LA PROPORTIONNALITE
EN CLASSE DE SIXIEME

I.R.E.M. de Besançon

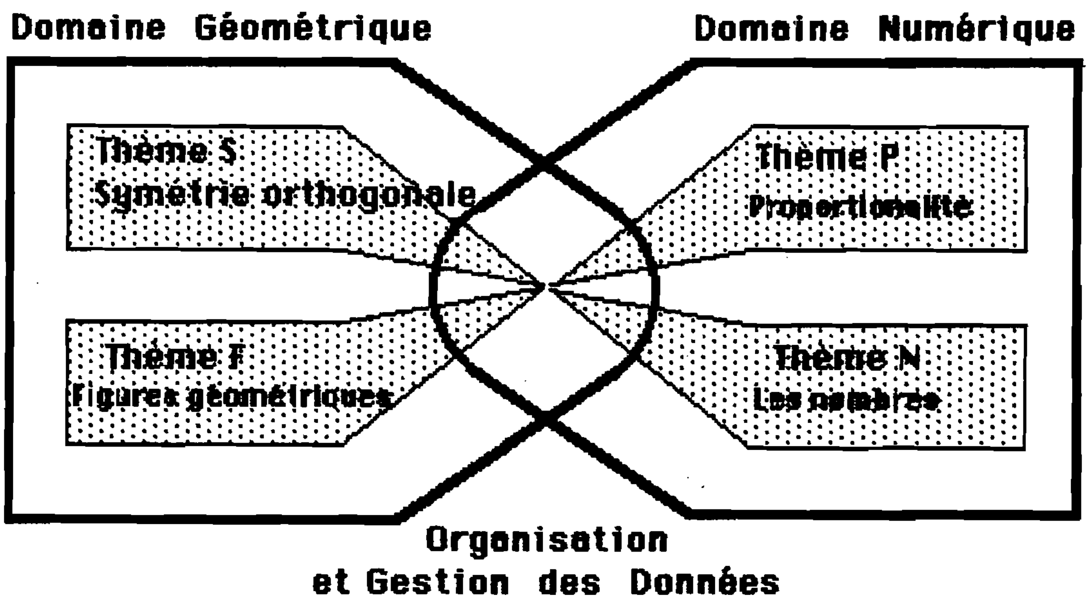
Antoine BODIN
Collège d'Ornans

I - PRESENTATION DE L'ARTICLE.

Au cours de l'année scolaire 85-86, une équipe de l'IREM de Besançon a conçu, et mis à l'essai dans les classes, des situations d'apprentissage et d'évaluation conformes aux programmes 86-87 de la classe de sixième.

Cette équipe était constituée d'une quinzaine d'enseignants dont dix avaient des classes de sixième : en tout 12 classes totalisant 273 élèves dans 5 collèges et 3 départements (Doubs, Haute-Saône et Jura).

Après avoir exploré le domaine géométrique, nous avons abordé le domaine numérique par le biais d'un thème que nous avons baptisé "proportionnalité". Le schéma ci-dessous montre comment ce thème s'insère, selon nous, dans l'organisation des activités de la classe de sixième.



La distinction qui apparaît entre les thèmes du domaine numérique : "proportionnalité" et "les nombres" peut surprendre le lecteur. Cette distinction sera précisée et justifiée au paragraphe suivant.

"petit x" n° 13 pp. 55 à 77. 1987

La réflexion du groupe s'est nourrie de nombreuses études, et en particulier :
- du texte de la COPREM sur la proportionnalité,
- de recherches en didactique des mathématiques et en psychologie,
- des travaux antérieurs de plusieurs IREM,
- des programmes et des instruction officielles, ou du moins ce que l'on a pu en connaître au fûr et à mesure de l'avancement de l'année.

Ce dernier point n'est pas dû à un respect exagéré des normes officielles, mais à la nature même de notre entreprise qui se proposait d'explorer et de tenter de valider des démarches d'enseignement susceptibles d'être utilisées avec profit au cours des années ultérieures. En ce qui concerne les autres points, nous avons fait de nombreux emprunts aux uns et aux autres qu'il ne sera pas toujours possible de signaler avec suffisamment de précision dans ce court article.

Nous n'avons pas mené une recherche en didactique, nous avons simplement cherché à mettre en place et à gérer, dans douze classes, un enseignement qui ait une certaine cohérence. La réalité est toutefois multiforme et hasardeuse à décrire dans ses aspects qualitatifs et relationnels. Après notre analyse a priori du thème, on se bornera à présenter ici une évaluation des préacquis des élèves, les situations d'apprentissage que nous avons utilisées, et enfin l'évaluation terminale. Le rapport intégral contient d'autres éléments et en particulier les carnets de bord des professeurs (IREM de Besançon 1986).

II - ANALYSE PREALABLE.

Le texte de la COPREM, "l'enseignement de et autour de la proportionnalité" (COPREM, mars 84) contient une analyse détaillée de trois points de vue : point de vue mathématique, point de vue épistémologique et point de vue didactique. Etant essentiellement en accord avec ces analyses et avec les conséquences que la COPREM en tire en ce qui concerne l'organisation de l'enseignement, nous avons essayé de traduire de façon opérationnelle, au niveau de la classe de sixième, les recommandations de ce document d'orientation qui concerne l'enseignement de la proportionnalité dans tout le cycle secondaire. Nous renvoyons donc le lecteur à ce texte qui à nos yeux est essentiel et nous signalons qu'il est disponible dans tous les IREM. Nous ne développerons de notre côté que quelques un des éléments que nous avons pris en compte.

De nombreuses recherches ont mis en évidence le décalage considérable existant actuellement entre la maîtrise du modèle formel de la proportionnalité et la capacité à l'utiliser dans une situation particulière. Ce décalage serait plus grand que dans le cas d'autres domaines conceptuels et il semblerait que, pour que des transferts puissent s'effectuer, ou encore pour que le modèle apparaisse comme un "outil adapté" à la situation, il soit nécessaire qu'un schème mental particulier se soit développé chez l'enfant : le schème de la proportionnalité dans la théorie opératoire de Piaget. Nous parlerons par la suite de raisonnement proportionnel pour caractériser les opérations mentales que l'enfant effectue, dans des situations concrètes ayant un rapport avec la proportionnalité, sans référence explicite ou implicite à un modèle enseigné. L'activation et le développement du raisonnement proportionnel sont sans doute des passages obligés si l'on veut que le modèle théorique, qui peu à peu s'en dégagera, ait quelque chance d'être opérationnel, c'est-à-dire de fonctionner comme outil et non de constituer un nouvel objet sans pouvoir sur les situations rencontrées.

Ainsi, il ne suffit pas de considérer un tableau de nombres abstraits sous l'angle de la proportionnalité pour être capable de résoudre une situation relevant de la même structure. On observe des enfants pour lesquels les coefficients de proportionnalité ne semblent plus avoir de secrets mais qui sont tout à fait incapables de les utiliser dans une situation de problème. Même dans le cas d'un coefficient entier, ils recherchent, dans le meilleur des cas, des procédures mettant en jeu implicitement l'aspect isomorphisme (et non l'aspect fonctionnel) révélant ainsi le type de raisonnement proportionnel dont ils sont capables. L'enfant ne reconnait pas la situation comme susceptible d'être traitée avec le modèle, dont il dispose cependant, mais qui n'affleure pas au niveau conscient. Il peut aussi se produire un conflit entre le modèle appris et, peut-être, assimilé à un certain niveau de représentation, et le calcul relationnel dont l'enfant est capable dans un autre plan de représentation. (Vergnaud G., 1976) ; le passage, ou transfert, d'un plan à un autre, ne se faisant pas spontanément pour l'instant.

Enseigner, exposer, imposer le modèle formel de la proportionnalité permet seument d'installer, chez certains élèves, des connaissances formelles auxquelles ils n'attribuent aucun pouvoir d'action sur les situations (c'est tout le problème du sens qui se trouve ainsi posé). La capacité à traité et résoudre des situations d'origine concrète, portant sur des grandeurs, est pourtant l'un des objectifs de l'enseignement des mathématiques au collège, il est certain qu'actuellement cet objectif n'est pas atteint (Bonnet, 1979).

Partant de l'idée que le concept de proportionnalité concerne les grandeurs avant de concerner les nombres (abstraits), que les nombres eux-mêmes sont issus du réel et sont des mesures avant de devenir des entités abstraites, il nous semble naturel de proposer des situations d'apprentissage à base de situations mettant en jeu des grandeurs. De telles situations permettent une mise en place progressive du modèle proportionnel, elles permettent simultanément, de façon interactive, de dégager les notions de fractions, de nombre rationnel, les faisant d'abord apparaître comme des réponses à des questions qui se posent réellement. De plus, elles favorisent un contrôle constant du sens. Le passage au niveau formel devra sans doute se faire à terme, mais d'une façon qui leur assurera un passage facile d'un plan de représentation à un autre.

Nous avons adopté le principe selon lequel **"la situation de problème est la source et le critère du savoir" (Vergnaud, 1981)**, ou encore **"le seul moyen de faire des mathématiques c'est de chercher et résoudre certains problèmes spécifiques et à ce propos de poser de nouvelles questions. Le maître doit donc effectuer non la communication d'une connaissance, mais la dévolution du bon problème" (Brousseau, 1984)**. C'est ce que nous avons essayé de faire en étant conscient de n'y être qu'imparfaitement parvenus. Les recherches qui se poursuivent dans plusieurs IREM (Montpellier, 1986) permettront sans doute de disposer d'une batterie de situations dont on connaîtra de mieux en mieux les effets

Travaillant plus spécialement sur l'évaluation, et cherchant à opérationnaliser les objectifs, il nous a semblé indispensable de distinguer deux thèmes dans le domaine numérique le thème **P** "proportionnalité" et le thème **N** "les nombres".

Par exemple n et p désignant des entiers inférieurs à 1 000 :

la capacité de trouver le prix unitaire sachant que le prix de n articles est p francs relève du thème **P**,tandis que la capacité à résoudre l'équation n x ☐ = p, relève du thème **N**.

Il doit être clair que ces deux capactités ne sont pas équivalentes et qu'il faut se garder de les confondre.

Conformément à l'analyse précédente, nous pensons qu'en classe de sixième l'accent doit porter davantage sur le thème **P** considéré comme le thème d'apprentissage privilégié tandis que le thème **N** sera en particulier le thème d'institutionnalisation de quelques propriétés des nombres, propriétés qui se seront dégagées du thème **P**. Si la distinction est importante en ce qui concerne le repérage des capacités des élèves, les deux thèmes entretiennent des rapports constants au niveau des situations d'apprentissage, mais aussi au niveau des compétences des élèves. On sait par exemple que la façon dont un enfant se représente un problème du thème **P** dépend de son instrumentation au niveau du thème **N** (Richard, 1984). Le thème **N** contient aussi les activités concernant la maîtrise des algorithmes (calcul mental, à la main, et en utilisant une calculatrice).

La maîtrise de la proportionnalité suppose la capacité d'identifier une situation de proportionnalité parmi d'autres. Nous avons donc été conduits à inclure dans le thème **P** les situations relevant d'un autre modèle. Cette façon de faire a l'avantage de réduire les risques d'installation de stéréotypes.

- toute situation relève de la proportionnalité,
- la règle de trois permet de résoudre tous les problèmes,
- toutes les représentations graphiques sont des droites, etc.

Il nous semble important que, dès le début, les situations d'apprentissage mèlent les situations additives et les situations multiplicatives, celles relevant de la proportionnalité et celles n'en relevant pas,... ainsi que les divers modes de représentations : tableaux, graphiques...

Les élèves de sixième ont rencontré le mot "proportionnalité" au CM_2, il est donc normal qu'ils l'utilisent. On ne cherchera pas pour autant à le définir plus rigoureusement. Les notions d'échelles et de pourcentages ne sont plus au programme du CM_2 ; en sixième il n'est question que "d'appliquer un taux de pourcentage", et les échelles sont reportées en cinquième. Cependant, les élèves ont déjà rencontré ces notions, ne serait-ce que dans leur vie quotidienne : elles sont utilisées dans d'autres disciplines et les thèmes transversaux ne manqueront pas d'y faire appel. Il paraît donc raisonnable de les utiliser dès les premières situations rencontrées ; là encore, aucune formalisation n'est à envisager.

Lorsque nous parlons de situations d'apprentissage, nous pensons aux "bons problèmes" de G. Brousseau, ceux qui conduisent à des conflits cognitifs, qui amènent à poser de nouvelles questions, à construire de nouveaux outils. Il faut se garder de confondre de telles situations avec des situations d'évaluation. Certes, on a tout à gagner à y introduire des éléments d'évaluation formative (et d'auto-évaluation), mais à condition qu'il n'y ait pas de confusion avec l'évaluation sommative : la note, attribuée avec une intention formative, qui n'est qu'un indicateur de progression de l'élève (progression au sens de cheminement plutôt que d'amélioration), mais qu'on conserve soigneusement pour l'intégrer à une moyenne de fin de trimestre.

Le point de vue des instructions officielles.

Il faut noter que les "compléments aux programmes" n'utilisent le mot proportionnalité qu'avec réticence à propos de l'enseignement en sixième, pour y insister davantage en cinquième, soulignant ainsi la progressivité que l'on souhaite instaurer en ce qui concerne les acquisitions liées à ce domaine. En sixième, ils insistent davantage sur l'importance de la résolution de problèmes : "**la résolution de problèmes concrets** constitue l'objectif fondamental... l'activité de résolution doit sous-tendre l'ensemble des travaux numériques". Notre façon d'aborder le thème **P** nous semble être tout à fait en accord avec ces recommandations.

Les objectifs.

Nous n'avons pas produit d'opérationnalisation fine du thème. Dans un document préparatoire, nous précisions simplement qu'il visait à développer chez les élèves :

- la capacité à analyser des situations concrètes présentées sous forme de texte éventuellement mêlé à des représentations diverses. Cette capacité concerne :

- la recherche de l'information pertinente,
- la schématisation,
- la traduction dans le propre langage de l'élève,
- l'aptitude à s'interroger sur la situation : "quelle question peut-on poser ?",
- la capacité à modéliser la situation en utilisant des tableaux, des graphiques, des opérateurs...
- la capacité à traiter une situation : choix des algorithmes de résolution, effectuation des calculs en utilisant un moyen adapté : calcul mental, calcul écrit, calculatrice. Respect des unités, contrôle de la vraisemblance des résultats... Le regard reste tourné vers la signification de la situation et non vers l'utilisation d'un modèle formel.

III - LES PREACQUIS DES ELEVES.

Voulant prendre en compte les connaissances préalables des élèves, nous nous sommes intéressés à la liaison école-collège. Deux instituteurs de CM_2 ont participé à l'ensemble de notre travail et nous ont aidés à analyser les programmes et les pratiques de l'école élémentaire. En particulier nous avons essayé de faire l'inventaire des savoirs des enfants entrant en sixième. Pour cela, les évaluations du SPRESE (Service de la Prévision et de l'Evaluation du Système Educatif du Ministère de l'Education Nationale, ainsi que certaines recherches de l'INRP ont fourni des points de repère précieux.

Le test de positionnement que l'on trouvera dans les pages qui suivent est construit à partir des questionnaires du SPRESE et de l'INRP. Nous nous sommes donnés ainsi la possibilité de repérer nos élèves par rapport à une population représentative de certains niveaux scolaires : CE_2, CM_2 ou 6ème selon les cas. Les résultats à ce test, que l'on trouvera plus loin, montrent que notre groupe d'élèves est d'un niveau supérieur à ce que l'on pouvait attendre. Plusieurs explications sont possibles :

- notre groupe n'est peut-être pas représentatif des élèves de sixième 85-86,
- le niveau moyen des élèves de 6ème et de CM_2 s'est élevé depuis les évaluations de référence,
- nous avons abordé officiellement ce thème au mois de mars et les collègues n'ont heureusement pas attendu cette époque pour proposer à leurs élèves certaines activités du domaine numérique.

La première explication est peu vraisemblable et nous croyons plutôt à une conjonction des deux autres. De toutes façon, la mise en route tardive du thème, due à des questions d'organisation, est regrettable. Il nous semble important de commencer les activités du domaine **P** au premier trimestre et de les poursuivre tout au long de l'année en alternant des temps forts et des temps faibles.

En faisant passer ce test, nous avions en particulier le souci de repérer les procédures utilisées. Nous avons ainsi eu confirmation du fait que les procédures additives sont les plus fréquemment employées, mais nous avons eu la surprise de trouver un taux à peine inférieur de procédures de passage à l'unité ou "règle de trois", même dans le cas où il s'agit de passer du prix de quatre places de cinéma au prix de huit places (voir les résultats). Le faible taux de réussite, attendu, aux questions mettant en jeu division ou un pourcentage nous a incité à la prudence. Une pratique trop répandue consiste en effet à mettre les enfants en échec dès leur arrivée en sixième, à cause justement de ces notions. Cela ne peut que nous inciter à utiliser largement les calculatrices dans le thème **P**, **"pour ne pas détourner ces exercices de leur but véritable : le traitement d'un certain nombre de données, et la reconnaissance des opérations à mettre en œuvre" (COPREM, 1984)**. Bien sûr, des séances de calcul mental, de calcul à la main, et aussi de calcul à la machine, hors situation de problème, devront aussi avoir lieu parallèlement (thème N).

Voici donc ce test et les résultats.

NOM : ________ Etablissement · ________ Epreuve Po.P

Prénom · ________ Classe : ________ Page 1

Pour faire les questions suivantes , utilise une feuille de brouillon sur laquelle tu mettras ton nom . Cette feuille sera ramassée à la fin de l'épreuve . Pour les questions 3,4,5,6,7 , explique ta solution sur la feuille du test . Tu peux compléter sur la feuille de brouillon si tu manques de place .

(1) La caissière du cinéma REX a fabriqué un tableau indiquant le prix à payer selon le nombre de personnes.

1. *COMPLÈTE-le*

Nombre de personnes	Prix à payer
2	___ F
3	54 F
4	72 F
5	___ F
6	108 F
7	126 F
8	___ F
9	___ F
10	___ F

2. *EXPLIQUE comment tu as fait pour calculer le prix pour*

5 personnes : ________________

____

____

8 personnes : ________________

____

____

2 La recette des crêpes pour 4 et pour 6 personnes est donnée dans le tableau .

Ecris dans le tableau la recette pour 10 , 8 et 2 personnes .

Nombre de personnes	oeufs	farine en g.	verres de lait
4	2	200	4
6	3	300	6
10			
8			
2			

3 J'achète 3,70 mètres de tissu à 9,50 F le mètre .
Combien dois-je payer ?

Réponse :

4 Pour 4,40 F j'achète 1,6 kg de pommes de terre .
Combien coûte le kilogramme de pommes de terre ?

Réponse :

5 Un fermier possède 5 vaches qui produisent chacune en moyenne 23 litres de lait par jour pendant les 180 meilleurs jours de l'année .

Quelle quantité de lait obtient-il de ses vaches pendant cette période ?

Réponse :

(6) Un cyclomoteur coûte 1 050 F.

1ercas : si l'on paie comptant on bénéficie d'une remise de 3%

2èmecas si l'on achète à crédit on verse 300 F à la livraison
et on paie 200 F par mois pendant 4 mois.

A combien le cyclomoteur revient-il dans le 1er cas ?

A combien le cyclomoteur revient-il dans le 2èmecas ?

Quel est le cas le plus intéressant ?

Quelle économie réalise-t-on ?

(7) Un commerçant reçoit une citerne de 15 hl de vin.
Il met son vin dans des bouteilles de 75 cl.
Il range les bouteilles dans des casiers de 150 bouteilles.

Combien lui faudra-t-il de casiers pour ranger toutes ses bouteilles ?

Réponse :

(8) Une corde mesure 1,4 mètres ; elle mesure ☐ centimètres.

Ce paquet pèse 4 570 grammes ; il pèse ☐ kilogrammes.

Ma cassette dure 1 heure et demie ; elle dure ☐ minutes.

Résultats du test de positionnement "proportionnalité"

Résultats concernant 10 classes

et 254 élèves

1	Prix pour 2	87	**Taux de réussite conjointe aux 7 questions : 69%**
	Prix pour 5	91	Les évaluations du SPRESE, au CE2, en 1981 (2600 élèves), et au CM2, en 1983 (4500 eleves), donnaient, pour la même réussite conjointe :
	Prix pour 8	88	**CE2 : 26%**
	Prix pour 9	86	**CM2 : 59%**
	Prix pour 10	86	
	Explication pour 5 : correcte	86	
	Explication pour 5 : procédure additive	50	
	Explication pour 5 : règle de trois	37	
	Explication pour 8 : correcte	88	
	Explication pour 8 : procédure additive	47	
	Explication pour 8 : règle de trois	30	
	Explication pour 8 : procédure multiplicative	12	
2	recette pour 10	92	**réussite au 3 item : 87%**
	pour 8	91	Sprese 81 → CE2 : 45%
	pour 2	90	
3	procedure correcte	85	SPRESE CM2 81 : 90 ; 6ème 80 : 80
	resultat exact	64	SPRESE CM2 81 : 53 ; 6ème 80 : 34
4	procedure correcte	47	SPRESE CM2 81 : 58 ; 6ème 80 : 37
	résultat exact	26	SPRESE CM2 81 : 29 ; 6ème 80 : 12
5	procédure correcte	64	Question posée par VERGNAUD en 6ème,en 1978 : 76% de réussite (84 élèves)
	résultat exact	50	
6	prix de revient 1er cas	13	
	prix de revient 2ème cas	62	← 46% question posée dans une enquète de l'INRP, au CM2 en 1977, et portant sur 3600 élèves.
	le plus interessant	51	
	économie	15	
7	14 casiers	16	← 10% question posée au CM2 par l'INRP
	13 casiers	12	
	erreur de conversion	09	
8	140 cm	82	SPRESE CM2 81 : 76 ; 6ème 80 : 65
	4.570 kg	75	SPRESE CM2 81 : 75 ; 6ème 80 : 69
	90 mn	83	SPRESE CM2 81 : 75 ; 6ème 80 : 68

Résultats en pourcentage de réussite

IV - LES SITUATIONS.

Nous avons rassemblé une vingtaine de situations de problème en essayant de couvrir une variété aussi large que possible de formes d'énoncés. Certaines situations sont présentées dans le cadre numérique, d'autres dans le cadre géométrique ou dans le cadre graphique. Dans certains cas, le texte est prépondérant et peut comporter des données inutiles, dans d'autres cas, le texte est absent ou réduit au minimum.

Nous avons distingué deux types de situations :
situation de type A : elles contiennent un questionnement explicite,
situation de type B : le questionnement y est laissé à l'initiative des élèves.

On trouvera en annexe les énoncés proposés, certains sont empruntés à d'autres travaux, en particulier au document de l'IREM de Rennes : Français-mathématiques (IREM de Rennes, 1985). Nous ne donnons ces énoncés qu'à titre indicatif, la plupart d'entre eux méritent d'être améliorés, les enseignants avaient d'ailleurs la liberté de les modifier et même de remplacer ceux qui ne leur convenaient pas par d'autres mieux adaptés à leur goût ou a l'état de leur classe. La plupart des collègues les ont cependant utilisés tels quels en en ajoutant d'autres.

Le tableau ci-dessous propose un classement des énoncés. Il est clair que chacune des situations peut être remplacée par une situation équivalente et que l'on a intérêt à chercher une meilleure ouverture du tableau.

TYPOLOGIE des SITUATIONS et CLASSEMENT des ENONCES

	cadre numérique	cadre graphique	cadre géométrique	autre
Situations additives	A2 /			
Situations non-additives et de non proportionnalité	A5 A11 / B2	/ B7		
Proportionnalité simple (isomorphisme de mesure)	A3 A7 / B1	/ B7	A4 A8 / B5	/ B6 B8
Composition de proportionnalités	A6 / B4			/ B8
Double proportionnalité (produit de mesures)			A12 / B5	
Triple proportionnalité			A10 A12 /	
Situations mixtes (additives et multiplicatives)	A1 A9 / B3	A9 /		

Fournir des énoncés ne suffit pas à décrire des situations d'apprentissage, l'énoncé n'est en fait que l'un des paramètres de la situation. Il faudrait aussi considérer :

- la façon dont la classe est organisée, travail individuel ou en groupe, avec ou sans échanges entre les groupes etc.,
- les interventions de l'enseignant, sa façon de prendre en compte les questions des élèves, leurs réussites et leurs erreurs, de relancer la recherche en provoquant des variations des variables didactiques de l'énoncé (faire remplacer des nombres entiers par des nombres décimaux, amener à changer de cadre...),
- les moments d'institutionnalisation et les contenus de savoir ainsi fixés.

Il n'est pas possible de rendre compte de l'ensemble de ces éléments, ne serait-ce que parce que chacun des enseignants a été conduit à des adaptations en fonction de son caractère, de sa propre vision du thème et aussi des réactions de ses élèves. Dans l'ensemble, le plan proposé qui prévoyait une organisation du thème en six séquences a été suivi. Une séquence étant une unité d'enseignement ayant une certaine cohérence et pouvant utiliser plusieurs "heures" de cours. Deux séquences consécutives d'un même thème peuvent être entrecoupées par des séquences d'un autre thème. Voici ce plan tel qu'il avait été convenu lors de la préparation commune.

Organistion des séquences.

Les énoncés sont présentés sur des fiches au format A5, l'élève peut les coller séparément sur des fiches de papier fort et se constituer ainsi une collection de situations peu à peu connues de lui et sur lesquelles il pourra revenir. D'autres énoncés proposés par l'enseignant ou produits par les élèves dans la séquence n° 3 viendront selon les cas se substituer à certains de ceux prévus initialement ou compléter la collection. Chaque énoncé est muni d'un sigle et porte un nom, ce qui devrait faciliter son identification.

Séquence n° 1.

Etude individuelle de situations de type A : A1, A2 et A3, confrontation des résultats par groupes de quatre élèves, intervention ponctuelle de l'enseignant qui favorise la réalisation et l'utilisation de tableaux et de graphiques et qui incite éventuellement à modifier les variables en présence une fois que le groupe s'est approprié un énoncé et a résolu la situation dans la forme proposée, il est possible de faire passer d'un coefficient entier à un coefficient décimal ou fractionnaire, de modifier la "taille" des nombres, de transformer une question conduisant à une multiplication à une question conduisant à une division, etc.

Dès cette première séquence, les calculatrices sont utilisées, mais il convient de veiller à ce que les élèves conservent des traces de leurs calculs et que, peu à peu, ils prennent l'habitude d'organiser ces calculs avant de les effectuer. Des séquences spécifiques d'utilisation rationnelle des calculatrices devraient toutefois être prévues à d'autres moments.

Séquence n° 2.

Même type de travail pour les énoncés allant de A4 à A8, A4 par exemple peut être l'occasion d'un changement d'échelle : "quelles seraient les dimensions d'une maquette de la maison dont la largeur serait 65 cm ?", d'un travail sur les décimaux, de l'utilisation du facteur constant des calculatrices.

A8 peut être l'occasion d'utiliser les écritures fractionnaires.

Séquence n° 3.

Les élèves, par groupes de quatre, fabriquent des énoncés (par exemple deux par groupe) et rédigent leur solution. Il faudrait que l'un au moins des énoncés soit produit en classe, sans utilisation de documents, un autre pourrait être fabriqué à la maison ou au C.D.I. et utiliser diverses ressources documentaires.

Les énoncés ainsi produits sont ensuite proposés, par permutation, aux autres groupes. Les résultats sont ensuite mis en commun, par exemple sous forme de posters. On pourra envisager une évaluation des solutions par les auteurs des problèmes, ce qui pourrait être une bonne occasion de communiquer, à la classe, une grille d'évaluation et de permettre aux élèves de comprendre et d'intégrer les critères utilisés, particulièrement ceux qui ne se résument pas à JUSTE ou FAUX.

Séquence n° 4.

Même type d'organisation que pour la séquence n° 2, mais avec les énoncés A8 à A12.

Séquence n° 5.

Etude d'abord individuelle, puis en groupe de quatre élèves, des énoncés de type B. Une situation est décrite, mais le questionnement est absent. Les élèves devront en quelque sorte interroger la situation. "Quelles questions peut-on poser ?". Bien sûr, ils devront ensuite répondre à ces questions.

Séquence n° 6.

Individuellement ou en groupe, reprise de l'ensemble des énoncés de type A et B, et recherche de critères de classement. Il ne s'agit bien entendu pas de faire reproduire la typologie qui a été proposée page 64 pour les enseignants, mais de laisser les élèves élaborer eux-mêmes des critères.

Le but est de permettre aux enfants de :
- reconnaître une situation de proportionnalité,
- reconnaître une situation de non proportionnalité,
- dans le cas d'une situation de proportionnalité, distinguer les cas ou le coefficient de proportionnalité est entier, décimal ou fractionnaire,
- repérer les cas où un tableau ou un graphique constitue une aide à la résolution,
- etc.

Gestion du temps et contenus abordés.

Nous n'avions pas proposé, a priori, une durée précise pour l'ensemble de ces séquences, la plupart des collègues y ont consacré environ huit semaines. Rappelons que nous avons mis ce thème en route trop tard dans l'année et que des activités du domaine numérique avaient été faites avant. Dans de meilleures conditions, et dans la mesure où les prolongements nécessaires seront donnés à chacune des situations, ce thème à lui seul peut recouvrir plus de la moitié du programme de sixième, il est donc inutile de chercher à le minuter davantage.

L'ensemble des situations permet en effet d'**introduire ou de faire fonctionner** les contenus suivants (les guillemets indiquent des extraits du programme) :
- les "techniques opératoires (mentales ou écrites) sur des nombres entiers ou décimaux",
- les "procédés de calcul approché : troncature et arrondi ; ordre de grandeur d'un résultat",
- les "opérateurs constants d'une calculatrice",
- les "opérateurs",

- les "changements d'unités",
- la description de "situation par un tableau ou par des représentations graphiques",
- "l'initiation aux écritures littéraires (exemples : formules d'aires...)".

Certaines sont plus propices à des exploitations particulières :

- "écriture fractionnaire des décimaux et opérateurs +, -, x" : A5, A7, A8, B8,
- "critères de divisibilité par 2, 3, 5, 9" : B8 (en modifiant le nombre de dents),
- "quotient de deux décimaux, écriture a/b ; approximations de ce quotient" : A4, A8,
- "équations du type $23 \times \square = 471{,}5$, ou $\frac{2{,}05}{\square} = 8{,}2$: A4, A7, A8.
- "applications d'un pourcentage à une valeur" : A1, B3, B6,
- "relevés statistiques" : ...
- "calcul du périmètre et de l'aire d'un rectangle" : A8, A10, B5,
- "longueur d'un cercle" : B8, en remplaçant les engrenages par des poulies,
- "volume d'un parallélépipède rectangle" : A10, A12.

Observations diverses.

On trouvera dans les carnets de bord des enseignants des comptes rendus détaillés du déroulement des séquences (IREM Besançon, 1986). Nous avons surtout voulu présenter dans cet article une proposition d'organisation d'activités autour d'un des thèmes fondamentaux du domaine numérique. L'observation de ces situations n'a été qu'ébauchée, il semblerait que les élèves soient davantage motivés et intéressés que dans une situation plus classique. Par contre, les collègues, bien que volontaires et ayant participé à l'organisation des séquences ont souvent du mal à respecter le rythme des élèves, ils sont tentés d'accélérer les acquisitions en imposant des méthodes : coefficient de proportionnalité (précocément), règle du produit en croix, etc. On ne passe pas sans douleur ou du moins san hésitation d'un enseignement magistral à un enseignement organisé à partir de l'activité des élèves. Certains collègues, dans leur compte rendu précisent qu'ils se sentent plus à l'aise lorsqu'ils "reprennent la classe en main" et font un cours plus traditionnel. Souvent, cependant, après avoir franchi le pas ils se disent heureusement surpris de l'intérêt manifesté par les élèves et se déclarent prêts à poursuivre dans cette voie.

V - L'EVALUATION TERMINALE.

Des évaluations intermédiaires ont été faites par les collègues, mais de façon non coordonnée, nous le regrettons maintenant, car cela nous empêche de relier les savoirs terminaux aux savoirs manifestés lors du test de positionnement.

Lors de la préparation de l'évaluation terminale, nous avons eu le souci d'éviter deux écueils opposés :

- retomber dans le morcellement des questions, qui permet, sans doute, de repérer les savoirs au niveau des micro-objectifs, mais qui ne permet pas de savoir dans quelle mesure l'élève est capable d'investir ces savoirs dans une tâche complexe. D'ailleurs, on pouvait considérer que ce repérage des micro-capacités étant fait au jour le jour dans le cadre de l'évaluation formative, il était de peu d'intérêt de le refaire au stade terminal.

- trouver une "belle situation" mettant a priori à l'œuvre l'ensemble des savoirs mis en place au cours des situations d'apprentissage et les intégrant aux savoirs antérieurs, mais plaçant massivement les élèves en situation d'échec. Une telle situation ne permettant pas de faire un bilan.

Nous voulions une situation d'évaluation susceptible de rendre compte d'une certaine maîtrise de la proportionnalité, dans une situation signifiante, présentant une certaine cohérence, ce qui rendait plus difficile le contrôle de certaines capacités auxquelles nous tenions pourtant. L'épreuve finalement retenue est le résultat de compromis. En particulier elle ne permet pas de savoir si l'élève distingue une situation de proportionnalité parmi d'autres de types différents.

Il nous a paru important de préciser, dans cet article, comment nous avons essayé de contrôler l'effet de notre enseignement. On trouvera donc l'épreuve ainsi que les résultats dans les pages suivantes. Le temps était limité à 50 minutes et les calculatrices autorisées.

L'épreuve était sans doute trop longue, les élèves ont bien réussi la première partie portant sur l'exploitation des graphiques mais sont rarement allés plus loin. Les résultats aux questions 4 - 5 et 6 ne sont certainement pas significatifs des capacités des élèves, le taux de non-réponse y est supérieur à 50%. Il faut aussi signaler que l'épreuve a été passée au mois de juin, à une époque où la mobilisation des élèves n'est plus évidente. Nous comptons réutiliser cette épreuve cette année, mais sans limitation de temps et en la complétant par un questionnaire plus classique.

VI - CONCLUSION.

En guise de conclusion, voici un énoncé.

On suppose que la durée de vie d'une lampe à incandescence, dont le prix d'achat est de 4,50 F., est de 1 500 heures, et que celle d'un tube fluorescent, qui coûte 62 F., est de 15 000 heures.

En supposant que le prix du courant électrique consommé pendant dix heures, est respectivement 0,82 F. pour la lampe et 0,20 F. pour le tube, quel est l'appareil le plus économique ?

Cet exercice a été donné dans l'une de nos classes de sixième, par le professeur de physique, quinze jours après la rentrée 86, en devoir à faire à la maison. Il est en effet extrait d'un manuel de physique conforme aux nouveaux programmes de cette discipline. Pour ce collègue, comme sans doute pour l'auteur du manuel, il n'y avait là qu'un petit exercice, de calcul élémentaire, que tout élève devait être capable de faire en sortant du CM_2. On pourrait aussi citer, dans d'autres disciplines, des exercices mettant en jeu les échelles ou les pourcentages, et considérant implicitement qu'il s'agit là d'acquis normaux des élèves arrivant en sixième. Or, ni les programmes de l'école élémentaire, ni les capacités réellement observées chez les élèves ne permettent de tels raccourcis.

Dans cet article, nous n'avons pas voulu présenter un modèle, mais plutôt un témoignage sur des réflexions et sur des pratiques. Compte tenu de l'aspect utilitaire de la proportionnalité (on a pu dire que 90% des problèmes de la vie courante étaient des problèmes de proportionnalité), il nous paraît maintenant indispensable que la réflexion se poursuive dans les établissements en concertation avec les collègues des autres disciplines. Il serait en effet paradoxal, et incompréhensible par les élèves et par leurs parents, que le profeseur de mathématiques cherche à faire élaborer progressivement des notions et concepts que d'autres considèrent comme déjà formalisés.

"TEST TERMINAL"

IREM de BESANCON

NOM :
Prénom

Dans un restaurant d'entreprise, le chef cuisinier utilise le graphique joint. Ce graphique indique les quantités de produits necessaires pour un repas en fonction du nombre de personnes .

1) **Utilise ce graphique** pour remplir le tableau suivant

	nombre de personnes	quantité nécessaire en kg
fromages	120	
salade	100	
terrine		14
rôti de bœuf		15
pommes de terre		24

2) **A l'aide du graphique**

a) donner approximativement la quantité de pommes de terre à prévoir pour 25 personnes.

b) Quel est approximativement le nombre de personnes que l'on peut servir avec 14 kg de rôti de bœuf ?

c) Quel est approximativement le nombre de personnes que l'on peut servir avec 4,5 kg de salade ?

3) Il faut 9 kg de fruits pour 50 personnes. Trace la droite représentant le nombre de personnes que l'on peut servir en fonction de la quantité de fruits disponible.

4) **Calculer** :

a) la quantité de pommes de terre nécessaire pour 137 personnes?

b) le nombre de personnes que l'on peut nourrir avec 5,4 kg de fruits ?

c) le nombre de personnes que l'on peut nourrir avec 100 kg de fruits ?

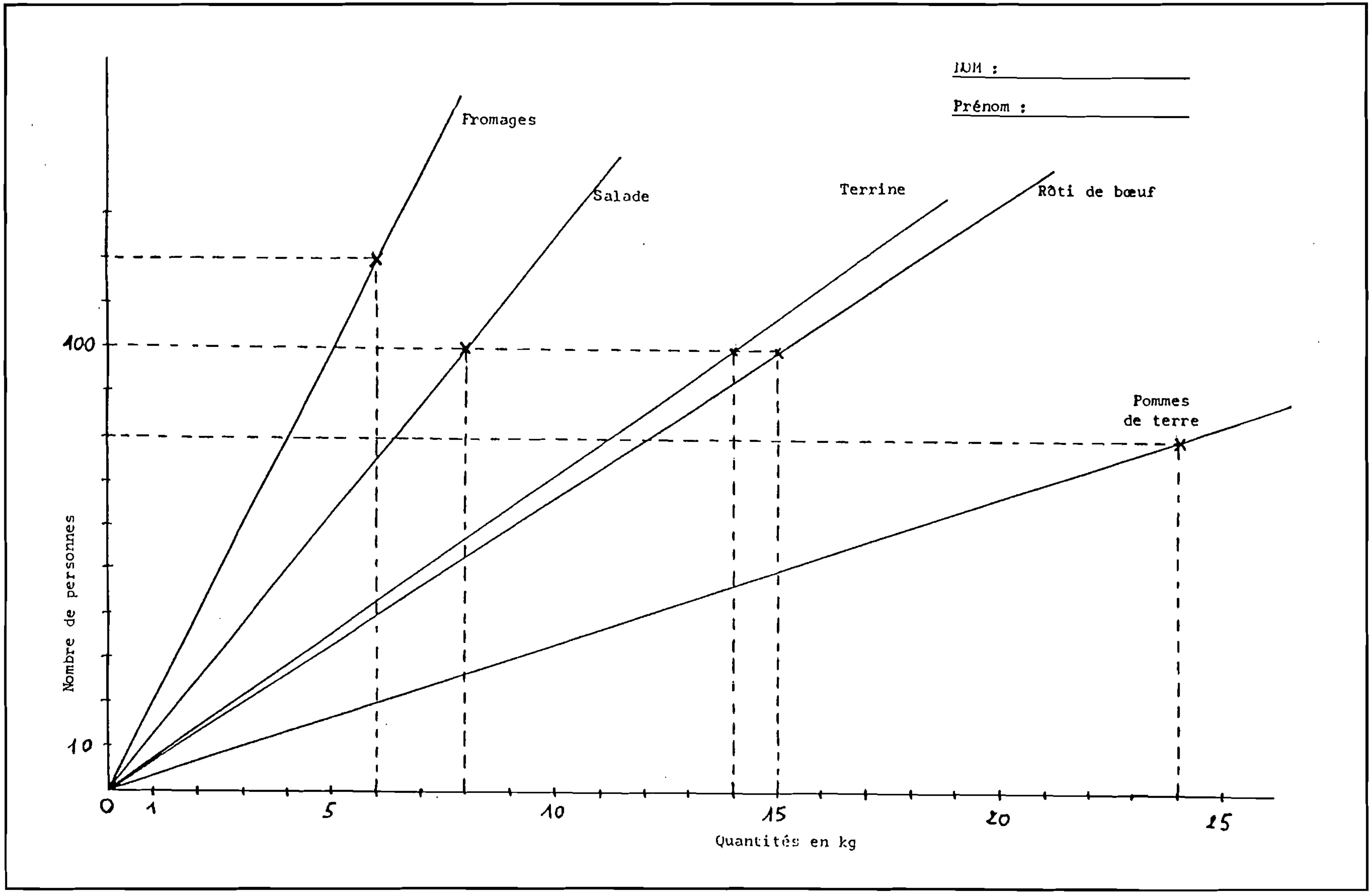
5) Le 29 juin ,le chef cuisinier aura 60 personnes à servir .

a) Combien doit-il acheter de kilogrammes de fruits ?

b) Compléter le tableau suivant sachant qu'il prévoit d'acheter un kilogramme de bananes et qu'il complétera avec des fraises et des cerises en parts egales.

Produits	quantité en kg pour 60 personnes	prix au kg	Montant
Terrine		44,80 F	
Rôti de bœuf		63,50 F	
Pommes de terre		1,90 F	
Salade		5,40 F	
Fromages		45,00 F	
Bananes		12,60 F	
Cerises		13,00 F	
Fraises		14,50 F	
		Total	

6) A ce total il faut ajouter 25% de frais divers.
Calcule le prix de revient des 60 repas . Calculer le prix d'un repas.


NOM :
Prénom :
Fromages
Salade
Terrine
Rôti de bœuf
Pommes
de terre
Nombre de personnes
100
10
0
1
5
10
15
20
25
Quantités en kg

Résultats du test terminal sur la proportionnalité

Résultats en pourcentages de réussite . 224 élèves ont passé le test.

1	lecture directe du graphique	fromages	98	**92% de réussite à l'ensemble des 5 items**
		salade	94	
		terrine	99	
		rôti	99	
		pommes de terre	97	
2	lecture approché du graphique	Toute reponse ∈ [90 , 95]	37	← **Les erreurs sont surtout dûes à une lecture dans le sens abscisse-ordonnée**
		Toute reponse ∈ [50; 60]	60	
		Toute reponse ∈ [7 , 8]	54	
3		droite placée correctement. Tolérance:la droite doit rencontrer le cercle de centre (9;50) et de rayon 2,5 cm.	74	**Ce résultat montre une bonne compréhension du graphique**
4	137 personnes	démarche	27	**Le taux de non réponse (supérieur à 50%) rend difficile l'exploitation de ces résultats. Nous avons sans doute sous-estimé le temps nécessaire aux 3 premières questions.**
		résultat	22	
	5,4 kg de fruits	démarche	24	
		résultat	18	
	100 kg de fruits	démarche	17	
		résultat	13	
5		a) résultat exact	11	
		toutes quantités exactes	2	
		1 ou 2 erreurs au plus	6	
		4 erreurs au plus	17	
		tout juste	13	
		1 ou 2 erreurs au plus	18	
		4 erreurs au plus	20	
		total exact	13	
6	**25% du total trouvé au 5°/**	démarche	8	
		résultat	4	
		prix de revient des 60 repas	6	
		prix de revient d'un repas	7	

ELEMENTS BIBLIOGRAPHIQUES.

BONNET A., 1979. Les pourcentages dans le premier cycle : 34% de réussite. *IREM de Strasbourg.*

BROUSSEAU G., 1984. Le rôle central du contrat didactique dans l'analyse et la construction des situations d'enseignement et d'apprentisage des mathématiques. *Actes de la 3ème école d'été de didactique. Institut IMAG.*

COPREM, 1984. L'enseignement de et autour de la proportionnalité.

DUPUIS C. et PLUVINAGE F., 1981. La proportionnalité et son utilisation. *Recherches en Didactique des Mathématiques (R.D.M.) vol. 2-2.*

EDUCATION et FORMATIONS, études et documents, 1983. Evaluation pédagogique dans les écoles et les collèges.

INRP, 1980. Enquête sur l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire.

IREM de BESANCON, 1986. Suivi scientifique des programmes de collège.

IREM de MONTPELLIER, 1986. Quatre situations didactiques autour de la proportionnalité.

IREM de RENNES, 1985. Français-mathématiques. Lecture-grammaire. Proportionnalité.

JULO J., 1982. Acquisition de la proportionnalité et résolution de problèmes. *Thèse de troisième cycle de psychologie. Université de Paris VII. Publiée par l'IREM de Rennes.*

RICHARD J.F., 1984. La construction de la représentation du problème. *Actes de la 3ème école d'été de didactique. Institut IMAG.*

VERGNAUD G., 1976. Activité et connaissance opératoire. *Bulletin APMEP n° 307.*

VERGNAUD G., 1981. L'enfant, la mathématique et la réalité. *Editions Peter Lang.*

A1

LE CAMPING

Le 8 août dans l'après-midi, Yann qui vient d'avoir 12 ans et toute la famille, sans oublier le chien OKAY, partent en vacances. Gaëlle qui n'a que 3 ans ne cesse de se battre avec Pascal pour prendre la place du milieu. On se pince, on se tire les cheveux et finalement Papa, excédé, dit à Pascal : "A dix ans tu pourrais être un peu plus raisonnable" et il ordonne à chacun de rester là où il est. Maman sèche les larmes de Gaëlle car les voici arrivés devant l'entrée du camping "les nuits blanches" près de Cartenec.

Le tarif est affiché :

PAR JOUR (c'est-à-dire par nuit passée au camping)				
Adulte	Voiture	Emplacement	Electricité pour les caravanes uniquement	Chien
3,20F	0,90F	1,05F	0,60F	1,00F

Les enfants ayant moins de 7 ans paient demi-tarif adulte. Les redevances ci-dessus sont diminuées de moitié "hors saison", c'est-à-dire hors les mois d'Août et de Juillet. Une réduction de 5% est consentie aux familles résidant au camping plus de 25 jours.

On rencontre le gardien. Chic il y a de la place ! On monte la tente pas loin d'un gros chêne à l'abri du vent. La mer n'est pas loin et une fois tout mis en place, toute la famille va se baigner.

Le temps n'est pas toujours au beau fixe mais il y a tant d'activités que les 17 jours de vacances passent trop vite.

Le 25 août au matin tout est de nouveau dans la voiture. C'est le départ ! On arrive chez le gardien pour régler la facture. Au fait pourrais-tu toi aussi établir cette facture ?

A2

Monsieur DURAND

Monsieur Durand veut faire une installation nouvelle dans 3 pièces de sa maison . Il estime qu'il lui faut 130 m de fil électrique , 4 interrupteurs et 9 prises ainsi que des douilles . Il lui reste d'une précédente installation 37 mètres de fil qu'il veut utiliser . Il est donc obligé de racheter du fil . Après avoir terminé son installation il s'aperçoit qu'il a utilisé 4 mètres de moins que prévu et qu'il lui reste alors 11 mètres .

Combien de fil électrique a-t-il racheté ?

A3

Les jolies colonies de vacances! (air connu)

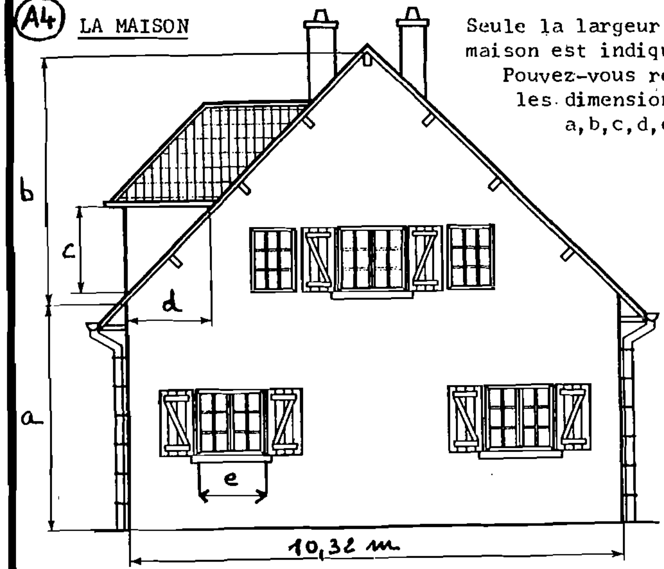
L'économe d'une colonie de vacances prépare un repas froid pour les 120 enfants qui partent en excursion en autocar.

Il pense qu'il faut pour 10 enfants :

- 10 paquets de chips
- 15 tranches de jambon
- 2 pains
- 20 oranges
- 300 g de gruyère
- 8 l d'eau

Quelles sont les quantités totales de provisions nécessaires pour la colonie entière ?

(A4) LA MAISON



Seule la largeur de la maison est indiquée .
Pouvez-vous retrouver les dimensions notées a, b, c, d, e ?

(A5)

LANCER DE DES

Des enfants s'amusent avec un dé . Pascal jette le dé 10 fois de suite et obtient 4 fois la face six . Il affirme alors à ses camarades :

" Si je le lançais 20 fois de suite , j'obtiendrais donc 8 fois le six ! "

A-t-il raison ?

(A6) LE TRAIN

On veut qu'un train de luxe contienne 432 sièges de première classe . Chaque wagon contient 8 compartiments et chaque compartiment contient 6 sièges . Combien faut-il de wagons pour former ce train ?

(A7) La farce

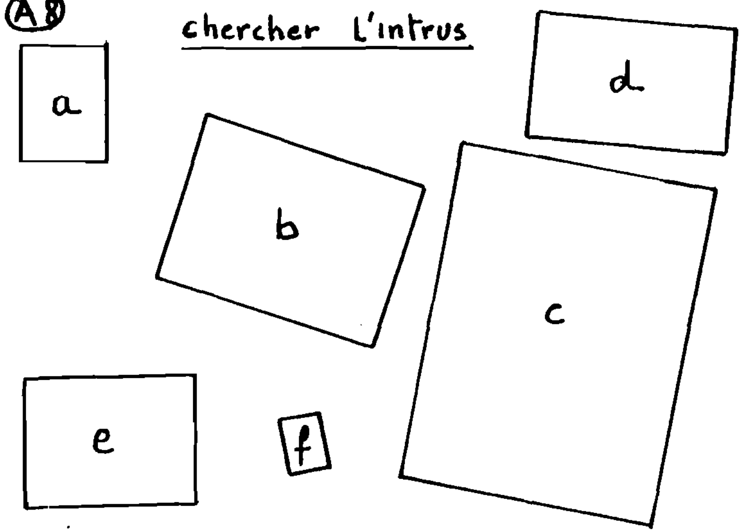
Un petit farceur à deplacé certains nombres de ce tableau.

12	6	15	20	10
50	4	8	30	20

× 2,5

Peux-tu remettre un peu d'ordre ?

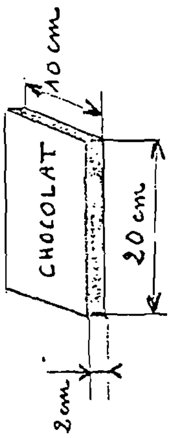
(A8) chercher L'intrus



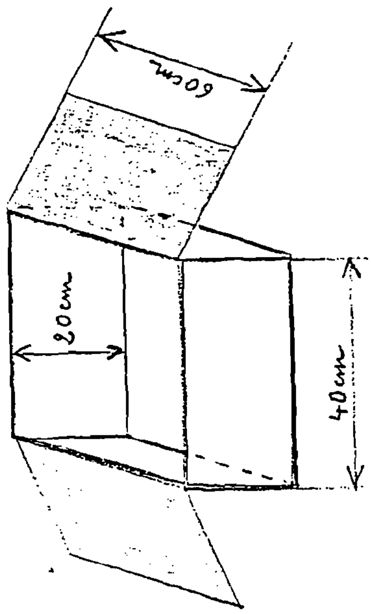
A10

LE CHOCOLAT

Une fabrique produit des plaquettes de chocolat dont les dimensions sont indiquées sur le dessin ci-dessous .



On veut ranger ces plaquettes dans des cartons dont la forme et les dimensions sont indiquées ci-dessous .



Combien peut-on ranger de plaquettes par carton ?

A11

CREPES SUCREES

Valérie,Chantal et Sandie, 3 amies friandes de crêpes, discutent de leurs recettes de pate.
Valérie "moi je mets 100g de sucre".
Chantal "et moi, 200g".
Sandie "et moi, 250g mais, pour 600g de farine".
Peut - on savoir qui des trois amies fait les crêpes les plus sucrées et pourquoi ?

A9

TRANSPORT DU LAIT .

La laiterie de Matha(Charente-Maritimes) exporte la plus grande partie de son lait en Italie; le transport se fait,en citerne, par route.
Une citerne part pour l'Italie par le Col du Mont-Cenis.
Le cammion-citerne roule à la vitesse moyenne de 60km/h,
mais en montagne, à partir de Chambéry, il roule à 50km/h.
La distance de Matha à Chambéry est de 600km.
La distance de Chambéry à la frontière du Mont-Cenis est de 100km.

- Calcule le temps pendant lequel le chauffeur doit rouler.
- Au cours du voyage, il prend 3 h de repos.
  Calcule la durée totale du voyage.
- A quelle heure doit-il partir de Matha s'il veut arriver à la frontiere à 17h ?
- Sur un graphique, représentant la marche de cette citerne, sachant qu'il s'est arrêté pour se reposer de 7 h à 8 h; pour manger de 11 h 30 12 h 30 et pour faire la sieste de 14 h à 15 h.

Pour construire ce graphique prends 1 cm pour 50 km, sur l'axe vertical, et 1 cm pour 2 h, sur l'axe horizontal.

- A l'aide de ce graphique, indique à quelle distance de Matha il sera a 7 h du matin ? à 11 h 30 ?
- A quelle distance du col sera-t-il à 14 h ? Et à 15 h ?

(B1) **Le flan**

Sur un livre de cuisine, pour faire un flan pour quatre personnes, on trouve la liste d'ingrédients suivants :

Lait (en décilitres)	4
Oeufs	2
Farine (en grammes)	20
Sucre en poudre (en cuillerées)	3

(B2) TARTES

Dans une boulangerie, on trouve deux sortes de tartes aux pommes;
- des petites, parfaitement circulaires et ayant 5cm de rayon.
- de grandes egalement circulaires et ayant 10cm de rayon.

JACQUES achète une grande tarte.
PAUL préfère, pour le même prix, acheter deux petites.

(B3) *LES COURSES DE VIRGINIE*

Voici la liste des courses de Virginie : 3 kg de pommes, 2 kg de poires, 1 paquet de café, deux bouteilles d'eau, un pain et 1,5 kg de steak haché.

Traînant son caddie, elle se dirige d'abord vers les fruits ; elle hésite un moment entre des "goldens" à 3,85 F le kg et des "reinettes" à 5,10 F le kg ; elle opte en fin de compte pour les "goldens" : elles ont l'air plus appétissantes. Pour les poires, pas de problème de choix, car il n'y en a qu'une sorte à 4,75 F le kg. S'apercevant que le boucher est libre, elle en profite pour prendre sa viande ; il la met dans un sac en papier qu'il ferme au moyen d'une agrafeuse. Avec un gros feutre, il marque le prix dessus : 52,40 F.

Elle a oublié de demander à sa mère, la marque du café ; elle est bien ennuyée car elle sait que son père en est un amateur. Tans pis, elle n'en achètera pas aujourd'hui.

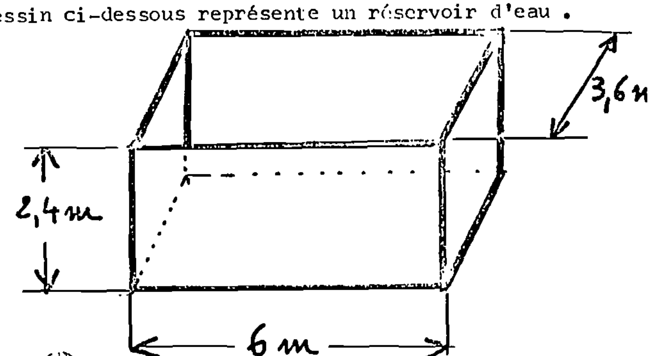
"Tiens, se dit-elle, le prix des bouteilles d'eau a augmenté de 20 c ; la semaine dernière, elles coûtaient 1,25 F chacune". Elle pense avoir terminé. Ah non ! elle a oublié le pain : une baguette à 1,80 F ; elle prend aussi une boite de ses gâteaux préférés : en effet, cette semaine, ils subissent une réduction de 8 %, ils sont seulement à 11,25 F la boîte.

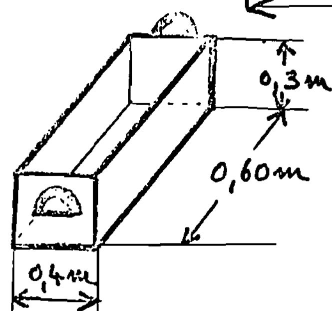
(B4) LE MONTAGNARD

Un montagnard récolte en moyenne 66 litres de lait de chèvre par jour . Il lui faut environ 5 litres de lait pour faire 1 kilogramme de fromage . Les fromages qu'il fait pèsent 125 grammes chacun . Il les vend 30 francs la douzaine .

(A12) LE RESERVOIR

Le dessin ci-dessous représente un réservoir d'eau .

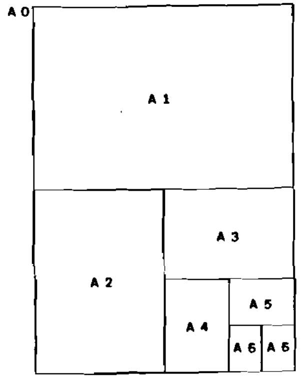




On veut le remplir avec un récipient dont la forme et les dimensions sont indiquées sur le dessin de gauche .

Combien de fois faudra-t-il verser le contenu de ce récipient dans le réservoir ?

B5 NORMALISATION DU PAPIER

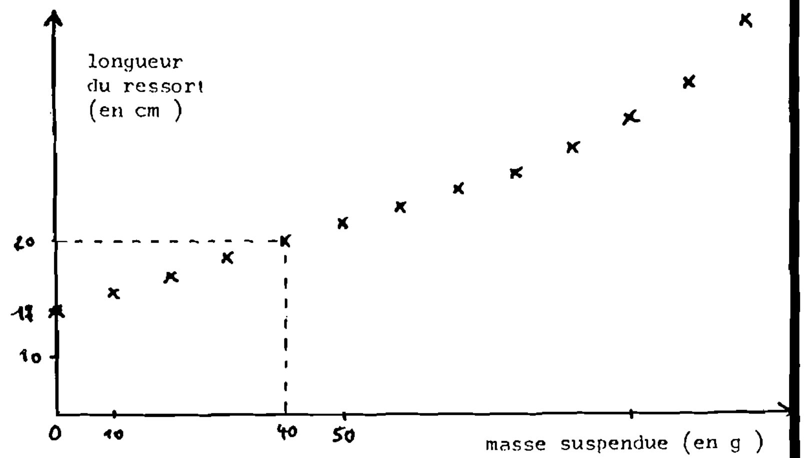


Dans le cadre de la normalisation européenne, les dimensions des feuilles de papier utilisées dans les bureaux sont règlementées.

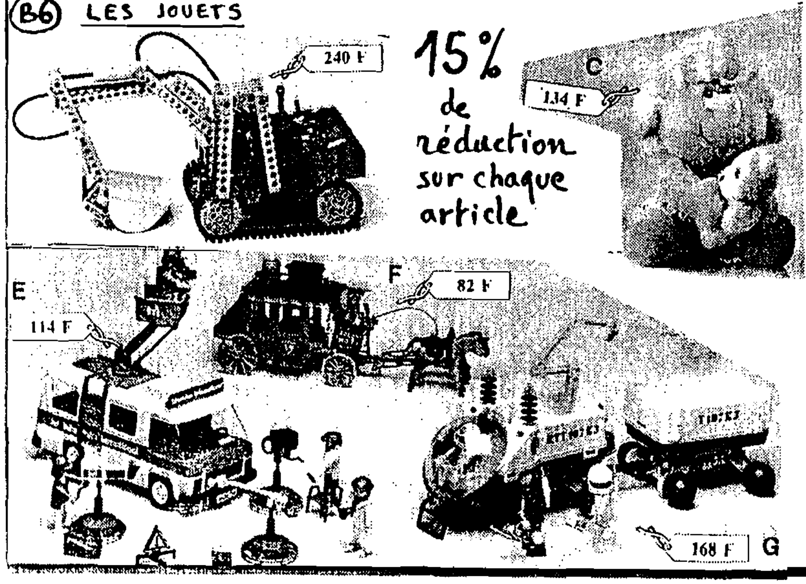
On peut donc acheter du papier au format A0, A1, A2, ...

Le papier sur lequel est transcrit cet énoncé est au format A4.

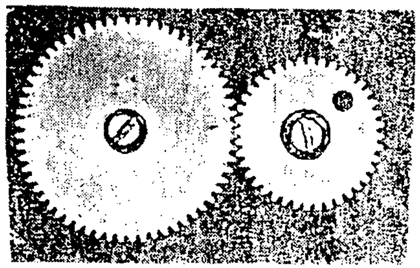
B7 LE RESSORT



B6 LES JOUETS

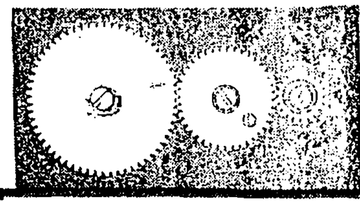


B8 LES ENGRENAGES



Il serait bien que tu puisses faire toi-même des montages du même genre.

Roue E : 60 dents
Roue F : 40 dents



Roue I : 60 dents
Roue J : 40 dents
Roue K : 20 dents