

# ELABORATION DE L'OUTIL SYMETRIE ORTHOGONALE EN SIXIEME.

IREM de Poitiers

Dominique GAUD  
Centre PEGC  
Ecole Normale de Poitiers

## Préambule.

Un tel travail n'aurait pas été possible individuellement compte tenu des charges de travail pesant sur chaque professeur. Le travail en équipe\* est indispensable pour le professeur.

Pour être efficace, l'équipe doit organiser son travail de manière rationnelle. Nous proposons un exemple (pas un modèle !) de telle organisation.

Enfin je tiens à souligner l'apport essentiel des recherches en didactique pour comprendre ce que font les élèves et remédier à leurs difficultés.

## INTRODUCTION

### Descriptif des classes.

*Cette expérience s'est déroulée dans cinq sixièmes du Collège de Vouneuil sur Vienne (86).*

Ces cinq classes de 6ème sont réparties en 3 modules :

**1er module :** 6A et 6B tout l'horaire est en parallèle.

**2ème module :** 6C et 6D tout l'horaire est en parallèle.

**3ème module :** 6E.

Les deux premiers modules permettent, quand le besoin s'en fait sentir, de répartir les élèves en classes de niveau sur la totalité de l'horaire (ou une partie). Dans le 3ème module les élèves ont pu être répartis en 2 groupes de niveau grâce à la présence bénévole des deux autres professeurs. Les élèves disposent dans chaque classe d'un cahier d'essais (réservé aux mathématiques), d'un classeur de mathématiques et d'**un répertoire alphabétique** où sont notés le vocabulaire et les constructions fondamentales (ce répertoire, qui suit les élèves jusqu'à la 3ème, est géré par l'élève).

### Découpage du programme de géométrie plane.

*Celui-ci a été décomposé de la manière suivante :*

- Qu'est-ce qu'un programme de construction (durée 6 h) ?

Exécution de programmes de construction 3ème et 4ème semaines de septembre. Il s'agit de faire exécuter des figures aux élèves. Ces constructions permettent d'utiliser le

\*L'équipe est composée de G. AURIAULT, M. MAROT, C. ROBIN professeurs au Collège de Vouneuil sur Vienne (86) et de D. GAUD directeur d'Etudes au centre P.E.G.C

vocabulaire (droite, segment, perpendiculaire) et les instruments de dessin ainsi que de faire sentir la nécessité d'un tracé précis.

- Etude de l'outil symétrie orthogonale (durée 17 h), octobre.
- Triangles, quadrilatères, médiatrice.
- Angles, bissectrice.

Ces deux dernières parties permettent de réinvestir l'outil symétrie et de parfaire la construction de l'axe de symétrie.

### Méthode de travail de l'équipe.

*Notre travail s'est décomposé en plusieurs phases :*

- 1) Analyse didactique de la symétrie (consultations de travaux existants).
- 2) inventaire de matériels utilisables.
- 3) Recherche d'objectifs.
- 4) Réalisation de tests.
- 5) Elaboration de fiches élèves
- 6) Repérage d'autres contenus abordés dans les fiches.

## I - ETUDES PRELIMINAIRES.

Cette partie reprend les travaux effectués par D. GRENIER (petit x n° 7).

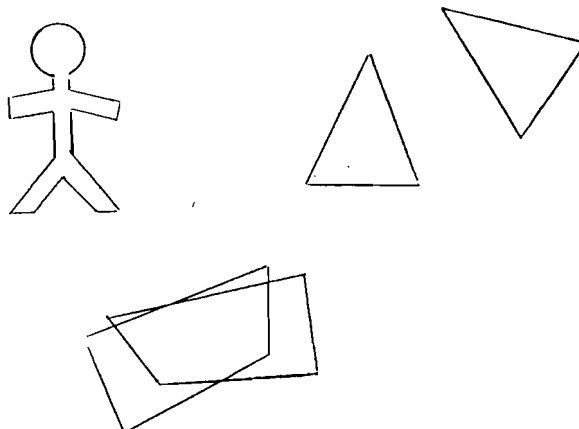
### 1) Analyse didactique de la symétrie.

Nous nous sommes fixé deux objectifs généraux :

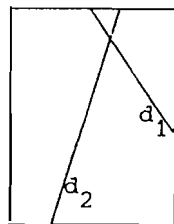
- reconnaître si une figure est symétrique.
- tracer la symétrie d'une figure à l'aide des instruments.
- Repérage des difficultés sur chacun des objectifs.
- Reconnaître une figure symétrique.

3 difficultés majeures :

- a) la complexité de la figure (voir par exemple le jeu des 7 erreurs).
- b) le nombre de morceaux qui composent la figure, éventuellement le chevauchement de ces morceaux.



c) la nature des objets dessinés exemple : les droites\*  $d_1$  et  $d_2$  dessinées dans la feuille ci-contre sont-elles symétriques ?



- Construction d'une figure à l'aide des instruments.

La reconnaissance de la symétrie d'une figure passe souvent par le pliage en début d'apprentissage.

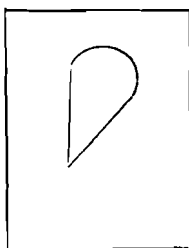
Le pliage est aussi utilisé par les élèves pour construire la figure symétrique d'une figure donnée. Les difficultés recensées ci-dessous ne sont valables que si le pliage est interdit ou mieux si le papier est opaque ou ne se laisse pas aller au pliage (carton).

a - Papier non quadrillé.

On peut distinguer 5 difficultés :

1) - la complexité de la figure.

Exemple :

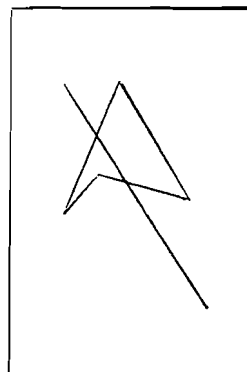
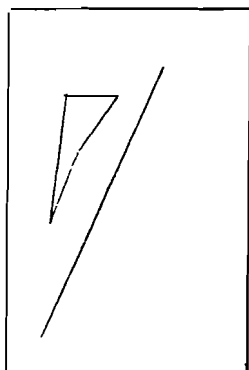


Une telle figure est perçue globalement par nombre d'élèves. La construction de la figure symétrique (par rapport à un axe quelconque) suppose une analyse préalable du type : quels sont les points remarquables (qu'il suffira de symétriser) permettant la construction de la figure ?

- De quelles figures élémentaires est constituée cette figure ? Cette difficulté n'apparaît pas si la consigne est de tracer à main levée la figure symétrique.

D'autre part la construction de la figure symétrique nécessite la maîtrise des instruments de dessin, celle-ci est en cours d'acquisition en sixième.

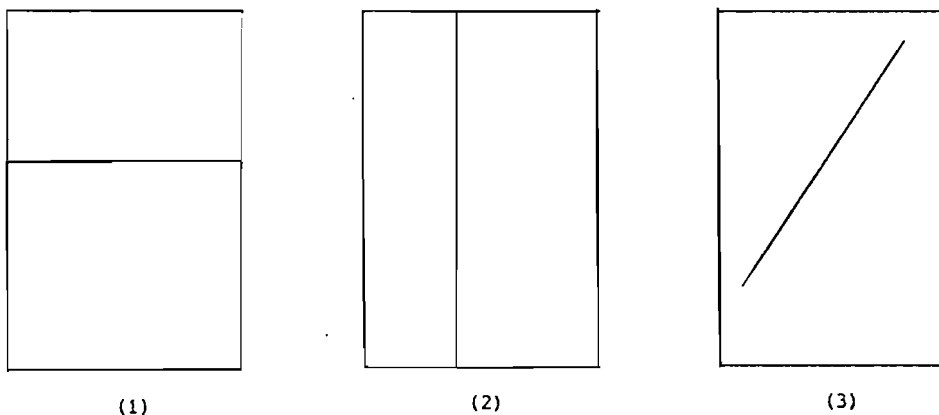
2) - La position de la figure par rapport à l'axe.  
La figure coupe-t-elle ou ne coupe-t-elle pas l'axe ?



\*il en est ainsi pour les 1/2 droites, les angles...

Ce type de difficultés peut être dû au fait que le pliage favorise la bijection d'un demi-plan et non pas du plan dans lui-même.

3) - La position de l'axe par rapport au bord des feuilles.



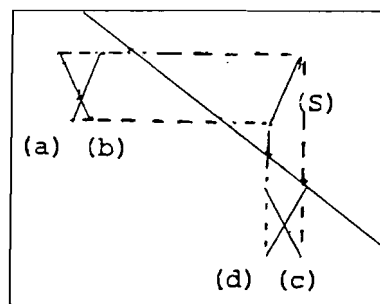
Il semble que la vision des bords prime sur la vision de l'axe. L'imagination du pliage pour construire la figure symétrique est difficile pour le cas (3) mais facile pour (1) et (2) car des bords coïncident lors du pliage.

4) - En cas d'axe non parallèle à un bord, la position de la figure par rapport aux bords de la feuille intervient.

Citons un extrait de l'article de D. GRENIER (Petit x n° 7).

Nous entendons par "procédure de rappel horizontal" une procédure qui, à une figure donnée, fait correspondre une figure dont les points extrêmes sont déterminés par translation horizontale des points extrêmes de la figure donnée. De même, une "procédure de rappel vertical" donne une figure-image dont les points extrêmes sont traduits verticalement des points extrêmes de la figure initiale.

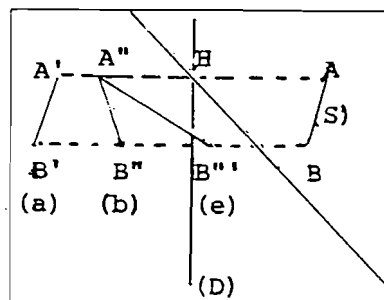
Ainsi (a) et (b) sont obtenus "par rappel horizontal" des extrémités du segment (S), (c) et (d), sont obtenus par "rappel vertical" des extrémités de (S). Ces procédures peuvent être "liées à l'axe" dans le sens où il y a report, pour une des extrémités (ou les deux) de la distance à l'axe sur la ligne de rappel choisie

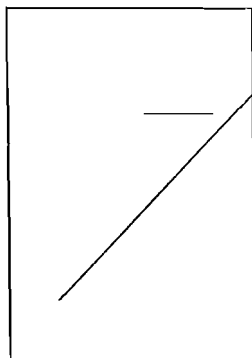


Par exemple : (a), (b) et (e) sont obtenus par "rappel horizontal" avec pour (a) :  $A'H = HA$  et (a) parallèle à (S),

pour (b) :  $B''K = HA$  et A'' tel que (b) soit symétrique de (S) par rapport à (D),

pour e :  $A''H = HA$  et  $B''K = KB$ .





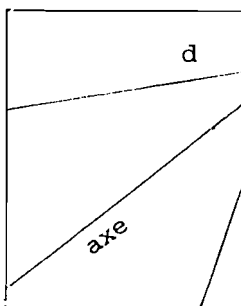
Dans certains cas ces procédures qui peuvent être habituelles chez certains élèves n'apparaissent pas car la disposition, figure-axe, dans la feuille **ne le permet pas**. Dans ce cas les élèves, pour qui le contrat est implicite ("puisque le prof. le demande c'est possible") peuvent utiliser la bonne procédure. Mais la procédure erronée resurgit dès que la position figure-axe dans la feuille le permet.

### 5) - La nature des figures à symétriser.

#### Exemple:

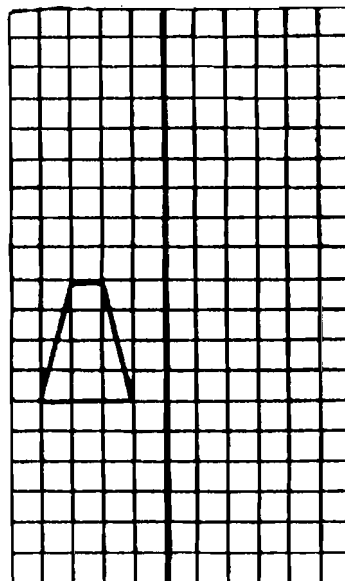
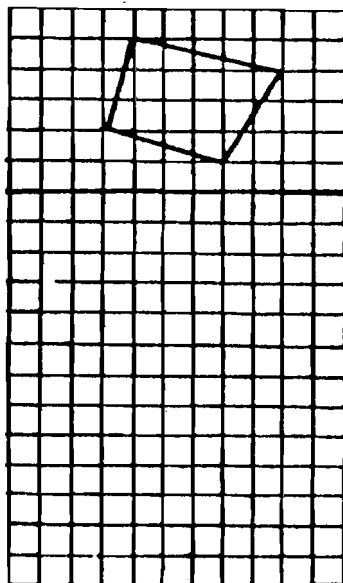
Symétriser une droite suppose que l'élève ait assimilé qu'une droite est déterminée par deux points et qu'ensuite il prenne l'initiative du choix des points.

D'autre part, la droite et sa symétrique posent problème par rapport à la vision globale de la symétrie.

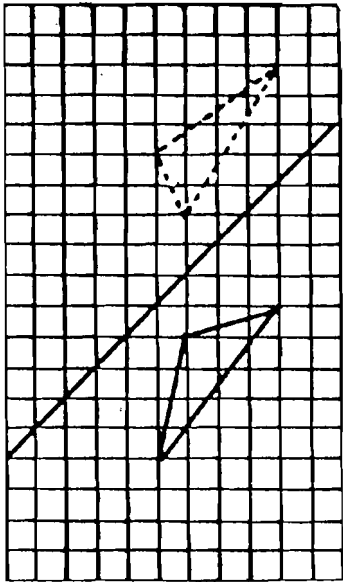


#### b - Papier quadrillé.

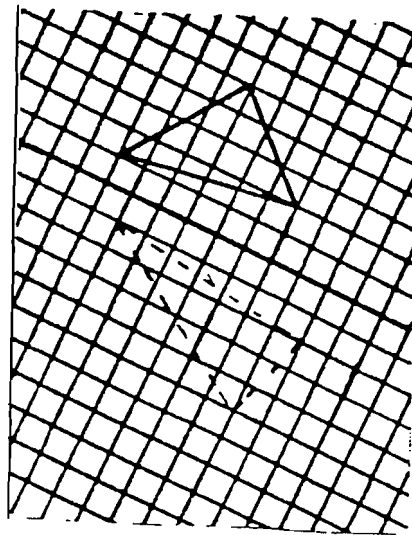
Les procédures utilisées par les élèves sont des procédures de comptage des carreaux (cf. Petit x n° 7).



Des difficultés liées à l'emploi abusif de ces procédures apparaissent dans les cas suivants :

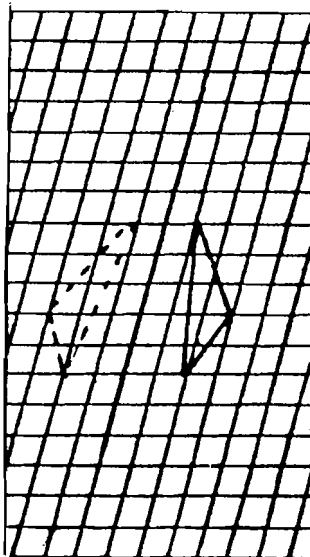


Axe oblique : rappel vertical (ou horizontal) et procédure de comptage conduisent à une symétrie oblique.



Mailles non parallèles aux bords de la feuille : symétrie oblique.

Les mailles parallélogrammes : la procédure de comptage conduit à un rappel horizontal.



Des blocages peuvent ainsi surgir si l'axe et la figure sont disposés indépendamment des nœuds du quadrillage.

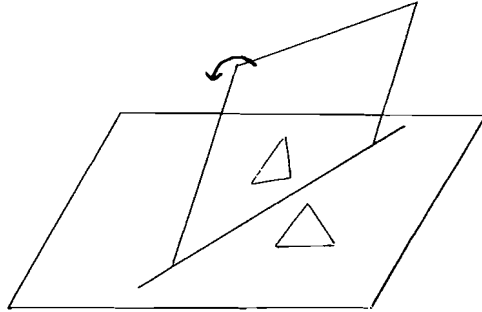
## 2 - Matériels utilisables.

Nous avons recensé différents types de matériels utilisables en classe.

1) **Matériel pour construire une figure symétrique ou vérifier la symétrie d'une figure.**

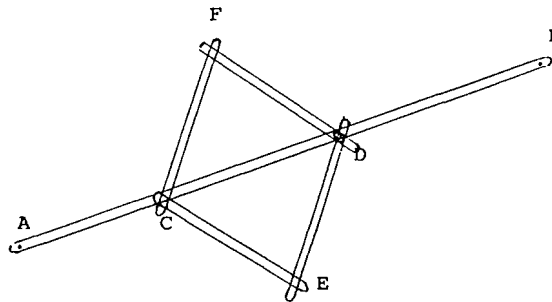
$M_1$  : Le pliage et les épingles : celles-ci étant disposées aux points remarquables de la figure.

$M_2$  : Le papier calque.



L'axe et la figure sont décalqués puis le papier calque est collé sur la feuille de telle manière que les axes coïncident. La rotation du papier calque permet l'obtention de la figure symétrique ou la vérification de la symétrie.

$M_3$  :



A et B sont fixes

C et D peuvent glisser sur la tige AB

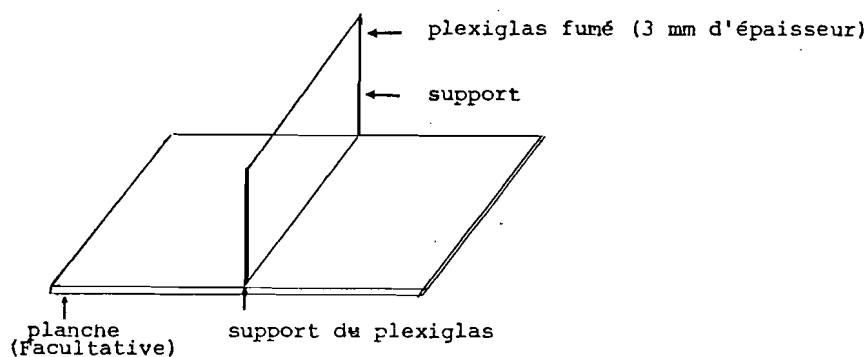
CFDE est un losange articulé

F pointe sèche

E crayon.

On pourra consulter Ludi Matériel n° 3 (APMEP).

$M_4$  Le symétriseur "plexiglas".



Sur une planche sont fixés deux supports. Ces supports permettent le glissement vertical d'un morceau de plexiglas fumé. Celui-ci permet de réfléchir la figure mais aussi de voir de l'autre côté (ce que ne permet pas le miroir !).

Pour construire et vérifier, il suffit de glisser la feuille sous le plexiglas de telle manière que l'axe de la figure soit confondu avec le bord du plexiglas. Quand la figure coupe l'axe on se place successivement de chaque côté.

## 2) Matériels pour apprendre à visualiser la symétrie.

$M_5$  : Films. Dans la série "10 films de géométrie" du C.N.D.P. existent 2 films sur la symétrie.

$M_6$  : Les logotypes : diapositives disponibles à l'IREM de Poitiers (voir annexe IV).

$M_7$  : Pavages, frises, papier peint.

$M_8$  : Le jeu "réflexion" de chez Ravensburger.

$M_9$  : Logiciels.

$M_2, M_4, M_1$  privilégient la correspondance globale de la figure contrairement à  $M_3$  qui privilégie la correspondance ponctuelle.  $M_1, M_2, M_3$  tendent à faire percevoir la symétrie comme application d'un demi-plan contrairement à  $M_4$ .

## II - LES OBJECTIFS.

### 1 - Objectifs cognitifs.

*Sur cette partie, à l'issue de cette année un élève doit :*

- savoir :
  - que le symétrique d'un segment est un segment de même longueur
  - que le symétrique d'un cercle est un cercle de même rayon
  - que le symétrique d'un angle est un angle de même mesure.
  - Ecrire le programme de construction du symétrique d'un point avec le vocabulaire approprié (milieu, perpendiculaire).

- Savoir faire :
  - la reconnaissance d'une figure symétrique
  - la construction à main levée de la symétrique d'une figure
  - la construction de la symétrique d'une figure simple\*
  - la construction de l'axe de symétrie d'une figure à partir de 2 points et de leurs symétriques.

D'autres contenus sont abordés dans cette partie :

- révision et utilisation du vocabulaire : point, droite, perpendiculaire, triangle, rectangle, carré, sommet, segment, droite, angle...

- réflexions sur le statut de ces objets :  
exemple ; une droite est infinie, elle est constituée de points et définie par 2 points.

\* Simple : voir les exemples donnés dans la partie mise en œuvre.



- Utilisation des instruments pour construire (des perpendiculaires), ou reporter des distances (règle graduée, compas).

- Analyse de figures.

- Introduction et rédaction de programmes de construction.

### REMARQUE :

Aucun cours n'a été fait sur les notions de droites, segments... Au fur et à mesure que les notions sont abordées de manière significative, le répertoire de l'élève est complété.

*Ce qui suit met en œuvre les savoir-faire cités plus haut et une partie des savoirs.*

### 2 - Capacités.

- Développer la sociabilité des élèves : ceux-ci travaillent par groupes dans lesquels ils doivent débattre en cas de désaccord et argumenter leurs points de vue.

- Développer les qualités de soin et d'ordre.

### III - NOS CHOIX.

#### 1) La démarche.

Les élèves ont déjà rencontré la symétrie orthogonale à l'école élémentaire à partir d'activités sur quadrillages. Celles-ci ont mis en place des procédures de comptage qui suffisaient à la résolution des problèmes posés. Par contre ces procédures sont mal adaptées pour résoudre les problèmes majeurs définis par les programmes :

- comment reconnaître une figure symétrique ?

- Comment tracer la symétrie d'une figure par rapport à un axe sur papier blanc?

Aussi avons-nous écarté d'entrée les quadrillages, ceux-ci seront revus à l'occasion de travaux sur les nombres relatifs.

#### 2) Matériel.

- Le pliage est une aide précieuse mais la position des bords des feuilles peut nuire (tendance à faire coïncider le bord des feuilles entre eux et à oublier l'axe). Le symétriseur en plexiglas évite de tels inconvénients de plus il est très maniable.

- Les corrections, vérifications, synthèses sont largement facilitées par l'usage du rétroprojecteur. En outre celui-ci fixe l'attention des élèves.

#### 3) Méthodes pédagogiques.

Nous avons choisi de faire travailler les élèves par groupes de 4 ou 5. Cela permet:

- de mieux gérer le matériel.

- De prendre en compte certaines composantes du travail autonome (s'organiser, organiser une recherche commune, gérer son temps de travail, utiliser des documents : répertoire par exemple)

- De mettre en place des situations de preuves : les élèves doivent formuler leurs conjectures et convaincre les membres du groupe.

- Au professeur d'étudier les processus de résolution des élèves.

Les élèves travaillent sur fiches. Les consignes sont courtes et compréhensibles par tous les élèves.

#### 4) Choix temporel.

La symétrie orthogonale permet de revoir les objets géométriques familiers (quadrilatères, droites) ce qui évite des révisions systématiques fastidieuses pour l'élève (et le professeur !).

De plus cette étude fournit des situations neuves et motivantes. Pour des élèves cela peut permettre d'oublier les échecs des années antérieures.

#### 5) Décomposition du travail des élèves.

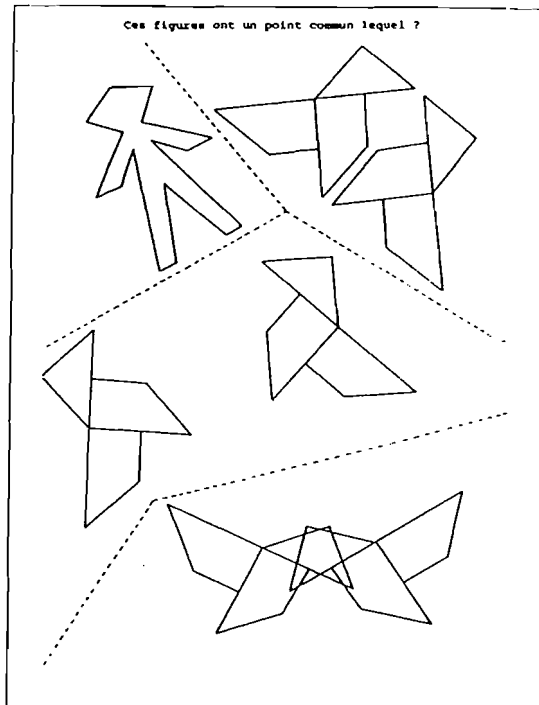
Celui-ci a été décomposé en trois parties non disjointes :

- Reconnaissance d'une figure symétrique.
- Construction à main levée de la symétrie d'une figure.
- Construction de figures symétriques.

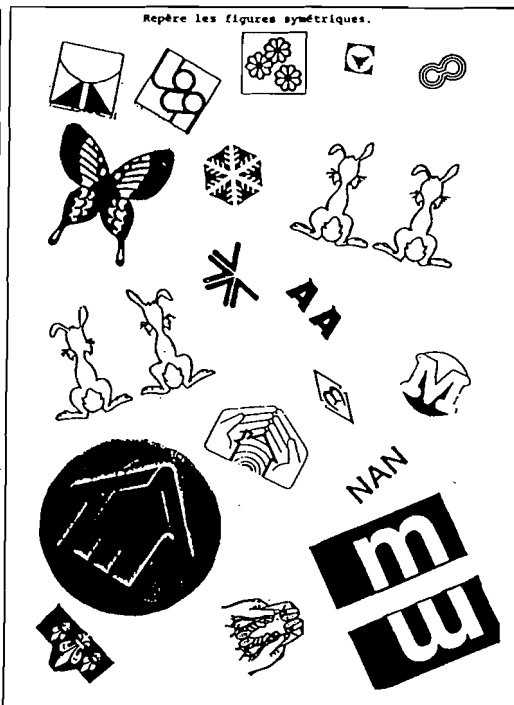
### IV - DEROULEMENT.

#### 1) Reconnaissance d'une figure symétrique (durée 2 heures). (Fiche 1 et 2).

Fiche n° 1



Fiche n° 2



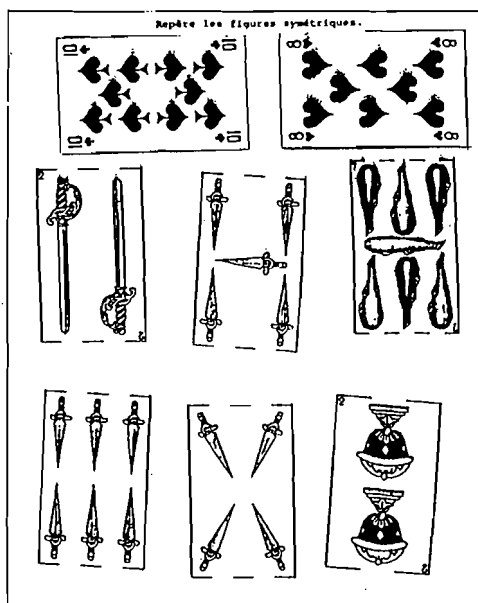
Les figures de la fiche n° 1 sont découpées suivant les pointillés. Les élèves procèdent par pliage pour répondre à la question :

Ces figures ont un point commun, Lequel ?

Peu d'élèves sont gênés par les bords irréguliers des morceaux. L'usage du symétriseur en plexiglas est expliqué et les objectifs annoncés aux élèves.

Les fiches 2 et 3 sont distribuées avec pour consigne de repérer les figures symétriques. Les élèves travaillent par groupes sans matériel. Celui-ci est utilisé en cas de désaccord dans le groupe.

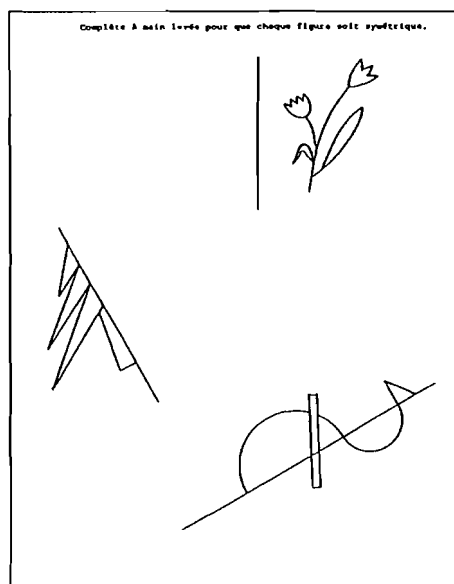
Fiche n° 3



2) Construction à main levée (fiche n° 4) durée 45 mn..

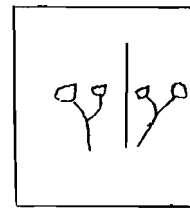
La construction de la symétrie d'une figure à main levée permet de vérifier si les élèves ont une vision correcte d'une figure symétrique.

Fiche n° 4



### Principales erreurs.

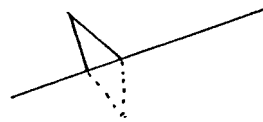
- Les fleurs ont été translâtées totalement ou en partie dans 4% des cas. "En partie" signifie que l'une des fleurs a été translâtée :



- le sapin : peu d'erreur significative

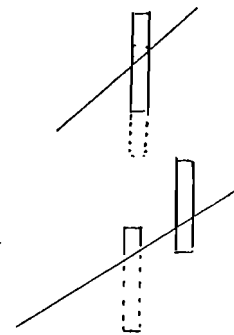
- le bonhomme de neige.

Les 1/2 cercles n'ont pas posé de problème. Par contre 5% des élèves se sont trompés sur le chapeau (la partie symétrique est isocèle).

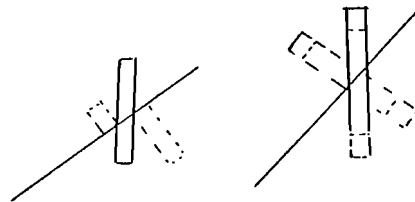


Et 30% des élèves se sont trompés sur le bâton.

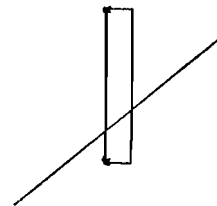
- Procédure de rappel vertical (erreur très fréquente) le bâton avait été volontairement disposé "verticalement".



- Procédure de symétrie centrale (?).



- Autres (3 élèves).



Ces tracés ont été réfléchis car les élèves ont d'emblée pointé cette difficulté. Très peu ont modifié la position de la feuille pour amener l'axe "horizontal" ou "vertical". La position des bords de la feuille est plus importante que celle de l'axe.

D'autre part ils n'analysent pas spontanément la figure tracée. Le réinvestissement des 2 heures précédentes (reconnaissance d'une figure symétrique) n'a pas lieu d'emblée mais doit être suscité par le professeur.

On peut noter que 3 élèves ont eu l'idée de tracer les symétriques de 2 sommets "extérieurs" au bâton.

Une autocorrection est effectuée à l'aide du symétriseur.

A l'issue de ces deux parties un test (annexe 1) a été passé pour identifier les difficultés de chaque élève. La correction de celui-ci a révélé que les élèves n'arrivent pas à formuler pourquoi une figure n'est pas symétrique. Une partie du test est reprise (fiche n° 5) afin que les élèves caractérisent dans leur langage des figures symétriques.

Voici ce qu'ils ont écrit à l'issue de la correction.

Pour être symétriques les figures doivent être :

- *face à face ou dos à dos*
- *de même grosseur*
- *de même forme*
- *bien en face l'une de l'autre.*

### **3) Elaboration du programme de construction du symétrique d'un point. Constructions de figures symétriques.**

*1ère étape.*

- La première étape consiste à faire reconnaître à l'aide de tracés et des instruments (règle, équerre, compas) si une figure est symétrique ou pas. Les "cartes" des fiches 6 et 7 sont découpées.

#### **Choix des figures.**

1 - 9 - 10 sont symétriques par rapport à un point. Elles ont été disposées dans des positions différentes pour observer s'il y a confusion avec les positions relevant de la symétrie axiale.

2. Les cocottes sont symétriques par rapport à un axe (quelconque pour les bords mais non quelconque pour les cocottes).

3. Les cocottes ne sont pas symétriques. La "non symétrie" est difficile à voir de par la position des cocottes qui induit un "faux axe" parallèle à un bord. Les segments qui joignent les points respectifs sont parallèles.

4. Les cocottes ne sont pas symétriques à cause des pattes.

5. Les cocottes sont translattées.

6. les cocottes ont été disposées symétriquement mais le bord de la feuille perturbe la vision de la symétrie.

7. La figure est symétrique mais les cocottes ne sont pas disjointes.

8. Les cocottes sont homothétiques.

11. Les cocottes sont symétriques.

#### **Consigne :**

mettre ensemble les figures symétriques (pas de matériel).

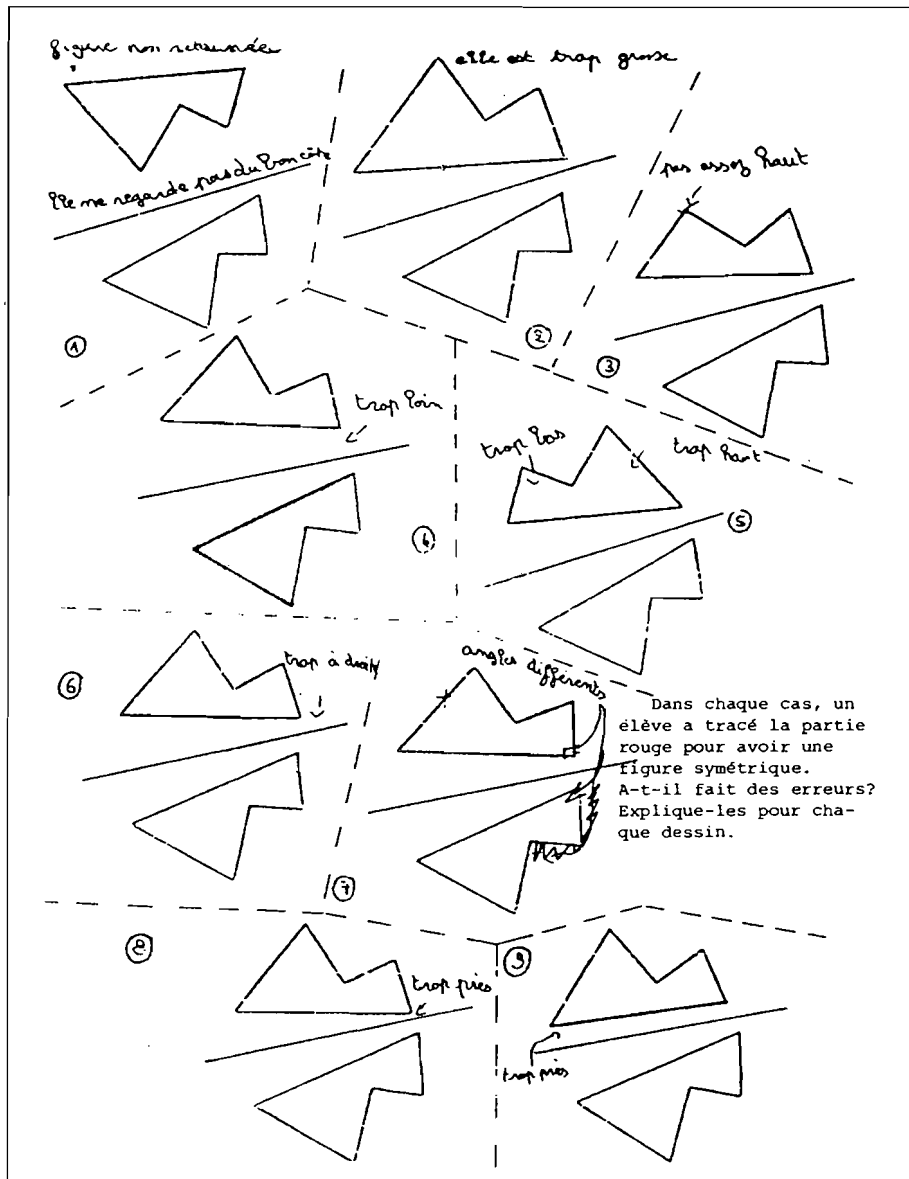
#### **Bilan :**

*Les figures 1, 9, 10, 8, 4, 5 sont d'emblée classées symétriques par les élèves. 2, 7, 11, et 3 sont classées symétriques avec cependant quelques doutes pour la 3. Des discussions apparaissent pour les cocottes 6. L'usage du symétriseur  $M_4$  ou du pliage est nécessaire.*

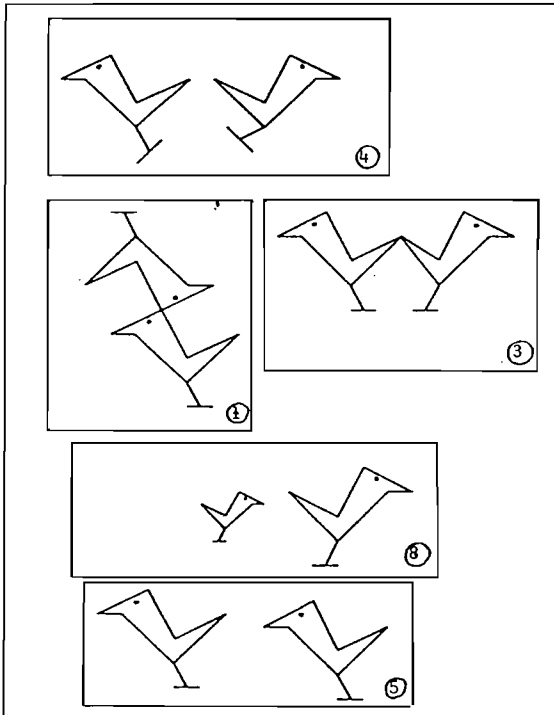
### Consignes :

Joindre pour chaque "carte" les points correspondants (bout du bec avec l'autre bout du bec...) et caractériser à l'aide des tracés les figures symétriques.

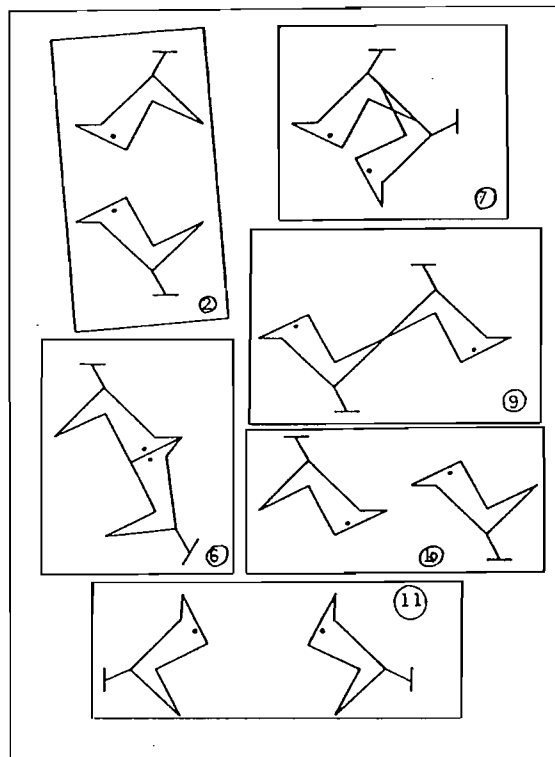
#### Fiche n° 5 - Travail d'un élève



Fiche n° 6



Fiche n° 7



La synthèse est élaborée par les élèves.

Dans une figure symétrique :

- les segments qui joignent les points correspondants sont parallèles
- les segments sont perpendiculaires à l'axe
- l'axe passe par les milieux des segments.

De cette synthèse les élèves déduisent facilement le programme de construction du symétrique d'un point. Celle-ci est formulée de manière très dynamique : "je prends l'équerre, je la mets comme ça, je prends le compas je le pique là...". Le passage de ce langage au langage académique ("je trace la perpendiculaire à la droite passant par le point") est difficile et cela constitue un des objectifs à atteindre en fin de 6ème.

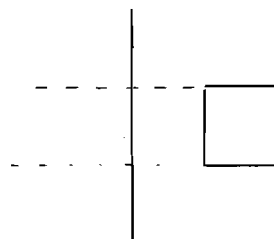
### 2ème étape.

La construction de symétriques de figures plus complexes révèle d'autres difficultés que celles liées à la symétrie orthogonale. En effet les figures sont perçues globalement ; or pour effectuer la construction de la figure symétrique il faut déterminer les éléments remarquables de la figure initiale (un quadrilatère est déterminé par 4 points, un cercle par son centre et son rayon, un segment par deux points...).

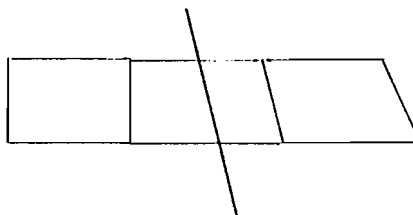
### Exemple :

Les élèves prolongent les côtés qui se trouvent être perpendiculaires à l'axe.

Puis les distances sont reportées, (perception globale de la figure).

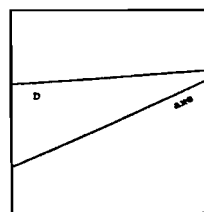


Cette technique ici valable est appliquée aussitôt dans le cas suivant et conduit à une erreur.



On peut noter que peu d'élèves vérifient si le tracé est en accord avec le programme de construction du symétrique d'un point. Par contre si le professeur amène à réfléchir sur la pertinence de la réponse celle-ci est rectifiée immédiatement. (on trouvera feuilles 8 et 9 d'autres exemples de figures).

Pour tracer les symétriques des angles ou des droites l'analyse de la figure ne suffit pas : la conception des objets entre en jeu. Ainsi construire la symétrique d'une droite (dans la mesure où les extrémités dessinées ne sont pas symétrisables dans la feuille) permet de réfléchir sur la nature de

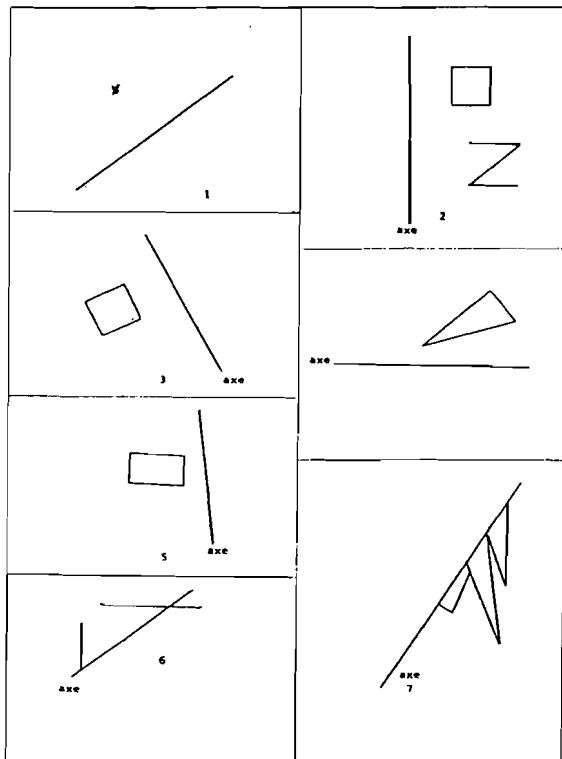




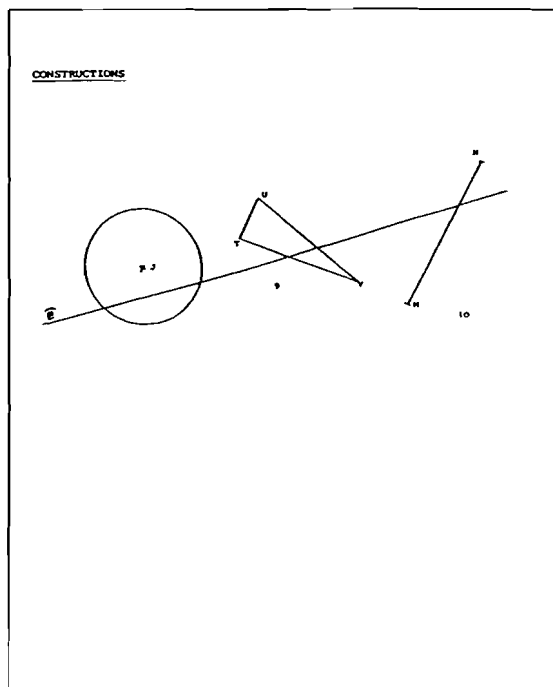
celle-ci. Les élèves ont eux-mêmes formulé et mis en application les énoncés : pour connaître une droite il suffit d'en connaître deux points ; une droite est illimitée.

Il est important de noter que les propriétés de la symétrie orthogonale (conservation de la distance, de l'alignement, du milieu, du parallélisme...) n'ont pas été formulées dans cette partie. Les énoncés étaient, nous semble-t-il, des théorèmes en actes.

Fiche n° 8



Fiche n° 9



La formulation de ceux-ci a eu lieu plus tard dans l'année à l'occasion d'activités diverses : construction de figures par des transformations non affines ; activités de démonstration (exemple : nature du symétrique d'un parallélogramme).

Par exemple les points invariants ont été utilisés pour faciliter les constructions.

#### IV - CONCLUSIONS.

Les résultats du test n° 2 (annexe 2) sont très encourageants.

Peu d'élèves ont été en échec : ainsi la structure d'heures en parallèles n'a été utilisée que 2 heures à la fin du thème, il s'agissait davantage de travailler sur des programmes de constructions "académiques" que sur la symétrie orthogonale.

Nous avons aussi noté que contrairement aux autres années les élèves n'oubliaient pas leurs outils ce qui prouve l'intérêt porté au sujet et (ou) aux méthodes de travail proposées.

#### BIBLIOGRAPHIE.

G. AURIAULT, D. GAUD, M. MAROT, C. ROBIN, 1986. (*IREM de Poitiers*). La symétrie orthogonale en 6ème.

G. AURIAULT, D. GAUD, M. MAROT, C. ROBIN, 1986. (*IREM de Poitiers*). Reproductions de figures planes en 6ème. (Suite de l'expérience en particulier réinvestissement de la symétrie).

D. GRENIER, 1985. (*IREM de Grenoble*) petit x n° 7. Quelques aspects de la symétrie orthogonale pour les élèves en classe de 4ème et 3ème.

R. GRAS, 1983. (*IREM de Grenoble*) petit x n° 1. Instrumentation de notions mathématiques. Un exemple : la symétrie.

A. CHEVALIER. (*IREM de Montpellier*). Le problème QAT - Symétrie, vérification, algorithme de construction. La pratique de l'élève.

ANNEXE 1

Test n° 1

**TEST n° 1**

**Ex. n° 1** - Dis si les figures sont symétriques, si oui, trace l'axe.

**Ex. n° 2** - Complète pour avoir des figures symétriques.

Figure 1
Figure 2

**Ex. n° 3** - Laquelle des trois figures est symétrique ?... Dans le cas d'une figure symétrique, trace l'axe.

**Ex. n° 4** - Ce dessin représente un écureuil qui se regarde dans une glace. La glace déforme un peu, trouve deux erreurs.

d'après L'INM de Monaco

ANNEXE 2

Test n° 2

1) Complète les dessins de points et de figures pour obtenir des figures symétriques.

2) Trace le symétrique des deux figures.

3) Complète pour avoir une figure symétrique puis écris le programme de construction correspondant.

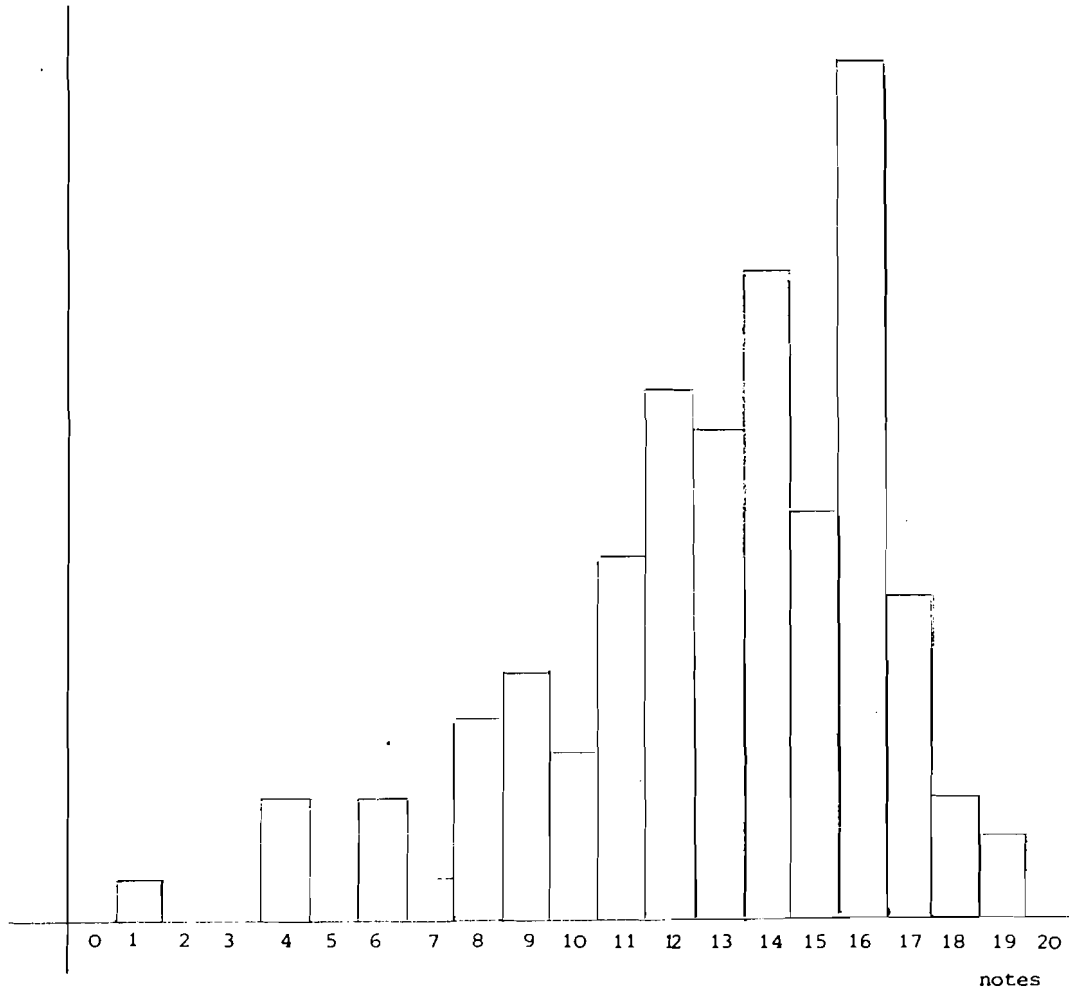
4) Quelles sont les figures symétriques parmi celles qui sont ci-dessous ? Explique pourquoi certaines ne le sont pas.

→ 5) Cette figure est symétrique, trace l'axe avec précision.

Etalonnage du TEST

Effectif : 117

Score moyen : 13

PourcentagesItem par Item

1		2		3	4	5
1 dessin	2 dessin	1 dessin	2 dessin	Tracé	programme	
92%	94%	92%	89%	73%	56%	40%