APPROCHE DE LA DIVISION AU COURS ELEMENTAIRE DEUXIEME ANNEE

par Jacques PAINCHAULT

Si l'article «La division à l'école» de Grand N numéro 1 invitait les maîtres à réfléchir sur la division et suggérait différents exercices pouvant aider des enfants du cours moyen à mieux comprendre cette opération, il ne proposait pas de méthode quant à son approche au cours élémentaire. Nous relatons dans cet article le travail réalisé ces trois dernières années dans nos classes expérimentales, il s'étend sur une durée de trois mois en alternance avec d'autres activités pour éviter la saturation.

La technique opératoire de la division pourrait être enseignée en quelques semaines mais ce n'est pas le but que nous recherchons. Nous souhaitons avant tout que les enfants acquièrent le sens de la division par l'intermédiaire de l'étude de situations, de problèmes, en élaborant peu à peu une technique de cette opération. Ainsi dans les situations de problèmes que nous étudions, la méconnaissance ou l'oubli d'éléments de la technique opératoire ne provoque pas de blocage pour les enfants.

Nous partirons donc de la notion de multiple et nous construirons des techniques de plus en plus performantes permettant de calculer le quotient.

I – ETUDE DE QUELQUES SITUATIONS.

1.1 La multiplication à «trou».

Dès le CE1 on est amené à poser aux enfants des multiplications à «trou», d'abord destinées à l'apprentissage et au contrôle des connaissances de la table de multiplication.

Exemples $8 \times \cdot = 56$; $3 \times \cdot = 21$

$\cdot \times 7 = 49$; $7 \times \cdot = 31$

On peut remarquer que le problème :

$7 \times \cdot = 31$ n'a pas de solution à ce niveau.

Ensuite, le maître propose des multiplications à trou plus complexes, ne figurant pas dans la partie mémorisée de la table de multiplication.

Certains exercices peuvent être résolus par application des règles de multiplication par 10, 100, 1000, ... comme par exemple :

$25 \times \cdot = 2500$; $10 \times \cdot = 43000$; ...

d'autres, par l'utilisation de multiples :

multiples de 7 pour $7 \times \cdot = 91$
multiples de 23 pour $23 \times \cdot = 207$.

Pour ce dernier exemple, les enfants les plus débrouillards commencent à écrire la liste des multiples de 23

23 46 69 92 115 138 161 184 ...

A cette occasion, le sens du mot multiple est rappelé à l'aide de nombreux exemples. Pour résoudre le problème $23 \times \cdot = 115$ on est amené à compter le rang de 115 dans la liste des multiples (à condition de ne l'avoir pas commencée par zéro).

Dans ces activités, toute liberté est laissée aux enfants pour l'organisation de leur travail.

1.2 Partage en parts égales.

Pour les enfants, cette situation n'a rien de commun avec la multiplication à trou. Nous évitons soigneusement de leur dire qu'il s'agit du même problème car il est indispensable qu'ils s'en rendent compte eux-mêmes. Cette prise de conscience est longue, difficile et nécessaire pour éviter le piège pédagogique des problèmes-types associés à des solutions-types avec la conséquence désastreuse que l'on connaît : si l'élève ne reconnait pas le problème, il abandonne.

Exemple : Partager 93 billes entre 7 enfants de façon que chacun ait autant de billes que ses camarades.

Des enfants disent :

– *Chacun en aura beaucoup.*

– *Non, pas tellement.*

– *Chacun en aura plus de dix.*

Nous discutons cette dernière affirmation.

– *Si on avait des billes on pourrait essayer.*

Nous décidons alors de réaliser effectivement le partage de 93 billes entre sept enfants.

– *On va en donner une à chacun.*

– *On peut en donner une autre !*

– *Et encore une autre !*

Cette activité est accompagnée de questions : Combien de billes avait-on distribué après le 1er tour ? Après le second ?

La suite des multiples de 7 apparaît ainsi que la notion de reste, mot employé spontanément. On énonce au fur et à mesure les résultats des observations.

– *On peut donner 8 billes à chacun mais il en reste assez pour en donner davantage.*

– *Il y a assez de billes pour en donner 13 à chacun mais on ne peut pas en donner 14.*

– *Si on donne 13 billes à chacun il en reste 2.*

Nous essayons ensuite de résoudre de nouveaux problèmes de partage sans manipulation.

1.3 Jeux numériques et suites de multiples.

Nous avons déjà évoqué l'intérêt qu'il y a du point de vue pédagogique à présenter aux enfants des situations très diverses pour approcher une notion. On peut imaginer plusieurs jeux numériques dans lesquels la suite des multiples d'un nombre peut jouer un rôle important dans l'approche d'une solution, par exemple le «jeu des pièges» déjà décrit dans Grand IN numéro 10 (dossier jeux numériques).

On dispose d'une marelle constituée par des cases numérotées (la première case peut porter le numéro 0 ou 1 au choix).

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	– – –

Si la suite des activités l'exige on pourra prolonger cette marelle autant que l'on voudra, d'abord effectivement en collant une bande à la suite de celle qui existe, puis par la pensée quand les enfants seront susceptibles de résoudre les problèmes sans manipuler.

Une puce se déplace sur cette marelle **en faisant des sauts qui ont toujours la même longueur** : un nombre entier de cases.

Une manipulation est indispensable pour que les enfants analysent correctement cette situation. Dès le CE1 et même peut-être dès le CP cette manipulation est intéressante. Connaissant le numéro de case de départ, la longueur du saut, trouver le numéro de la case d'arrivée est un problème additif (ou soustractif).

Règles du «jeu de pièges».

Le jeu se joue à deux joueurs, l'un est la puce et l'autre pose des pièges pour l'attraper.

Au début de chaque partie on fixe :

– une zone de départ (une ou plusieurs cases au début de la marelle),

– une zone de pièges (une dizaine de cases consécutives assez éloignées du départ),

On tire au sort une longueur de saut (par exemple avec un dé). Deux possibilités de jeu sont offertes :

– la puce choisit sa case de départ dans la zone de départ et l'adversaire marque ensuite une ou plusieurs cases piégées dans la zone piège ;

– les cases sont d'abord piégées et la puce choisit ensuite la case de départ.

Si la puce décrit la marelle en respectant la longueur des sauts autorisée sans tomber dans aucun des pièges, elle a gagné !

Si elle gagne trop souvent, l'adversaire est autorisé à placer quelques pièges de plus.

Si elle perd trop souvent, on agrandit sa zone de départ.

Les deux adversaires peuvent changer de rôle, mais il est préférable de garder assez longtemps la même longueur de saut afin de permettre aux enfants de découvrir une stratégie.

Déroulement des activités.

a) Le jeu oppose d'abord deux élèves, la marelle étant dessinée au tableau de façon à ce que les règles du jeu soient bien comprises par tous.

b) Ensuite et pendant un temps assez long, le jeu se déroule par équipes de quatre : deux joueurs et deux observateurs (les rôles étant permutés à chaque partie). Tous les coups sont discutés, le maître passe d'équipe en équipe, écoute les arguments échangés. Il peut ainsi noter les ébauches de stratégies apparaissant chez certains joueurs.

c) Mise en commun des «découvertes», et vérification de l'efficacité des stratégies trouvées.

Par exemple, dans le cas où les sauts sont de longueur 3, si la puce choisit de partir de la case 5, en un saut elle atteint la case 8, en deux sauts elle atteint la case 11, ..., Quelle case atteint-elle en huit sauts ?

Quels sont les numéros des cases comprises entre 40 et 50 où l'on peut mettre un piège pour l'attraper ?

Si l'adversaire a piégé la case 38, la puce pour gagner ne devra se trouver ni dans la case 35, ni dans la case 32. Quelles sont les cases dans lesquelles elle ne doit pas sauter ?

De quelles cases de la zone de départ peut-elle partir pour gagner ?

L'étude de ce jeu, fait apparaître le rôle des multiples de 3.

Avec la même longueur de saut, la puce pourra-t-elle passer s'il y a deux pièges ?

Et s'il y en a trois ? Comment peut-on les disposer pour être sûr que la puce ne passera pas ?

d) Position du problème sans manipulation.

Les solutions restent encore des bricolages. Il n'est pas question d'enseigner la stratégie gagnante de ce jeu.

Remarque.

Une activité très comparable et intéressante est un travail sur le calendrier. On se pose les problèmes simples du style : nous sommes rentrés le lundi 3 janvier. L'anniversaire de Sylvie est le 28 janvier. Quel jour de la semaine serons nous ? Ou encore : Quelles seront les dates des mercredis du mois de janvier, puis du mois de février, ..., ?

Lorsque nous aurons progressé davantage dans notre étude des multiples nous pourrons chercher quel jour sera le 1er janvier de l'année prochaine.

II – LA SUITE DES MULTIPLES D'UN NOMBRE.

Les activités qui précèdent ont abouti à l'écriture de la suite des multiples d'un nombre, cette suite étant commode pour résoudre le problème. Les propriétés de cette suite sont importantes et il est intéressant de les dégager indépendamment de la situation de départ.

Il est en particulier important d'associer à chaque naturel le multiple correspondant en lignes ou en colonnes.

Par exemple :

Suite des multiples de 23

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
multiples de 23	0	23	46	69	92	115	138	161	184	207	230	253	276	...

ou encore :

	multiples
0	0
1	23
2	46
3	69
⋮	⋮

ou :

X 23

0	0
1	23
2	46
3	69
4	92
⋮	⋮

ou :

X 23

0	1	2	3	4	...
0	23	46	69	92	...

Certains élèves font de nombreuses multiplications par 23 et progressent lentement. D'autres ont déjà écrit sans poser d'opération une vingtaine de multiples alors que les premiers n'en écrivent que 4 ou 5. Nous demandons aux «champions» d'expliquer ce qu'ils ont fait.

– *Les multiples de 23 «vont de 23 en 23».*
– *Il suffit d'ajouter 23 ...*

Questions : Et les multiples de 7 ?
Et les multiples de 11 ?

Autre question : Si on «saute» des multiples, est-on obligé de refaire des multiplications ?

Exemple

X 23

0	0
1	23
2	46
3	69
4	92
5	115
30	......
32	......

Ce travail est une bonne préparation à la notion de proportionnalité et de linéarité qui sera approfondie au CM. C'est de plus un excellent exercice de calcul mental, qui avec **la disposition en colonnes, permet de dégager sur de nombreux exemples les règles suivantes :**

Dans un tableau de multiples on peut :

- «multiplier une ligne par un nombre»* pour obtenir une nouvelle ligne du tableau.

Par exemple :

Pour compléter la ligne 30 | ..., on peut «multiplier la ligne 3 | 69» par 10 ; on obtient 30 | 690.

- «ajouter deux lignes»*, pour obtenir une nouvelle ligne du tableau.

Par exemple :

Pour compléter la ligne 32 | ..., on peut «ajouter les lignes 30 | 690 et 2 | 46», on obtient 32 | 736.

Les enfants observent que l'on peut également «retrancher une ligne d'une autre».

De très nombreux exercices sont faits utilisant ces propriétés.

Exemple :

Multiples de 47

	multiples
0	0
1	47
2	94

terminer la ligne 67 | ...

Des solutions très diverses apparaissent, il est intéressant d'amener les enfants à ne pas procéder au hasard mais à organiser à l'avance les calculs qu'ils vont effectuer.

Exemple :

	0	0	
	1	47	
X 3	2	94	X 3
	6	282	

puis

	0	0	
	1	47	
	2	94	
X 10	6	282	X 10
	60	2820	

puis

	0	0	
	1	47	
	2	94	
	6	282	
	60	2820	
somme	67	3149	somme

* *Ces propriétés résultent pour la première, de l'associativité de la multiplication :*
$30 \times 23 = (10 \times 3) \times 23 = 10 \times (3 \times 23)$.

Pour la deuxième, de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition :
$32 \times 23 = (30 + 2) \times 23 = (30 \times 23) + (2 \times 23)$.

III – RETOUR AUX PROBLEMES PRECEDENTS.

3.1 Multiplication à trou.

Si l'on demande de compléter 23 X ... = 171 on est amené à écrire la suite des multiples de 23 et à conclure que le problème est impossible. De même pour 41 X ... = 246 on trouve facilement 6.

Si le problème à résoudre est ... X 7 = 643, les enfants comprennent rapidement que ce n'est pas la suite des multiples de 7 qui est intéressante mais une partie de cette suite, et plus exactement les multiples de 7 qui sont voisins de 643.

On observe donc les travaux suivants :

Les enfants commencent par écrire les premiers multiples de 7.

X 7	
1	7
2	14
3	21
4	28
5	35
6	42

Ils poursuivent ce travail plus ou moins loin avant de prendre conscience qu'ils ne sont pas près d'aboutir. Puis ils commencent à faire des «sauts» dans la suite des multiples, (les premiers sauts sont assez anarchiques l'un calcule 27 X 7 = 189, un autre 53 X 7 = 371) : et reprennent à partir de ces résultats la suite des multiples de 7. Enfin un enfant propose 100 X 7 = 700 et déclare : c'est moins de 100 mais pas très loin. On se précipite pour faire des essais avec 99 ou 98 mais les plus malins utilisent le début du tableau de multiples pour trouver la ligne

90 | 630

puis les propriétés de linéarité donnent :

X 7	
90	630
91	637
92	644

On déclare enfin : le problème est impossible.

Nouveau problème : compléter ... X 7 = 595.

Les multiples précédents sont complétés par des multiples inférieurs à 630 à l'aide de soustractions et la réponse est trouvée : c'est 85. Il convient d'offrir aux enfants de nombreuses occasions d'effectuer des recherches de ce type.

3.2 Partages en parts égales.

Problème : partager 2285 centimes entre 28 enfants de façon que chacun reçoive la même somme.

On obtient assez rapidement des tableaux qui sont reconnus comme tableau de multiples :

Part de chacun	Somme distribuée
1	28
2	56
⋮	⋮

les réponses suivantes sont données :

- *la part de chacun est inférieure à 100 centimes,*
- *100 X 28 = 2800 ; on ne peut pas donner 100 centimes,*
- *10 X 28 = 280 ; on peut donner plus de 10 centimes.*

Question : Avec combien de chiffres s'écrit la part de chacun ?

Les enfants viennent donc de résoudre une question essentielle relative à la division et qui se posera très souvent par la suite :

- Ils ont déterminé un encadrement de quotient.
- Ils connaissent le nombre de chiffres du quotient.

Nous allons tenter de trouver maintenant une partie de la suite des multiples intéressante pour notre problème. Nous sommes amenés à examiner certains multiples et dire s'ils sont «loin» ou «près» de celui que nous cherchons ce qui nous conduit à ouvrir une troisième colonne à notre tableau

Part de chacun	Somme distribuée	Observation
100	2800	c'est trop.
50	1400	il reste 825.
25	700	
75	2100	il reste 185.
76	2128	il reste 157.

- *Plus on est «près», plus le reste est petit.*
- *Chaque fois que la part de chacun augmente de 1 le reste diminue de 28.*
- *Si on savait combien de fois il y a 28 dans le reste, on pourrait trouver la part de chacun.*

Le tableau est continué ainsi.

76	2128	il reste 157
5	140	
81	2268	il reste 17

Réponses : On peut distribuer à chacun 81 centimes et il reste 17 centimes.
Il n'y a pas assez pour donner à chacun 82 centimes.

Remarque : Nous avons trouvé une méthode pour obtenir une solution et de plus nous avons vu que, le partage initialement proposé peut être ramené au problème du partage des restes successifs. Sans avancer davantage, d'autres problèmes de partage et de multiplication à trou sont posés afin que les enfants prennent nettement conscience de ces résultats et les investissent dans leur recherche.

IV – VERS UNE TECHNIQUE DE LA DIVISION.

Les exercices précédents et les calculs que nous avons faits, nous conduisent à adopter une nouvelle disposition que nous baptisons «division». Nous introduisons alors progressivement les mots quotient, reste, puis diviseur* et dividende*.

Exemple : Partager 8743 objets entre 27 personnes.

La part de chacun est supérieure à 10, car 27 X 10 = 270.
Elle est supérieure à 100, car 27 X 100 = 2700.
Elle est inférieure à 1000, car 27 X 1000 = 27000 et 27000 > 8743.

La part de chacun s'écrit donc avec 3 chiffres. On adopte la disposition qui suit.

Nous opérons de la manière suivante (le travail de chacun sera facilité si nous prenons soin d'écrire à l'avance les 9 premiers multiples de 27) :

le quotient s'écrit avec 3 chiffres ; la part peut être de 200 car 200 X 27 = 5400. Le reste est écrit dans la colone de gauche.

On obtient :

$$\begin{array}{r|l} 8743 & 27 \\ \cline{2-2} -\ 5400 & 200 \\ \cline{1-1} 3343 & \end{array}$$

200 X 27 = 5400

X 27	
1	27
2	54
3	81
4	108
5	135
6	162
7	189
8	216
9	243

* *Ces mots ne sont pas indispensables au CE et peuvent très bien n'être introduits qu'au CM.*

On peut encore distribuer 100 à chacun avec le reste.

Nous retranchons 2700 au reste pour obtenir le nouveau reste.

Soit :

8743	27
- 5400	200
3343	+ 100
- 2700	
643	

200 X 27 = 5400

100 X 27 = 2700

Enfin, on a encore distribué 20, puis 3, ce qui finalement donne :

8743	27
- 5400	200
3343	+ 100
- 2700	+ 20
643	+ 3
- 540	323
103	
- 81	
22	

200 X 27 = 5400
100 X 27 = 2700
20 X 27 = 540
3 X 27 = 81

323 X 27 = 8721

X 27

1	27
2	54
3	81
4	108
5	135
6	162
7	189
8	216
9	243

Conclusion : la part de chacun est 323 et il reste 22 objets.

La table des premiers multiples du diviseur permet de choisir les «quotients» successifs plus judicieusement et d'arriver plus rapidement au résultat final.

Si un des essais est trop fort on n'oublie pas de le ranger dans la colonne de droite afin de ne pas l'ajouter à la fin de l'opération dans le calcul du quotient.

De nombreux nouveaux problèmes sont alors proposés, les enfants utilisant pour les résoudre les dispositions qu'ils préfèrent : suite de multiples ou disposition avec calculs des restes.

V – LA TECHNIQUE CLASSIQUE DE LA DIVISION.

Il ne paraît pas essentiel d'utiliser la technique classique au CE2 ni même peut être plus tard. Les nombreux blocages que l'on peut observer proviennent en partie de la complexité de cette technique qui nécessite la réalisation simultanée de multiplications et de soustractions généralement accompagnée d'une optimisation dans la recherche des chiffres successifs du quotient. Il convient au niveau de l'apprentissage de séparer ces difficultés.

Soit à effectuer la division de 2857 par 51. La première question à poser est celle du nombre des chiffres du quotient. Le quotient est supérieur à 10 et inférieur à 100 il s'écrit donc avec deux chiffres. Nous pouvons donc chercher maintenant le nombre des dizaines du quotient.

On dispose de 285 dizaines à partager en 51 parts.

$$\begin{array}{r|l} 2\,8\,5\,7 & 5\,1 \\ \cline{2-2} -\underline{2\,5\,5} & 5 \\ 3\,0 & \end{array}$$

Puis on partage les unités on dispose de 30 dizaines et 7 unités soit 307 unités.

$$\begin{array}{r|l} 2\,8\,5\,7 & 5\,1 \\ \cline{2-2} -\underline{2\,5\,5} & 56 \\ 3\,0\,7 & \\ -\underline{3\,0\,6} & \\ 1 & \end{array}$$

Il paraît intéressant que les enfants sachent à chaque instant ce qu'ils cherchent et pourquoi ils procèdent ainsi. Nous n'avons obtenu une efficacité satisfaisante dans cette présentation qu'à partir du CM1. Après les vacances de très nombreux enfants sont revenus spontanément à la suite des multiples, il apparaît donc que la technique classique leur apparaît comme un procédé compliqué et nécessite une lente intégration.

En conclusion. Dans notre étude nous n'avons pas séparé les cas : «quotient exact» et «quotient entier», le quotient exact n'apparaissant que comme cas particulier. L'expression division euclidienne n'a pas été employée ; elle n'apporte en effet aucune information aux enfants. Nous avons privilégié l'aspect «logique en situation de problème» par rapport à l'aspect «technique opératoire». Les enfants s'apperçoivent alors qu'une technique opératoire perfectionnée permet seulement d'obtenir plus rapidement les résultats et n'hésitent plus à se mettre en situation de recherche sans savoir poser d'emblée l'opération à effectuer.