41 et 1,42 seconde, puis entre 1,414 et 1,415 seconde, et ainsi de suite.

Ce processus d'encadrement de plus en plus fin du temps ne s'achèvera jamais, vu qu'il n'existe pas de nombre rationnel — et donc *a fortiori* pas de nombre décimal — dont le carré vaut 2. Les encadrements emboîtés du temps équivalent au parcours de 2 mètres sont ceux qui définissent le nombre irrationnel $\sqrt{2}$: on leur fait correspondre les encadrements emboîtés de la distance de 2 mètres. Étant donné que dans ces deux cas, les encadrements emboîtés ainsi construits définissent d'une manière univoque le temps du parcours de 2 mètres et la distance de 2 mètres, on peut prolonger la formule $d(t) = t^2$ à $t = \sqrt{2}$ secondes. Ce raisonnement peut être prolongé à tous les nombres irrationnels. Il s'appuie sur l'axiome des intervalles emboîtés (Groupe AHA, 1999, p. 361 ; Hauchart et Schneider, 1996, p. 53) : « Il existe un et un seul nombre contenu dans tous les intervalles d'une suite infinie d'intervalles emboîtés fermés dont la longueur tend vers 0 ».

L'unicité d'un tel prolongement de la fonction « distance » aux valeurs irrationnelles

de la variable indépendante est assurée par la nécessité de conserver son caractère croissant et la possibilité de construire, à partir des abscisses rationnelles, une suite d'intervalles fermés emboîtés de longueur tendant vers 0, et ainsi d'obtenir la suite correspondante d'intervalles emboîtés dont la longueur tendra également vers 0, comme son image par la fonction « distance ». Le prolongement ainsi construit est continu.

1.4. - Généralisation du modèle fonctionnel par le paramétrage

Dans notre processus de modélisation, nous nous sommes limités au cas particulier du plan incliné caractérisé par la distance d'un mètre parcourue après la première seconde. Tous les autres plans inclinés seront caractérisés par cette distance parcourue après la première seconde. Pour les prendre en considération tous en même temps, nous introduisons le paramètre noté r , pour désigner le nombre de mètres parcourus après la première seconde. Ainsi, selon l'hypothèse de Galilée, la suite des distances d'une seconde à l'autre sera notée par

$$r ; 3r ; 5r ; 7r ; \dots$$

Par un raisonnement analogue à celui réalisé dans le cas du mouvement caractérisé par 1 mètre après la première seconde, on obtient que

$$d\left(\frac{k}{\ell}\right) = r\left(\frac{k}{\ell}\right)^2$$

et pour n'importe quelle valeur du temps t , on obtient la formule paramétrisée

$$d(t) = r t^2$$

qui prend en compte tous les plans inclinés.

1.5. - Modèle cinématique de la loi de Galilée

La suite des distances mesurée en mètres $r ; 3r ; 5r ; 7r ; \dots$, chacune parcourue en une seconde par une bille en mouvement libre sur un plan incliné quelconque, est équivalente à la suite

$$r ; r+2r ; r+2r+2r ; r+2r+2r+2r ; \dots$$

Cette suite peut être interprétée en cinématique : à chaque seconde écoulée, la distance parcourue s'allonge de $2r$ mètres. Cela revient à dire que la vitesse augmente de $2r$ m/s, ou que le mouvement de la bille sur le plan incliné est *uniformément accéléré*. Traditionnellement, en cinématique, l'accélération est notée par le paramètre a , la distance est mesurée en mètres et le temps en secondes. Ainsi, on a $a=2r$, et on obtient la formule cinématique standardisée du mouvement libre de la bille sur le plan incliné :

$$d(t) = \frac{a t^2}{2}$$

Le raisonnement présenté ci-dessus est une forme de modélisation qui se base sur sa réversibilité : l'interprétation de l'hypothèse de Galilée en termes d'un mouvement uniformément accéléré devient le modèle en cinématique de la suite arithmétique qui passe quant à elle de statut de modèle à un statut de système modélisé.

1.6. - Modélisation mathématique comme production de connaissances

Le passage de l'hypothèse de Galilée, modélisée au départ par la suite arithmétique des nombres impairs, au tableau représentant quelques distances après les temps donnés, est réalisé par des calculs s'appuyant sur un rai-

MODÉLISATION DU MOUVEMENT
SUR UN PLAN INCLINÉ, INSPIRÉE
D'UNE EXPÉRIENCE ATTRIBUÉE À
GALILÉE

sonnement hypothético-déductif, notamment sur l'utilisation répétée du syllogisme. Les cadres arithmétique et algébrique se prêtent bien à la pratique par des élèves de cette forme de raisonnement relégué souvent au cadre géométrique.

L'intérêt d'étudier le mouvement d'une bille sur un plan incliné tient aussi au fait que, déjà au départ, avant le processus de modélisation, il apparaît l'idée de covariation entre le temps et la distance car celle-ci varie explicitement avec le temps. Le rôle du temps est donc très important pour la perception d'une variation. Pour les élèves, cela facilite la discrimination entre la variable indépendante et la variable dépendante lors du passage à la représentation fonctionnelle du temps et des distances y liées.

Dans ce processus de modélisation, la notion de fonction a été utilisée sans que l'on ait besoin de la définir. De plus, la fonction du second degré considérée ici a été représentée à la fois par un tableau à deux entrées (le temps et la distance) et par la formule algébrique, ce qui évite d'identifier la notion de fonction à l'une seulement de ses représentations.

Le passage du tableau à la formule, comme moyen de résumer sa régularité, a permis aussi de fournir à la notion de « variable », représentée ici par le symbole t , la signification suivante : t peut être remplacée par les différentes valeurs numériques du temps dont chacune détermine la valeur numérique de l'expression littérale t^2 , comme étant le carré de la valeur choisie de t .

L'importance de la modélisation algébrique qui conduit aux modèles fonctionnels et à la mise en place des bases de l'algèbre élémentaire est étudiée par Krysinska et Schnei-

der (2010) et Job, Krysinska et Schneider (2023).

2. – L'expérience de Galilée avec des élèves

Dans cette section, nous présentons et analysons l'expérimentation réalisée dans deux des groupes d'élèves avec lesquels nous avons réalisé l'activité. Le premier groupe était constitué de 16 élèves provenant de différentes classes de 5^e secondaire⁵ d'une école d'enseignement général, pour une activité hors classe. Le second groupe était une classe d'élèves de 4^e secondaire, qui vivait l'activité comme première introduction au chapitre sur les fonctions du second degré. Douze élèves étaient présents. Dans les deux cas, la leçon a duré un peu moins de 90 minutes tout compris.

La leçon s'est concentrée successivement sur le modèle arithmétique, le modèle fonctionnel sous forme de tableau de nombres et le modèle fonctionnel algébrique présentés plus haut. Les questions posées aux élèves sont présentées en annexe. Notons que ce scénario correspond à l'expérimentation avec le second groupe, pour laquelle certaines consignes ont été ajustées suite à l'expérimentation avec le premier groupe, ce que nous expliquerons plus bas.

Concernant le matériel, notre « plan incliné à la manière de Galilée » est un rail en bois long de trois mètres. Il est gradué tous les 15 cm, mais sans nombres associés. Cinq clochettes peuvent être positionnées le long du rail, sur les graduations ou entre celles-ci. L'inclinaison du plan n'est pas fixée d'emblée,

⁵ En Belgique, la 4^e secondaire correspond à des élèves âgés d'environ 15-16 ans (équivalent de la 2^{de} en France) alors que la 5^e secondaire correspond à des élèves de 16-17 ans (1^{re} en France).

elle dépend de la hauteur du support sur lequel on place une de ses extrémités. En utilisant par exemple une chaise de la classe, on obtient un angle d'inclinaison de l'ordre de 10° .



Figure 11 : Le plan incliné en situation de classe.

2.1. - Vers le modèle arithmétique de Galilée

Après une petite introduction historique permettant de resituer Galilée et les outils disponibles à son époque, nous présentons le « plan incliné à la manière de Galilée » et son intérêt expérimental pour étudier le mouvement des corps plutôt qu'un lâcher depuis le haut d'une tour. Nous posons la question initiale :

Comment positionner les clochettes de manière qu'elles sonnent régulièrement au passage de la bille qui serait lâchée à l'extrémité du rail ?

Formulation d'hypothèses par les élèves et confrontation de celles-ci avec l'expérience

Les élèves sont invités à formuler leurs propres hypothèses, qui pourront être testées sur le dispositif expérimental.

Avec le **premier groupe**, les 16 élèves ont été d'emblée invités à exprimer oralement leur proposition de positionnement.

Un élève propose de disposer les clochettes à *intervalles réguliers* (intervalles $1 - 1 - 1 - \dots$). Un autre lui rétorque immédiatement : « non, ce n'est pas possible, car la

bille accélère ». Un élève réalise toutefois l'expérimentation devant la classe avec cette disposition et effectivement, on entend les clochettes tinter à une cadence de plus en plus rapide. Notons qu'il ne positionne pas de clochette à la position initiale du plan incliné, et que les élèves suivants qui testeront des hypothèses de disposition de clochettes feront de même. Ce (non) choix a privé la classe d'un témoin sonore de la durée de parcours de la bille sur le premier intervalle, et ce pour toutes les expérimentations.

Une deuxième hypothèse est ensuite proposée par un élève : *des intervalles successifs qui doublent à chaque fois* ($1 - 2 - 4 - 8 - \dots$), ce à quoi un autre répond « je ne suis pas sûr que ça accélère autant quand même ». L'expérimentation montre effectivement que les clochettes sonnent à des moments de plus en plus espacés⁶.

Voyant que quand les clochettes sont placées à intervalles réguliers, la cadence des tintements accélère, alors que quand elles sont placées avec des intervalles qui doublent à chaque fois, la cadence ralentit, un élève propose spontanément une troisième hypothèse, intermédiaire entre les deux premières : « on pourrait tester $1 - 2 - 3 - 4$ », autrement dit *des intervalles successifs qui croissent d'une unité à chaque fois*. Lors de l'expérimentation, cela semble très régulier à l'oreille, mais sans toutefois que les élèves ne soient convaincus que ce soit assez précis pour trancher. Notons

⁶ En fait, si une clochette était placée au temps 0 (et qu'on se situait dans une situation idéale d'expérimentation et de mesure), nous aurions pu constater que la durée des intervalles successifs commence par diminuer avant d'augmenter de plus en plus. En effet, les quatre premiers intervalles sont, en théorie, successivement de $1 - 0,732 - 0,914 - 1,227$ unités de temps, mais les élèves n'ont pas pu « entendre » le premier de ceux-ci suite à l'absence de clochette en position initiale.

**MODÉLISATION DU MOUVEMENT
SUR UN PLAN INCLINÉ, INSPIRÉE
D'UNE EXPÉRIENCE ATTRIBUÉE À
GALILÉE**

qu'ici, l'absence de témoin sonore pour le premier intervalle de temps n'est pas insignifiant. En effet, les cinq premiers intervalles de temps sont $1 - 0,732 - 0,717 - 0,713 - 0,711$ unités de temps en théorie. En l'absence de clochette à la position initiale, les quatre intervalles entendus sont donc très proches en durée, avec une différence difficilement perceptible à l'oreille.

Pour le **second groupe**, nous avons donc veillé à imposer qu'une clochette soit placée en position initiale. Par ailleurs, pour tenter de récolter l'intuition première de chaque élève et pas seulement de ceux prenant la parole, nous leur avons demandé de compléter individuellement, par écrit, un dessin schématique du rail et de la position des clochettes sur celui-ci (les positions 0 et 1 étant fixées) de manière que les clochettes sonnent régulièrement.

Huit des douze élèves pensent qu'il faut disposer les clochettes à intervalles réguliers ($1 - 1 - 1 - \dots$). Les autres ont l'idée que la bille va accélérer et proposent d'autres dispositions :

- $1 - 1 - 2 - 2 - \dots$,
- $1 - 2 - 2 - 2 - \dots$,
- $1 - 2 - 3 - 4 - \dots$.

Ces quatre hypothèses ont été testées expérimentalement sur le plan incliné. Les cinq clochettes permettaient de tester une succession de quatre intervalles. La proposition $1 - 1 - 1 - 1 - \dots$ a été invalidée immédiatement par l'expérience, les tintements des clochettes se faisant de plus en plus rapprochés. L'hypothèse $1 - 1 - 2 - 2 - \dots$ est également invalidée par l'expérience. Un élève demande alors de tester l'hypothèse $1 - 2 - 2 - 2 - \dots$, même si les autres expriment qu'ils savent déjà que ça ne fonctionnera pas, car « la bille accélère ».

On teste alors l'hypothèse $1 - 2 - 3 - 4 - \dots$, qui semble produire des tintements assez réguliers, sans qu'on puisse être complètement convaincus, notamment sur le début du parcours de la bille.

Un élève fait alors une nouvelle proposition : placer chaque cloche de manière à ce que chaque intervalle soit une fois et demie plus long que l'intervalle précédent ($1 - 1,5 - 2,25 - 3,375 - \dots$) , mais l'expérimentation invalide cette hypothèse.

Les quatre propositions initiales des élèves sont rassemblées au tableau, et annotées au fur et à mesure des essais avec le matériel. La cinquième proposition est également ajoutée par la suite.

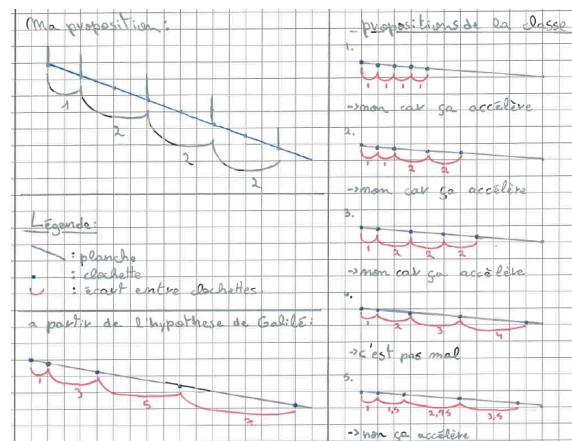


Figure 12 : Extrait des notes d'une élève.

Vérification de l'hypothèse de Galilée

Comme nous l'anticipions, l'hypothèse de Galilée n'est pas apparue spontanément dans les deux groupes d'élèves. Nous avons donc, après le temps de test des différentes propositions des élèves, énoncé l'hypothèse de Galilée : « Les espaces parcourus en des temps égaux par un mobile partant du repos ont entre eux même rapport que les nombres impairs successifs à partir de l'unité ».

Après un petit temps individuel d'appropriation de cet énoncé par les élèves, l'un d'eux a été invité à venir placer les clochettes comme proposé par Galilée. Dans le premier groupe, cela n'a pas posé de difficulté. Dans le second groupe, l'élève invité à manipuler le matériel a placé les clochettes *aux positions* 1, 3, 5, ..., et pas de manière que les *intervalles successifs* soient en rapports 1 : 3 : 5 : Il a donc positionné chaque clochette en comptant les graduations à partir de la position 0. Ainsi, les intervalles entre les clochettes placées par l'élève étaient tous de deux unités et ne correspondaient donc pas à l'hypothèse de Galilée. Après relecture et appropriation en groupe classe de l'hypothèse de Galilée, il a pu corriger la disposition, que nous avons ensuite schématisée ensuite au tableau.

L'hypothèse de Galilée est ensuite testée avec le matériel. Les tintements semblent plutôt réguliers à l'oreille, bien que certains élèves aient l'impression d'un léger ralentissement des tintements, mais il leur semble qu'on peut faire confiance à Galilée, et imputer ce ralentissement au contact répété de la bille avec les clochettes notamment.

Variation : doublement de l'écart initial

Pour tester la compréhension des élèves, nous avons posé la question :

Et si maintenant, au lieu de commencer par un écart de 1, on commençait par un écart de 2, que devraient être les espacements suivants entre les clochettes pour que celles-ci tintent encore de manière régulière ?

Dans le **premier groupe**, un élève a d'emblée proposé oralement de prendre comme écarts suivants 4, 6, 8, ..., c'est-à-dire disposer les clochettes de sorte à avoir des in-

tervalles 2 – 4 – 6 – 8 – On voit là une résurgence du modèle additif (ajouter 1 à la longueur de chaque intervalle 1 – 3 – 5 – 7 – ...) plutôt que le modèle multiplicatif correspondant aux situations de proportionnalité, ce qui est cohérent avec l'affirmation de Brousseau : « *le modèle additif est un obstacle résistant à la mise en place du modèle multiplicatif* » (Brousseau, 1981, p. 61).

Dans le **second groupe**, les élèves ont été invités à écrire leur réponse avant un tour de table. Ici aussi, le modèle additif oriente les réponses de la moitié des élèves, qui proposent des intervalles en disposition 2 – 4 – 6 – 8 – Quand on leur demande d'expliquer leur réponse, c'est l'idée d'« ajouter 1 partout » qui ressort. L'autre moitié des élèves proposent quant à eux la disposition correcte 2 – 6 – 10 – 14 – ... , certains exprimant qu'on double les distances par rapport à la disposition d'origine 1 – 3 – 5 – 7 – ... , d'autres invoquant plutôt l'hypothèse de Galilée : on multiplie par trois, puis par cinq, sept, etc. l'écart initial de 2. Notons enfin qu'un élève suggère une disposition 2 – 6 – 9 – 14, mais ne propose pas d'explication.

Dans ce second groupe, on teste l'hypothèse 2 – 4 – 6 – 8 – ... avec le matériel et les élèves constatent que le rythme est trop rapide par rapport à la durée du premier intervalle.

Variation : changement de la pente

Nous avons également demandé :

Que se passerait-il si on changeait l'inclinaison du plan ? L'hypothèse de Galilée resterait-elle toujours vérifiée ?

Dans les deux groupes, les élèves avaient des avis mitigés. Ils expriment que si on augmente la pente, la bille ira plus vite, mais ils sont partagés sur le maintien de la validité du

MODÉLISATION DU MOUVEMENT
SUR UN PLAN INCLINÉ, INSPIRÉE
D'UNE EXPÉRIENCE ATTRIBUÉE À
GALILÉE

modèle de Galilée. Ceux qui pensent que l'hypothèse ne sera plus vérifiée argumentent que, comme la bille ira plus vite, il faudra espacer plus les clochettes. Ceux qui pensent que l'hypothèse reste valable argumentent que le rythme des tintements sera juste plus rapide, mais toujours régulier avec les clochettes disposées comme précédemment.

On teste avec des pentes assez proches, pour lesquelles la situation est très proche de la situation d'origine. Mais quand on teste avec une pente nettement plus faible, on est confronté aux limites du modèle expérimental : les tintements de clochettes s'espacent, ce qui est dû au fait que les frottements deviennent non négligeables et contrent l'accélération correspondant au mouvement libre.

Nous invitons alors les élèves à relire l'hypothèse de Galilée et faisons remarquer que, nulle part, Galilée ne parle d'inclinaison du plan : il a donc pensé son hypothèse de manière universelle, comme caractérisant le mouvement libre d'une bille sur n'importe quel plan incliné.

Des expériences non totalement concluantes

Finalement, toutes ces expériences n'ont pas permis de conjecturer l'hypothèse de Galilée, ni de la vérifier à coup sûr. Elles ont surtout servi à mettre à l'épreuve d'autres hypothèses et, par ce biais, à s'approprier des éléments de l'hypothèse de Galilée.

2.2. - Vers le modèle fonctionnel sous forme d'un tableau de nombres

Dans le **premier groupe**, nous avons demandé aux élèves :

Quelle distance sera parcourue par la bille successivement en 1, 2, 3, 4, 5, ... , n secondes ?

avant de leur poser la question pour quelques temps fractionnaires et de leur demander de rassembler le tout dans un tableau. Cela a posé problème pour la suite, car, voyant les résultats 1, 4, 9, 16, 25 mètres pour 1, 2, 3, 4 et 5 secondes, les élèves ont repéré rapidement la régularité pour les temps entiers naturels et ont directement exprimé que la distance parcourue au temps n était égale à n^2 , ce qu'ils ont eu le réflexe d'étendre *a priori* pour des valeurs du temps quelconques, sautant donc de manière prématurée au modèle fonctionnel algébrique. Pour répondre aux questions concernant les temps fractionnaires, ils calculent donc directement le carré du temps, plutôt qu'utiliser l'hypothèse de Galilée.

Pour le **deuxième groupe**, nous avons donc fait le choix de ne faire réfléchir les élèves, pour commencer, que sur les toutes premières valeurs entières naturelles du temps, en leur demandant de commencer à compléter un tableau des distances parcourues en se basant sur les données (premier mètre parcouru lors de la première seconde) et l'hypothèse de Galilée.

t	0	1	2	3
d	0	1	4 (=1+3)	9 (=1+3+5)

Tableau 3 : Début de la construction du tableau.

Lors de la mise en commun, un schéma du type de la figure 6 est réalisé au tableau.

Après cette étape, qui n'a pas posé difficulté, nous leur avons demandé :

Au temps $\frac{1}{2}$, quelle distance aura parcouru la bille, à quelle position sera-t-elle ?

La plupart des élèves proposent de placer la clochette à $d=0,5$. Un élève propose de la placer *après* $d=0,5$. Un seul élève propose de la placer *avant* $d=0,5$, mais il ne parvient pas à expliquer son point de vue. Une discussion s'engage : si c'était $d=0,5$, cela signifierait que la bille parcourt la même distance sur l'intervalle de temps entre 0 et $\frac{1}{2}$ et celui entre $\frac{1}{2}$ et 1. Or on a vu que la bille accélère. Les élèves se convainquent donc qu'il faut positionner la clochette avant $d=\frac{1}{2}$, mais à quelle position ? Beaucoup d'élèves proposent $\frac{1}{4}$. En s'aidant de schémas comme ceux réalisés plus haut, ils parviennent à exprimer que cela correspond bien à l'hypothèse de Galilée, puisque la distance de $\frac{3}{4}$ parcourue pendant la deuxième demi-seconde est bien le triple de celle de $\frac{1}{4}$ parcourue pendant la première demi-seconde. Le tableau 3 est donc complété avec ce nouveau couple de valeurs.

t	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
d	0	$\frac{1}{4}$	1	4	9

Tableau 4 : Poursuite de la construction du tableau.

Nous avons ensuite demandé :

Et au temps $\frac{1}{3}$, à quelle distance de l'origine se situe la bille ?

Les élèves sont un peu perdus. Pour les relancer, nous dessinons l'un en dessous de l'autre deux schémas de plans inclinés, à des échelles différentes, en leur faisant remarquer qu'ils sont capables de déjà compléter le second avec la position de la bille aux temps $t=1$ et $t=2$.

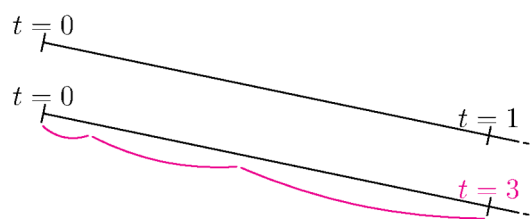


Figure 13 : Relance proposée au tableau.

Les élèves essaient de travailler avec des fractions en dixièmes, tout en respectant les rapports 1 : 3 : 5 de Galilée, mais cela coince pour le dernier morceau : $\frac{1}{10} + \frac{3}{10} + \frac{5}{10}$ ne donne pas 1 au total.

Une aide a dû leur être donnée pour leur proposer de travailler en neuvièmes. À partir de là, ils ont trouvé rapidement la distance parcourue au temps $t=\frac{1}{3}$ ainsi qu'au temps $t=\frac{2}{3}$, ce qui leur a permis de compléter le tableau.

t	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1	2	3
d	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{9}$	1	4	9

Tableau 5 : Poursuite de la construction du tableau.

2.3. - Vers le modèle fonctionnel algébrique

Comme déjà évoqué, dans le **premier groupe**, la régularité $d(t)=t^2$ a été (trop) rapidement observée par les élèves pour des valeurs entières et abusivement étendue à toutes les valeurs fractionnaires, sans tenir compte de l'hypothèse de Galilée. Une manière d'empêcher cet automatisme consisterait à poser d'abord les questions concernant la distance parcourue en une fraction de secondes ou, comme nous l'avons fait avec le deuxième groupe, de ne s'intéresser qu'à une ou deux valeurs entières avant de se pencher sur les valeurs fractionnaires du temps.

MODÉLISATION DU MOUVEMENT
SUR UN PLAN INCLINÉ, INSPIRÉE
D'UNE EXPÉRIENCE ATTRIBUÉE À
GALILÉE

Dans le **second groupe**, on a demandé aux élèves d'observer le tableau 5 complété, voir si on peut dégager une régularité et proposer une formule qui permettrait d'exprimer celle-ci. Un élève dit que « c'est la formule des carrés », ce avec quoi les autres élèves sont d'accord. On vérifie cette hypothèse sur $t=4$, pour lequel on obtient $d=16$, soit en calculant le carré de 4, soit en additionnant les écarts successifs, en remarquant que $1+3+5+7=4^2$.

Comme nous nous en doutions, ni dans un groupe, ni dans l'autre, les élèves n'ont été capables d'expliquer par eux-mêmes pourquoi des sommes de nombres impairs étaient les carrés. Dans le premier groupe, nous avons montré le début de la construction des gnomons ($1+3$) et leur avons demandé de réfléchir à la suite, dans le second groupe, nous avons présenté la démonstration visuelle avec plusieurs étapes d'ajout de gnomons.

On institutionnalise ensuite avec les élèves que l'hypothèse de Galilée implique, en supposant que $d(0)=0$ et $d(1)=1$, que $d(t)=t^2$. Dans le second groupe, on présente aussi les écritures standardisées $y=x^2$ et $f(x)=x^2$, en prévision du travail sur les fonctions du second degré qui suivra cette leçon introductive.

2.4. - Vers une généralisation du modèle fonctionnel par le paramétrage

Avec le premier groupe, nous avons eu l'occasion d'entamer une généralisation avec paramètre. Pour cela, nous avons d'abord demandé comment changerait l'équation du mouvement si on modifiait l'inclinaison du plan. L'idée d'un facteur multiplicatif devant le t^2 , qui changerait selon l'inclinaison, vu que la bille va plus ou moins vite selon qu'on augmente ou diminue l'inclinaison, n'a pas posé de difficulté.

Nous avons ensuite posé la question suivante :

On veut comparer deux plans inclinés A et B, d'inclinaisons différentes. Quand on lâche une bille sur le plan A, elle parcourt une distance de 0,3 m en 0,5 s. Quand on lâche une bille sur le plan B, elle parcourt une distance de 0,05 m en 0,2 s. Des deux plans, lequel est le plus incliné par rapport à l'horizontale ?

Pour relancer les élèves en difficulté avec la question, nous demandons si l'un ou l'autre peut donner un indice en un mot ou une phrase courte. Une élève propose « distance parcourue en une seconde ». Comme d'autres, elle a appliqué l'hypothèse de Galilée pour calculer que la bille parcourt $(1+3) \cdot 0,3 \text{ m} = 1,2 \text{ m}$ en une seconde sur le plan A, alors qu'elle parcourt $(1+3+5+7+9) \cdot 0,05 \text{ m} = 1,25 \text{ m}$ en une seconde sur le plan B, ce dernier étant donc plus incliné que l'autre.

On écrit ensuite les deux formules du mouvement, $d_A(t)=1,2t^2$ et $d_B(t)=1,25t^2$.

2.5. - Limites de l'adéquation entre l'expérience physique et le modèle mathématique

Comme nous l'avons mentionné à plusieurs reprises, nous sommes confrontés aux limites de l'adéquation entre l'expérience et le modèle.

En effet, l'hypothèse de Galilée correspond à la situation du mouvement libre d'un corps, qui ne serait soumis qu'à son poids et à la force de réaction du plan. Or, la bille est forcément soumise au frottement fluide lié à la résistance de l'air ainsi qu'au frottement sec dynamique lié au contact entre la bille et le plan incliné. Ce frottement sec dépend du coefficient de frottement cinétique (et donc du caractère plus ou moins lisse de notre bille et de

notre plan) ainsi que du poids apparent de la bille, et donc de l'inclinaison du plan (moins le plan est incliné, plus le poids apparent de la bille est élevé).

À cela s'ajoutent les interactions liées à la prise de mesure : à chaque collision avec une clochette, la bille transfère une partie de sa quantité de mouvement à celle-ci, et perd ainsi un peu de vitesse.

Par ailleurs, il n'est pas si évident, à l'oreille, de distinguer si des tintements sont réguliers, d'autant plus quand ils sont en petit nombre, ce qui était le cas ici avec nos cinq clochettes. En outre, la bille accélérant, les collisions avec les clochettes se font de plus en plus fortes, ce qui influence le volume du tintement de celle-ci, ce qui pourrait avoir des effets psychoacoustiques sur la perception par chaque individu.

Tout cela témoigne des limites de la validation expérimentale de l'hypothèse de Galilée : il faudra donc se tourner vers les arguments cinématiques ou mathématiques utilisés dans la section 4.

3. – Retour sur les *Discours et démonstrations* de Galilée

Si la leçon présentée dans cet article s'inspire des travaux de Galilée, la recherche proposée aux élèves à partir de l'exploration du plan incliné dit *de Galilée* est vraisemblablement éloignée de celle que Galilée a réalisée pour établir la loi de la chute des corps. Notre objectif n'est en effet pas d'initier une approche historique des textes de Galilée, mais plutôt d'engager les élèves à un processus récurrent de modélisation pour la construction du modèle fonctionnel du second degré.

Dans son ouvrage *Discours et démonstrations mathématiques concernant deux sciences*

nouvelles, publié en 1638, après avoir étudié les propriétés du mouvement uniforme (à vitesse constante), Galilée commence par imaginer quelles seraient les propriétés du mouvement accéléré le plus simple à ses yeux, c'est-à-dire celui où la vitesse croît linéairement en fonction du temps (accélération constante). Il nomme ce mouvement le « mouvement uniformément accéléré ».

Il commence par prouver que, pour parcourir une même distance en un même temps avec un mouvement uniformément accéléré (partant du repos) et un mouvement uniforme, la vitesse du mouvement uniforme doit être égale à la moitié de la vitesse finale atteinte par le mouvement accéléré. Il prouve ensuite que, dans le cas d'un mouvement uniformément accéléré, les espaces parcourus (depuis la position de repos) en des temps quelconques sont entre eux comme les carrés de ces temps. Dans notre symbolisme actuel, on pourrait exprimer cela en $d(t) \sim t^2$. Il en déduit ensuite que

Si nous prenons successivement un nombre quelconque d'intervalles de temps égaux, à compter du premier instant du mouvement, [...], ces espaces seront entre eux comme les nombres impairs à partir de l'unité, soit 1, 3, 5, 7 ; tel est en effet le rapport des différences entre les carrés [...] (Galilée, 1638/1970, p. 142).

Galilée établit donc la loi des nombres impairs comme un *corollaire* du théorème établissant, pour un mouvement uniformément accéléré, que les espaces parcourus sont entre eux comme les carrés des temps correspondants. Il présente donc un raisonnement *en sens inverse* de celui que nous proposons ici aux élèves.

MODÉLISATION DU MOUVEMENT
SUR UN PLAN INCLINÉ, INSPIRÉE
D'UNE EXPÉRIENCE ATTRIBUÉE À
GALILÉE

C'est seulement ensuite qu'il explique — ou plutôt qu'il fait raconter par son personnage Salvati — que de nombreuses expériences ont été réalisées pour confirmer que ce « mouvement uniformément accéléré », étudié de manière théorique, correspond avec le « mouvement naturellement accéléré », c'est-à-dire celui de la chute des corps tel qu'on peut l'observer dans la nature.

Le dispositif expérimental décrit dans l'ouvrage de Galilée ne mentionne pas de clochettes. On peut néanmoins admirer un exemplaire ancien à clochettes, datant du début du XIX^e siècle, au *Museo Galileo* à Florence, ou sur le site web de ce musée, qui précise qu'il n'existe pas de document historique permettant d'affirmer que Galilée a réalisé exactement cette expérience.

Dans les *Discours*, le personnage Salvati décrit le dispositif expérimental (Galilée, 1638/1970, p. 143-144). Il s'agissait d'un plan incliné d'environ 12 coudées dont une extrémité est élevée de 1 ou 2 coudées (une coudée à Florence mesurait alors 0,573 m), dans lequel un petit canal bien lisse était creusé pour y faire rouler une boule de bronze bien arrondie et polie. Pour mesurer le temps précisément pour que la boule parcoure la longueur totale du plan, ou son quart, sa moitié, ses deux tiers ou toute autre fraction, il explique utiliser un seau rempli d'eau percé : la quantité d'eau recueillie dans un récipient, proportionnelle au temps écoulé, pouvait être mesurée assez précisément. Il fait dire à Salvati, pour confirmer que son modèle théorique correspond au mouvement naturel de la chute libre d'un corps :

Dans ces expériences répétées une bonne centaine de fois, nous avons toujours trouvé que les espaces parcourus étaient entre eux comme les carrés du temps.

Notons que la question de savoir si Galilée a effectivement réalisé ces expérimentations est sujet de controverse pour les historiens des sciences (Segre, 1980). Pour des auteurs comme Drake (1973) et Settle (1961), la réalité de ces expérimentations ne fait pas de doute, de même que la possibilité pour Galilée de réaliser ces expérimentations de manière précise avec les moyens techniques de l'époque. Pour d'autres, comme Koyré (1966, p. 154), suivi par Thuillier (1983), rien n'est moins sûr, d'autant que, selon Koyré, Galilée n'avait pas besoin des expérimentations pour formuler sa loi comme en témoignent ces mots de Galilée lui-même (1638/1970, p. 131) :

Quand donc j'observe une pierre tombant d'une certaine hauteur à partir du repos et recevant continuellement de nouveaux accroissements de vitesse, pourquoi ne croirais-je pas que ces additions ont lieu selon la proportion la plus simple et la plus évidente ? [...] ce qui sera le cas si par « uniformément », et, du même coup, « continuellement accéléré » nous entendons un mouvement où en des fractions de temps égales quelconques se produisent des additions égales de vitesse.

4. – Validation de l'hypothèse de Galilée

4.1. - Pourquoi le mouvement d'un corps en chute libre est-il uniformément accéléré ?

Comme cela vient d'être écrit, Galilée a probablement été convaincu, sans faire référence à une expérimentation, que la chute libre des corps est un mouvement uniformément accéléré ; autrement dit, que la vitesse augmente de manière proportionnelle au temps, ou que le taux d'augmentation de vitesse est constant, ou encore que l'accélération est constante. Cette hypothèse est conforme aux lois de la méca-

nique newtonienne (*Principia*, 1687). Ces lois mathématiques établies théoriquement par Newton lui permettent de déduire (et donc d'expliquer) les lois de Kepler du mouvement des planètes, que ce dernier avait établies de manière empirique, à partir d'observations et de mesures (*Astronomia nova*, 1609 et *Harmouices Mundi*, 1619) (« Lois du mouvement de Newton, » 2026 ; « Lois de Kepler, » 2026) .

Voici le raisonnement qui mène à montrer que la chute libre des corps à partir d'une hauteur, qu'on peut considérer petite par rapport au rayon de la Terre, se fait avec une accélération constante.

- Selon la première loi du mouvement de Newton (principe d'inertie), tout corps reste au repos ou en mouvement rectiligne uniforme sauf si une force nette agit sur lui. Dans le cas d'un corps en chute libre ou en mouvement libre sur un plan incliné, il s'agit d'un mouvement accéléré, donc sous l'effet d'une force. La deuxième loi de Newton (principe fondamental de la dynamique) met en relation l'accélération, la masse et la force dans l'équation $F = m a$.
- Selon la loi universelle de la gravitation dite aussi la loi de l'attraction universelle, deux corps ponctuels de masses respectives m_A et m_B s'attirent avec des forces vectoriellement opposées et de même norme. Cette norme, F , est proportionnelle au produit des deux masses, et inversement proportionnelle au carré de la distance qui les sépare :

$$F = \frac{G m_A m_B}{d^2},$$

où G est la constante gravitationnelle.

Pour un petit corps en chute libre proche de la surface de la Terre, on a $m_A = m$, la masse de l'objet considéré et $m_B = m_{\text{Terre}}$, la masse de la Terre. On peut aussi supposer que $d = r_{\text{Terre}}$, le rayon terrestre. En rapprochant les équations

correspondant aux deux lois, on déduit que l'accélération a subie par le corps en chute libre est constante, car

$$a = \frac{G m_{\text{Terre}}}{r_{\text{Terre}}^2}.$$

4.2. - Quelle suite des distances pour les temps égaux faut-il pour que le mouvement soit libre ?

L'accélération constante signifie que les distances parcourues dans les temps égaux par une bille sur un plan incliné augmentent comme une *suite arithmétique* pendant une suite d'intervalles de temps égaux. Mais, toutes ces suites ne conviennent pas pour représenter un mouvement libre donc avec une vitesse nulle au départ.

Considérons, par exemple, la suite des distances 1, 2, 3, ..., de terme initial 1 et de raison 1. Pourrait-elle correspondre aux intervalles de temps égaux ? Dans ce cas, la distance totale parcourue après n unités de temps serait égale à

$$\begin{aligned} d(n) &= 1+2+3+4+\dots+n \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}, \end{aligned}$$

et d'une manière générale à

$$d(t) = \frac{t^2}{2} + \frac{t}{2}.$$

Une telle formule en cinématique est interprétée comme celle d'un mouvement uniformément accéléré avec une vitesse initiale de $\frac{1}{2}$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse d'un mouvement libre dont la vitesse initiale est nulle.

MODÉLISATION DU MOUVEMENT
SUR UN PLAN INCLINÉ, INSPIRÉE
D'UNE EXPÉRIENCE ATTRIBUÉE À
GALILÉE

Quelle suite arithmétique pourra alors modéliser le mouvement libre sur un plan incliné ? Considérons que la bille soit soumise à une accélération constante notée a , ce qui signifie que le taux d'augmentation de vitesse est constant et qu'entre deux unités de temps successives, la vitesse augmente de a . Notons r la distance parcourue par la bille pendant la première unité de temps.

La suite arithmétique des distances parcourues en des temps unitaires successifs est alors de la forme

$$r ; r+a ; r+2a ; r+3a ; \dots ; r+(n-1)a ; \dots$$

La distance $d(n)$ parcourue après n unités du temps est donc donnée par

$$\begin{aligned} d(n) &= nr + \frac{a(n-1)n}{2} \\ &= \frac{an^2}{2} + \left(r - \frac{a}{2}\right)n. \end{aligned}$$

La formule générale pour toutes les autres valeurs du temps devient alors

$$d(t) = \frac{at^2}{2} + \left(r - \frac{a}{2}\right)t.$$

Parmi toutes ces formules, celle qui vérifie la condition

$$r - \frac{a}{2} = 0 \text{ ou } a = 2r$$

correspond au mouvement libre de la bille sur la plan incliné car sa vitesse initiale est nulle.

La suite arithmétique y associée

$$r ; r+2r ; r+4r ; \dots ; r+2(n-1)r ; \dots$$

ou encore, en posant $r = 1$,

$$1 ; 1+2 ; 1+4 ; 1+6 ; \dots ; 1+2(n-1) , \dots$$

est bien celle de l'hypothèse de Galilée.

On peut alors admirer l'intuition de Galilée qui a choisi cette suite comme modèle du mouvement libre, en chute ou sur un plan incliné.

4.3. - Le nombre fini d'étapes d'observations suffit-il pour induire la permanence de la régularité ?

En supposant qu'on veuille valider l'hypothèse de Galilée par l'expérience, se pose néanmoins une question, au-delà des aspects liés à la précision du dispositif et des prises de mesures. Cette question concerne le nombre *infini* d'étapes dont il est question dans l'hypothèse de Galilée, alors que, pratiquement, on ne peut réaliser d'expérience qu'avec un nombre *fini* d'étapes et que les conditions matérielles de l'expérimentation imposent parfois de se limiter à seulement quelques étapes. Un nombre limité d'étapes suffirait-il pour induire la permanence de la régularité ? À certaines conditions, oui. En effet, supposons que soit vrai le rapport 1 : 3 : 5 des trois premières distances parcourues en temps égaux, indépendamment de la première distance et du temps de son parcours. Nous avons formulé ainsi une sorte d'hypothèse de Galilée « affaiblie ». À partir de cette hypothèse, il est possible de calculer les distances correspondant aux valeurs de temps $2^k 3^\ell$, $\frac{2^k}{3^\ell}$, $\frac{3^\ell}{2^k}$, $\frac{1}{2^k 3^\ell}$, quelles que soient les valeurs naturelles des paramètres k et ℓ . Il est possible de démontrer que l'ensemble de toutes ces valeurs est dense dans l'ensemble des nombres réels. En tenant compte du fait que la distance parcourue par la bille en fonction du temps est croissante, il est alors possible de calculer d'une manière univoque les valeurs de

la distance pour toutes les valeurs réelles du temps.

Notons enfin qu'étant donné que le mouvement de la bille est uniformément accéléré, sa formule générale est une formule polynomiale du deuxième degré. Il y a donc trois paramètres à déterminer, on a donc bien besoin de trois conditions à imposer : les trois premières distances successives dans le rapport de longueur 1 : 3 : 5 parcourues pendant un même temps.

Conclusions

L'intérêt de l'hypothèse de Galilée et de la possibilité de son expérimentation matérielle est qu'elles soulèvent chez les élèves plusieurs questions et hypothèses les incitant au travail de modélisation et leur garantissant une certaine autonomie dans ce travail.

Quant au travail de modélisation lui-même, nous avons pu en montrer de multiples facettes, plus particulièrement la récurrence du processus de modélisation : la régularité du mouvement en chute libre modélisée par Galilée par une suite arithmétique particulière, modélisée à son tour par un tableau numérique, suivi du modèle algébrique exprimant la régularité du modèle numérique, toutes ces étapes répondant à des questions engendrées par l'hypothèse de Galilée.

Nous trouvons aussi particulièrement éclairante la réversibilité entre le modèle cinématique d'un mouvement uniformément accéléré et ses modèles mathématiques sous la forme d'une suite arithmétique ou d'une formule du second degré : chacun de ces modèles peut servir d'interprétation pour l'autre modèle.

Le travail de modélisation était une occasion pour une partie d'élèves de rencontrer

pour la première fois les fonctions du second degré sous un aspect inhabituel (passage des premières différences à la formule algébrique), dans un contexte leur fournissant une raison d'être. Pour une autre partie d'élèves, ce contexte a servi à réviser la notion de fonction et les fonctions du second degré.

Terminons par l'avis que le travail de modélisation proposé ici peut être réalisé à des niveaux de conceptualisation différents. Pour cette raison, il se prête bien à être traité dans des classes hétérogènes, dans une optique d'enseignement différencié.

Remerciements

Nous remercions chaleureusement nos collègues du Groupe d'Enseignement Mathématique GEM, en particulier André Malo pour la confection du matériel et Florence Popoff pour l'accueil dans ses classes et la récolte de traces de l'expérimentation. Nous remercions également Thérèse Gilbert (GEM) d'avoir soulevé la question de l'induction de la permanence de la régularité lors de la Rencontre annuelle des Bas-Pays d'octobre 2023 à Leuven, ainsi que Dennis Presotto et Alexander Holvoet (Uitwiskeling) pour leurs recherches sur cette question.

Mariza KRYSINSKA

GEM et LADIMATH ULiège

Laure NINOVE

GEM, Université catholique de Louvain
Haute École Vinci
Louvain-la-Neuve, Belgique

Références bibliographiques

- Groupe AHA (1999). *Vers l'infini pas à pas. Approche heuristique de l'analyse. Manuel pour l'élève*. De Boeck & Larcier.
- Brousseau, G. (1981). Problèmes de didactique des décimaux. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2(1), 37-127.
- Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie : Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x*, 19, 43-72.
- Drake, S. (1973). Galileo's Experimental Confirmation of Horizontal Inertia: Unpublished Manuscripts (Galileo Gleanings XXII). *Isis*, 64(3), 291-305.
- Galilée, G. (1970). *Discours et démonstrations mathématiques concernant deux sciences nouvelles* (M. Clavelin, Trad. et annot.). Armand Colin. (Œuvre originale publiée en 1638).
- Hauchart, C. & Schneider, M. (1996). Une approche heuristique de l'analyse. *Repères-IREM*, 25, 36-62.
- Job, P., Krysinska, M., Schneider, M. (2023). Un enseignement de l'algèbre structuré par la modélisation, du secondaire au supérieur. *Repères-IREM*, 128, 5-38.
- Koyré, A. (1966). *Études Galiléennes*. Hermann.
- Krysinska, M. et Schneider, M. (2010). *Émergences de modèles fonctionnels*. Presses universitaires de Liège.
- Lois du mouvement de Newton (2026, 11 février). Dans Wikipedia.
https://fr.wikipedia.org/wiki/Lois_du_mouvement_de_Newton
- Lois de Kepler (2026, 11 février). Dans Wikipedia.
https://fr.wikipedia.org/wiki/Lois_de_Kepler
- Segre, M. (1980). The role of experiment in Galileo's physics. *Archive for History of Exact Sciences*, 23(3), 227-252.
<https://doi.org/10.1007/BF00357045>
- Settle, T. B. (1961). An Experiment in the History of Science: With a simple but ingenious device Galileo could obtain relatively precise time measurements. *Science*, 133(3445), 19-23.
- Thuillier, P. (1983). Galilée et l'expérimentation. *La recherche*, 143, 442-454. Extraits à cette adresse :
<https://jcmarot.com/wp-content/uploads/2019/05/thuillier.pdf>

Sitographie

<https://catalogo.museogalileo.it/oggetto/PianoInclinato.html> (consulté le 07/02/2025)

Museo Galileo, Piano inclinato.

Annexes

Questions posées aux élèves

Une expérience de Galilée et les questions qu'elle suscite

Le but de l'expérimentation que nous allons réaliser, inspirée des travaux de Galilée (1564-1642), est d'établir la loi du mouvement libre d'une bille sur un plan incliné.

Vous avez à disposition un dispositif construit à la manière de celui qui aurait pu être construit par Galilée. Il s'agit d'un plan incliné sur lequel on peut faire rouler une petite bille et sur lequel on a disposé des petites clochettes, que la bille fera sonner en passant.

Vers le modèle de Galilée

Question initiale : Comment positionner les clochettes de manière qu'elles sonnent régulièrement au passage de la bille qui serait lâchée à l'extrémité du rail ? Formulez et testez sur le dispositif expérimental vos hypothèses.

Relance : Trouver le bon positionnement des clochettes n'est pas simple... Galilée était arrivé à l'hypothèse suivante :

« Les espaces parcourus en des temps égaux par un mobile partant du repos ont entre eux même rapport que les nombres impairs successifs à partir de l'unité ».

Comment placer en pratique les clochettes sur le plan incliné de manière à respecter l'hypothèse de Galilée ? Testez sur le dispositif expérimental si les clochettes tintent bien régulièrement avec la disposition proposée par Galilée.

Variation 1 : Si, au lieu de commencer par un écart de 1, on commençait par un écart de 2, que devraient être les espacements suivants entre les clochettes pour que celles-ci tintent encore de manière régulière ?

Variation 2 : Que se passerait-il si on changeait l'inclinaison du plan ? L'hypothèse de Galilée resterait-elle toujours vérifiée ?

Le mouvement sur un plan incliné particulier

On suppose que le plan est incliné de telle manière que la distance de 1 mètre est parcourue par la bille en 1 seconde.

1. Quelle distance sera parcourue par la bille en 2 secondes ? Et en 3 secondes ?
2. Au temps $\frac{1}{2}$ s, quelle distance aura parcouru la bille, à quelle position sera-t-elle ?
3. Au temps $\frac{1}{3}$ s, à quelle distance de l'origine se situe la bille ? Et au temps $\frac{2}{3}$ s ?
4. Complétez le tableau de nombres avec les résultats obtenus jusqu'à présent.

t (s)	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1	2	3
d (m)							

Quelle régularité pouvez-vous observer dans ce tableau ? Exprimez-la par une formule.

Preuve de la formule pour des valeurs entières : Pour les premiers naturels n , on a calculé que la somme des n premiers impairs était égale à n^2 . Peut-on prouver cette identité pour tout n naturel ?

Des mouvements sur des plans inclinés différents

On veut comparer deux plans inclinés A et B, d'inclinaisons différentes. Quand on lâche une bille sur le plan A, elle parcourt une distance de 0,3 m en 0,5 s. Quand on lâche une bille sur le plan B, elle parcourt une distance de 0,05 m en 0,2 s.

Des deux plans, lequel est le plus incliné par rapport à l'horizontale ?