ESTIMATION DE QUANTITÉS DANS LES ÉCOLES ÉLÉMENTAIRES ALLEMANDES

Florence SORIANO-GAFIUK[1]

Résumé. Cet article concerne la pratique des estimations de quantités représentées de manière non symbolique par le biais de photographies. Ces activités arithmétiques (appelées en allemand *Bilderschätzaufgaben*) sont très classiques dans le pays de Goethe, aussi bien au niveau de l'enseignement du premier degré que des premières années du second degré. Différentes procédures de résolution sont présentées : comptage approximatif, perception visuelle quasi-simultanée, stratégies de non-comptage, etc. Agrémenté de nombreux exercices corrigés, l'article s'achève par une mise en perspective dans le contexte de l'école élémentaire française.

Mots-clés. Estimation, quantité, perception visuelle, sens du nombre, école élémentaire.

Introduction

De la petite section au cours moyen, les élèves apprennent à déterminer les quantités. En cycle 1, ils découvrent le principe de cardinalité pour dénombrer une collection par comptage (MEN, 2024). Au Cours Préparatoire, ils passent progressivement des activités d'énumération à la mise en œuvre de calculs pour résoudre des problèmes du type parties-tout (MEN, 2021, p. 19). Peu à peu, ils développent ainsi leur capacité à reconnaître les opérations en jeu lorsqu'il s'agit de résoudre des problèmes dont les données numériques sont des entiers (*ibid.*, p. 6) : l'addition permet de calculer le nombre total d'objets répartis dans différentes collections, et la multiplication peut être introduite comme une addition itérée dans le cas de situations de partage équitable (*ibid.*, p. 56). En cycle 2, les élèves continuent à développer leur connaissance des nombres entiers et du calcul entre nombres entiers, en étant notamment confrontés à des problèmes contextualisés (MEN, 2020, p. 57).

Malgré ces différentes étapes qui visent en particulier à construire le nombre, force est de constater que les élèves de cycle 2 se retrouvent en difficultés lorsqu'il s'agit d'estimer à vue d'œil des quantités d'objets. Une expérience a par exemple été conduite dans une classe de CE1 (en France) : par groupe de 4, les élèves devaient tenter de deviner le nombre de pions contenus dans un récipient qui en contenait 420 (*cf.* figure 1).

Figure 1

Les estimations données par les six groupes d'élèves étaient : 2 435 ; 57 ; 200 ; 47 ; 100 et 110.

[1] florence.soriano-gafiuk@univ-lorraine.fr

Cette difficulté des élèves à estimer de manière plausible une quantité laisse apparaître une déficience dans la perception de la numérosité (c'est-à-dire du cardinal d'une collection appréhendée de manière sensible), et donc un défaut du sens des nombres. Face à ce constat, cet article propose une remédiation par le traitement d'activités d'estimation mobilisant la perception visuelle et sollicitant des stratégies de *non-comptage de tous*. Pour cela, il est proposé de porter un regard sur la pratique dans les écoles élémentaires allemandes des problèmes portant sur l'estimation de quantités accessibles globalement et approximativement par la vue. Ces activités sont appelées en Allemagne les *Bilderschätzaufgaben*. Ce terme est un mot composé, *Bilder*, signifiant « images », *schätzen*, signifiant « estimer » et *Aufgaben*, signifiant « tâches » (dans le sens de « exercices »). Comme il est à structure hypotaxique, il est composé d'un déterminant (*Bilder*) et d'un déterminé (lui-même composé d'un verbe, *schätz-* et d'un substantif, *Aufgabe*). *Bilderchätzaufgaben* est donc interprété par « tâches d'estimation à l'appui d'images ». On comprend dès lors que ces activités exigent des élèves un traitement à la fois cognitif, lié à la nécessité de percevoir, mais aussi technique, lié cette fois-ci à la nécessité d'opérer des calculs. Cet intérêt marqué de la littérature germanophone pour les *Bilderschätzaufgaben*, aussi bien au niveau de l'école élémentaire que des premières années du lycée (fusionné avec le collège en Allemagne), reflète l'importance accordée dans le pays voisin aux situations-problèmes telles qu'elles se présentent dans le *monde propre à la vie*, tout un chacun étant en effet amené, sans qu'il en soit forcément conscient, à effectuer quotidiennement des estimations (Paenza, 2006).

D'une certaine manière, ces pages constituent la suite de l'article (Soriano-Gafiuk, 2024) concernant une mise en perspective dans le contexte français des problèmes d'estimation traités dans les écoles élémentaires allemandes et portant cette fois non pas sur les quantités, mais sur les grandeurs physiques (longueur, aire, volume et contenance, masse…). En France, les estimations de ces mesures de grandeurs apparaissent en effet explicitement et de façon récurrente dans les programmes scolaires de mathématiques, du cycle 1 au cycle 3. Sirieix (2023) explique cependant que leur apprentissage est insuffisant, que les écoliers ont intégré peu d'éléments de référence leur permettant d'opérer des comparaisons mentales, et que les tâches d'estimation sont peu présentes dans les manuels scolaires. Concernant de nouveau les quantités, la compétence *estimer* est moins souvent mentionnée dans les programmes scolaires français – elle n'apparaît *grosso modo* que dans les textes fonctionnels portant sur l'école maternelle. De fait, ces différentes remarques incitent à reprendre les trois observations de Sirieix (2023) dans le cas des estimations de quantités. C'est ainsi qu'en plus de s'intéresser à la construction du sens du nombre dans les écoles élémentaires françaises, cet article propose une réaction aux questions soulevées par Sirieix.

1. – Caractéristiques des *Bilderschätzaufgaben* portant sur les quantités

Une *Bilderschätzaufgabe* portant sur les quantités est un problème d'estimation d'une collection d'objets accessible visuellement par le biais d'une image ou d'une photographie, et dont une résolution est conduite sans recourir au comptage de tous les objets. En effet, les éléments de la collection peuvent pour une part être cachés, rendant ainsi leur comptage impossible. Ils peuvent aussi être si nombreux que leur énumération serait trop fastidieuse.

L'énoncé d'une *Bilderschäzaufgabe* ne contient aucune donnée numérique. Il se présente généralement sous la forme d'une question courte et ouverte. Parfois, lorsque les élèves n'ont pas un niveau de compétences suffisant, la question peut être fermée et du type : « est-ce possible ? ».

> *Ce matériel pédagogique facilite l'entrée dans l'activité en apportant des éléments de comparaison et en offrant ainsi une première idée de l'échelle de valeurs dans laquelle il est proposé de travailler [...]. Il constitue, pour les élèves, une étape vers une « maturité » mathématique, l'objectif final étant l'aptitude à résoudre des problèmes d'estimation totalement ouverts* (Soriano-Gafiuk, 2024, p. 18).

Les *Bilderschätzaufgaben* ne sont pas des devinettes qui se résolvent à l'aveuglette (Winter, 2003, p. 18). Leur traitement consiste à développer des stratégies, à s'appuyer sur des connaissances et expériences de la vie, à opérer des comparaisons mentales, mais aussi d'une manière générale, à mobiliser des aptitudes cognitives comme la perception visuelle et la mémorisation.

Afin de rendre notre discours plus parlant, nous proposons la découverte de deux premières *Bilderschätzaufgaben*.

Bilderschätzaufgabe 1

(niveau cycle 2) (Cech-Wenning, 2022, carte n° 4).

> *Ce chien dalmatien a 70 taches sur le corps. Est-ce possible ?*

Figure 2
© Stéphanie CECH-WENNING.

Fiche pédagogique. Par comptage, il semble que, sur le flanc visible du chien, une cinquantaine de taches apparaissent – certaines taches se confondant, il est difficile d'établir un compte exact. Même si les chiens dalmatiens n'ont pas des robes scrupuleusement symétriques, il est possible de supposer que cet animal a plutôt une centaine de taches. La réponse à la question est donc négative.

Bilderschätzaufgabe 2

(niveaux cycles 2 et 3) (Cech-Wenning, 2022, carte n° 2).

> *Combien de pommes cette caisse contient-elle ?*

Figure 3
© Stéphanie CECH-WENNING.

Fiche pédagogique. Au niveau du cycle 2, les élèves peuvent compter approximativement les pommes qui apparaissent sur la photographie dans la première moitié de la caisse (dans le sens longitudinal), puis de doubler le résultat. Il semble ainsi que la caisse contient environ $2 \times 22 = 44$ pommes. Au niveau du cycle 3, est au programme la compétence : *déterminer le volume d'un pavé droit en se rapportant à un dénombrement d'unités*. Or il semble que : sur la longueur de la caisse, il y a à peu près 5 pommes ; sur la hauteur, il y a à peu près 3 pommes ; et sur la largeur, il pourrait y avoir aussi 3 pommes. Si les élèves peinent pour la largeur, le professeur peut demander à ces derniers de mimer avec les mains les dimensions de la caisse, et s'ils sont toujours en difficultés, leur montrer une caisse vide, l'objectif étant de comparer mentalement les différentes dimensions de la caisse. Au final, il est possible d'énoncer que le nombre de pommes est environ $3 \times 3 \times 5 = 45$. Les deux valeurs obtenues (44 et 45) ne sont pas les mêmes, mais donnent une idée approximative du nombre réel de pommes.

Plus que de simples problèmes concrets, ces exercices d'estimation sont des tâches dont le traitement s'appuie sur des connaissances et expériences de vie propres à chaque élève, c'est-à-dire développées au-delà du seul cadre scolaire (par exemple, savoir que les taches sur chacun des flancs du dalmatien sont en quantité comparable, se représenter mentalement les proportions d'une caisse…). Les *Bilderschätzaufgaben* sont des activités qui font en effet écho au *monde propre à la vie* (traduit de *Lebenswelt*), un concept philosophique allemand qui rappelle notamment que la numérosité de notre environnement ne s'offre pas à nous par une des valeurs numériques précise (Farges, 2006, p. 191). La *Lebenswelt* est expliquée dans la littérature comme une sorte d'articulation entre *« le monde »* et *« le vivre »* (*ibid.*, p. 194). Or, dans cette vie de tous les jours, les calculs du quotidien sont le plus souvent effectués mentalement et entre nombres approximatifs (Blankenagel, 1983, p. 315). Pour cette raison, lors de la résolution d'une *Bilderschätzaufgabe*, les calculs doivent *a priori* pouvoir être effectués de tête. Le professeur peut cependant préférer que les élèves laissent des traces écrites lors de la phase de recherche ou d'institutionnalisation, l'écrit permettant en effet :

• d'effectuer des calculs en ligne et ainsi de passer par *« des étapes de calcul intermédiaires qui seraient trop lourdes à garder en mémoire »* (MEN, 2016, p. 1),

• de procéder à des calculs posés et ainsi de développer des automatismes par la mise en œuvre d'algorithmes (*ibid.*).

Quels que soient les choix pédagogiques des enseignants, les calculs doivent rester élémentaires et rapides – on parle dans la littérature de *calculs en coin de table*.

2. – Le code analogique

Selon Dehaene (2020), les deux hémisphères du cerveau possèdent un certain sens du cardinal du nombre entier, mais sont stimulés par des catégories de sollicitations bien distinctes (*ibid.*, p. 249). Celui de gauche permet la construction de compétences qui s'appuient sur la représentation symbolique (numérique ou verbale) des nombres et sur les algorithmes de calcul exact. Celui de droite est parfois considéré comme *« un cancre en arithmétique »* (*ibid.*, p. 250), certes, mais présente une agilité intuitive certaine. Il sait opérer des comparaisons qualitatives à vue d'œil de collections d'objets (plus nombreux, moins nombreux, aussi nombreux, beaucoup plus, très peu…) et positionner approximativement le nombre perçu sur la ligne numérique mentale. C'est donc d'abord à lui que sont affectées les tâches d'estimation de quantités. Pour illustrer tout ceci, il suffit de regarder dans le ciel une grande nuée d'oiseaux (supposons 1 232 oiseaux) et de tenter d'apprécier à vue d'œil le nombre d'oiseaux, donc sans chercher à les compter ; si une personne entraînée saura donner un ordre de grandeur (par exemple, un millier), il sera en revanche incapable d'indiquer le nombre exact de volatiles. Le système de représentation des quantités ici en jeu n'est pas symbolique ; il offre une approche sensible du nombre appelée code analogique et incarne le sens du nombre. En l'occurrence, ce code analogique s'appuie sur la perception visuelle de la numérosité et sollicite un réseau de neurones localisés de façon stratégique à proximité du cortex visuel. Les compétences de transcodage, de l'analogique vers le symbolique, sont naturellement également mobilisées lors du traitement d'une *Bilderschätzaufgabe*, l'activité devant s'achever par une phrase de conclusion qui recourt à la représentation en chiffres des quantités estimées.

En classe, les élèves bons calculateurs ne sont pas forcément les meilleurs estimateurs, déjà parce que les deux compétences sollicitent des circuits neurologiques du cerveau différents, mais aussi parce que tout un chacun développe un rapport avec le *monde propre à la vie* qui lui est singulier. À l'école, ces différences d'appréhension des quantités perçues dans un environnement propre à soi sont finalement peu lissées, les élèves n'étant déjà pas habitués à interroger les données numériques des énoncés mathématiques, ni même parfois à questionner les résultats issus de leurs calculs. Face à ces constats, Padberg et Benz (2020, p. 19) appellent à agir sur l'image des mathématiques. Les élèves doivent en effet comprendre que les mathématiques constituent un langage permettant d'expliquer le monde, et donc intégrer le fait que le résultat obtenu lors de la résolution d'un problème contextualisé dont les données numériques sont apportées de manière précise par l'énoncé, doit être en cohérence avec le résultat estimé, ou a minima avec la connaissance propre à chacun du monde tel qu'il est perçu et vécu.

3. – De la perception visuelle à la détermination du cardinal

Il existe plusieurs processus cognitifs permettant de déterminer le cardinal d'une collection accessible par la vue (*ibid.*).

L'un de ces processus est la *subitisation*, dont le terme est dérivé du mot latin *subitus*, qui signifie subit/soudain. Il relève du code analogique et consiste à percevoir de manière exacte une quantité d'objets en un seul coup d'œil, sans activer d'autres processus mentaux. Il s'agit donc de saisir de façon simultanée tous les éléments d'un ensemble et donc d'attraper instantanément le cardinal de cet ensemble. Des études décrivent cependant qu'une telle détection est possible pour les quantités allant de zéro à trois éléments, voire parfois quatre éléments (Padberg & Benz, 2020, p. 19). Les collections étudiées dans cet article ont cependant une numérosité plus grande.

Le comptage est un second processus cognitif visant la détermination d'une quantité : il relève du code symbolique verbal et permet d'énumérer les objets d'une collection, c'est-à-dire d'appréhender la numérosité d'un ensemble d'objets accessibles individuellement par la vue. La stratégie est cependant fastidieuse pour les très grandes quantités numériques.

Un troisième traitement cognitif est possible pour déterminer le cardinal d'une collection (*ibid.*) ; il s'agit cette fois-ci de procéder à des regroupements de même taille des objets de la collection. Le nombre d'objets est alors égal au produit du nombre de regroupements par le cardinal de chacun de ces regroupements. Ces processus d'organisation des éléments d'une collection constituent une étape importante dans la construction du nombre (par exemple, lors de la découverte du système décimal).

Le tableau 1, qui est une forme adaptée de (Padberg & Benz, 2020, p. 19), rappelle que la détermination du cardinal d'une collection relève de la façon dont les objets de la collection sont perçus. Plus précisément, il explique les interconnexions possibles entre la perception visuelle d'une collection et la méthodologie de détermination du cardinal de ladite collection.

Les deux prochaines sections proposent de s'appuyer sur ce tableau 1 pour l'élaboration d'une méthodologie dans le traitement d'une *Bilderschätzaufgabe*.

Perception visuelle d'une collection			
La collection n'est pas structurée.		La collection est structurée.	
Les œufs sont perçus individuellement.	Les œufs sont perçus de manière structurante.	Les œufs sont perçus de manière structurée.	Les œufs sont perçus par le biais de la structure.
			
Il s'agit de compter tous les œufs.	Il s'agit de procéder à des regroupements par 10 (par exemple) et d'achever au besoin par un calcul.	Il s'agit de compter le nombre d'œufs dans l'un des regroupements et d'achever au besoin par un calcul.	Il s'agit de s'appuyer sur ses connaissances et expériences de la vie – on sait qu'une boite contient 10 œufs – et d'achever au besoin par un calcul.
Détermination du cardinal de la collection			

Tableau 1 *: Perception analogique d'un nombre et stratégies de dénombrement.*

4. – Estimation visuelle d'une collection non structurée

Ce chapitre concerne l'estimation du nombre d'objets d'une collection non structurée dont les éléments sont plus ou moins individuellement accessibles par la vue (image floue, nuée dense, objets cachés…). Il est agrémenté de nombreux clichés issus du portail ornithologique https://www.oiseaux.net/. Les photographes auteurs sont remerciés pour les autorisations accordées.

4.1. - Collection d'objets perçus sans structuration

Lorsque les objets constituent une nuée déstructurée dont les éléments peuvent être perçus plus ou moins individuellement, il est toujours possible de recourir au comptage approximatif de ces éléments. Cela étant dit, dès lors que la quantité à apprécier est importante, le processus de comptage devient fastidieux, voire impossible, et n'apparaît plus en phase avec les procédures mises en place pour le traitement d'une *Bilderschätzaufgabe*, ceux-ci devant répondre aux besoins courants de la vie quotidienne et donc correspondre à des processus rapidement opérés.

La procédure de *comptage de tous* une fois écartée, il est possible de recourir au système analogique du cerveau, et notamment à son sous-système dit *approximatif*[2]. Ce sous-système approximatif *« est essentiel à chaque fois que nous faisons appel à notre intuition rapide de la taille numérique »* (Dehaene, 2010, p. 315). Il permet d'estimer une quantité, autrement dit de saisir les objets de la collection par la vue de façon quasi-simultanée (*ibid.*). Un adulte non-entraîné parvient en effet à estimer efficacement et rapidement la numérosité d'une collection, même si l'erreur tend à augmenter avec la taille de la quantité estimée (Dehaene, 2020, pp. 90-93). D'une manière générale, *« notre perception des*

[2] Le sous-système dit *précis* correspond à la subitisation.

grands nombres se fonde sur la densité des objets, la surface qu'ils occupent, et la régularité de leur distribution dans l'espace » (*ibid.*, p. 98). Les neurosciences expliquent par ailleurs que la personne adulte tendra à surestimer le nombre perçu lorsque les objets sont répartis régulièrement, mais à le sous-estimer lorsque la distribution est irrégulière (*ibid.*, p. 97). De la même manière, les quantités denses sont surestimées, alors que les éparses sont sous-estimées. Elles établissent cependant que le système d'estimation interne ne *« demande que quelques mesures précises pour se calibrer correctement »* (*ibid.*).

Ces observations, qui restent valables pour les élèves de cycles 2 et 3 conduisent à s'intéresser aux estimations à vue d'œil, donc de manière quasi simultanée, puis à comparer ces valeurs avec celles obtenues par d'autres stratégies. Les cardinaux trouvés doivent peu à peu constituer des points de référence qui serviront de « calibrage ». Ils permettront en effet aux élèves, lors de nouvelles tâches d'estimation, de procéder à des comparaisons qualitatives et de gagner ainsi en efficacité. Par exemple, si une collection semble de manière sensible de même taille qu'une seconde collection dont une image mentale a été mémorisée, les cardinaux de ces deux collections sont estimés être dans la même échelle de grandeur. Les exercices suivants illustrent ce qui peut être proposé aux élèves :

Bilderschätzaufgabe 3

(niveau cycle 2)

Estimez à vue d'œil (sans compter) le nombre d'étourneaux sansonnets représentés sur chacune de ces photographies. Sur quel cliché voit-on davantage d'oiseaux ? Puis, comptez et comparez les nombres exacts de volatiles avec les valeurs estimées.

Figure 4
© Jacques RIVIÈRE.

Figure 5
© Jacques RIVIÈRE.

Fiche pédagogique. À vue d'œil, il est facile de percevoir qu'il y a environ une dizaine d'oiseaux sur chacune des photographies. En fait, le nombre de volatiles est exactement 11 à gauche et 12 à droite. Le groupe étant cependant plus dense et plus visible sur la première photographie que sur la seconde, les élèves tendent de façon spontanée à considérer qu'il y a plus d'oiseaux à gauche qu'à droite.

Au fur et à mesure de la montée en compétences des élèves, les nuées d'oiseaux à estimer à vue d'œil peuvent augmenter en taille.

Bilderschätzaufgabe 4

(niveau cycle 2)

Quel est le nombre de vautours qui apparaissent sur la figure 6 ? Puis, quel est le nombre de flamants roses sur la figure 7 ?

Figure 6
© Marc FASOL.

Fiche pédagogique pour la figure 6. À vue d'œil, il semble qu'il y a environ 20 vautours (supposons). La vérification par le comptage est rapide, même s'il reste approximatif – les vautours ne sont en effet pas tous très visibles, certains étant partiellement cachés. On compte 22 vautours environ, soit autour de la vingtaine.

Figure 7
© Françoise FOLLIARD.

Fiche pédagogique pour la figure 7. À vue d'œil, il semble qu'il y a environ, admettons, une cinquantaine de flamants roses. Il est également possible de comparer mentalement les quantités des figures 6 et 7, et de percevoir qu'il y a trois fois plus de flamants roses que de vautours, soit environ 60 oiseaux échassiers. Pour vérifier cette intuition sensible, il est possible de comparer les valeurs estimées à une valeur proche de la réalité et obtenue par comptage. L'énumération permet de trouver 61. Elle reste cependant approximative, les volatiles n'étant pas tous bien visibles.

4.2. - Collection d'objets perçus de manière structurante

Lorsque les objets apparaissent en masse, l'erreur d'estimation à vue d'œil devient importante, surtout si les élèves ou personnes sondées ne sont pas entraînés à ce type de tâches. Dans ce cas, l'estimation de la collection consiste à attraper mentalement les objets en procédant à des regroupements. Elle est en effet rendue possible par la mise en œuvre de stratégies de comptage (par exemple, pour l'énumération des objets d'un regroupement), mais aussi de non-comptage (par exemple, dans le cas d'une équirépartition à vue d'œil). L'estimation du nombre d'objets perçus s'appuie ensuite sur des calculs qui doivent être forcément simples et rapides.

Avant de revenir à l'estimation de nuées d'oiseaux qui apparaissent comme des nuages de points qui peuvent être répartis de manière très irrégulière, le traitement de l'exercice suivant est proposé.

Bilderschätzaufgabe 5

(niveau cycle 2) (Göckel, 2020, pp. 6-7).

Combien de coccinelles sont représentées sur cette tapisserie ?

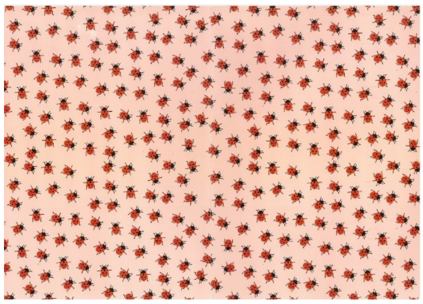

Figure 8
© Dorothée GÖCKEL.

Fiche pédagogique. Les coléoptères sont tous perceptibles par la vue de façon très nette, donc peuvent être comptés. Leur grand nombre rend cependant le comptage un peu fastidieux. La seconde idée est donc de percevoir globalement et approximativement le nombre de coccinelles. Ce processus est beaucoup plus rapide et quasi-instantané. Cela dit, sans entraînement préalable, les erreurs entre les nombres perçu et estimé risquent d'être importantes. La troisième option vise à opérer mentalement des regroupements de coléoptères – des traces écrites peuvent cependant être laissées pour faciliter le travail des élèves.

Par exemple, les coccinelles peuvent être regroupées au sein de $4\times4=16$ rectangles superposables (*cf.* figure 9).

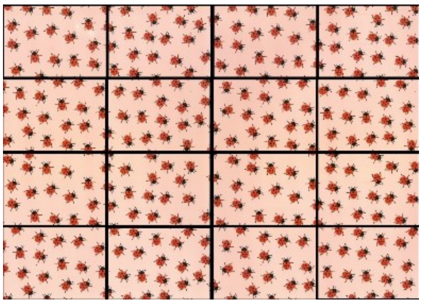

Figure 9 *: Regroupement des coccinelles grâce à un quadrillage 4×4.*

Comme les coccinelles sont, à vue d'œil, réparties de façon uniforme sur le tissu, il suffit de compter le nombre de coléoptères dans la case en haut à gauche ; celle-ci contient 15 coccinelles. Le nombre de coccinelles est donc égal à environ 15×16, qu'on peut calculer ainsi : $(10+5)\times16=160+80=240$.

Dans la vie courante, les éléments d'une nuée ne sont cependant pas forcément organisés selon une répartition aussi uniforme.

Bilderschätzaufgabe 6

(niveau cycle 2).

Quel est le nombre d'étourneaux sansonnet ?

Figure 10
© Jacques RIVIÈRE.

Fiche pédagogique. Comme les oiseaux sont répartis de façon plus irrégulière que les coccinelles, l'estimation globale (admettons 200) est moins efficace. Il est également possible d'estimer à vue d'œil qu'il y a deux fois plus d'oiseaux sur la figure 10 que sur la figure 4 (soit environ 120) ou deux fois moins que sur la figure 5 (soit environ encore 120). Une autre procédure consiste à procéder à des regroupements. Par exemple, les étourneaux peuvent être regroupés au sein de $3\times3=9$ rectangles superposables.

Figure 11 *: Regroupement des étourneaux grâce à un quadrillage 3×3.*

À vue d'œil, les volatiles sont répartis de façon à peu près uniforme, sauf peut-être dans la case centrale où les oiseaux semblent plus nombreux et dans la case en haut à droite où les oiseaux semblent moins nombreux. On supposera toutefois que ces deux cases se compensent. Finalement, il suffit de compter le nombre d'étourneaux par exemple dans la case en haut à gauche ; celle-ci contient 15 volatiles. Le nombre total d'étourneaux est donc égal à environ 9×15, qu'on peut calculer ainsi : $(10-1)\times15=150-15=135$.

Le comptage, qui reste approximatif même si on zoome la figure 10, donne une estimation d'environ 150.

Bilderschätzaufgabe 7

(niveau cycle 2).

Quel est le nombre d'étourneaux sansonnet ?

Figure 12
© Jacques RIVIÈRE.

Fiche pédagogique. La nuée est plus dense que celle de la figure 10, si bien que la perception à vue d'œil de la quantité est plus difficile – admettons cependant qu'on perçoit une nuée de 400 étourneaux. La comparaison visuelle avec la figure 10 peut permettre de supposer qu'il s'agit d'une nuée deux fois plus importante, ce qui laisse entendre que la taille de la nuée de la figure 12 est environ de $2 \times 150 = 300$ oiseaux.

Une autre méthode cognitive consiste à opérer un découpage. Par exemple, les étourneaux peuvent être regroupés au sein de 9 rectangles superposables (*cf.* figure 13). On code les cases qui, à vue d'œil, comptent le même nombre de volatiles. Il s'agit ensuite de compter approximativement le nombre d'oiseaux dans la case codée par un triangle (admettons 11), dans une case codée par un rectangle (admettons 21), dans une case codée par une étoile (admettons 34) et dans une case codée par un disque jaune (admettons 40).

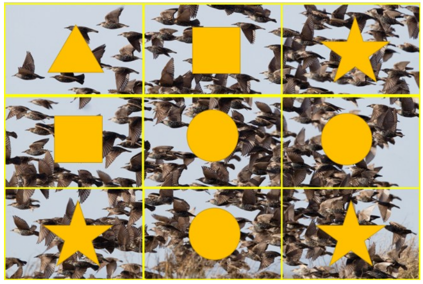

Figure 13 *: Regroupement des étourneaux grâce à un quadrillage codé.*

Le nombre total d'étourneaux est donc égal à environ $11+2\times21+3\times34+3\times40$, soit $11+42+102+120=275$. Le comptage qui reste approximatif même en zoomant l'image donne une estimation d'environ 280.

Les regroupements ne sont pas forcément constitués selon une grille de mailles rectangulaires. De nombreux autres découpages sont possibles, comme l'illustre l'exemple suivant.

Bilderschätzaufgabe 8

(niveau cycle 2).

Combien de pétales a cette fleur de pissenlit ?

Figure 14

Fiche pédagogique. La première stratégie repose sur la perception globale à vue d'œil des pétales de la fleur (admettons 250). Elle exige cependant un certain entraînement. La seconde stratégie consiste à percevoir la fleur comme un disque découpé en 8 secteurs superposables (*cf.* figure 15).

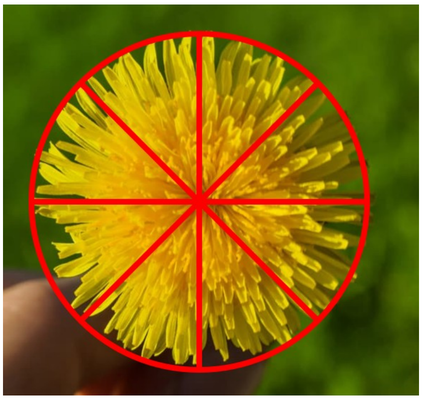

Figure 15 *: Fleur vue comme un disque, partagé en 8 secteurs superposables.*

On compte ensuite environ 25 pétales dans l'une des sections circulaires (prises au hasard parmi les 8), ce qui nous permet d'estimer qu'il y a environ 8×25 pétales, soit environ 200 pétales. Une autre méthode consiste à compter (approximativement) le nombre de pétales le long d'un rayon (supposons 8), puis à appliquer la formule de l'aire d'un disque. On obtient ainsi un nombre approximatif de pétales égal à $\pi \times 8^2$, soit encore environ 200 pétales.

Le chapitre suivant s'intéresse à un autre type de problèmes d'estimation : la collection n'est plus perçue comme un nuage de points, mais comme un « tout déjà structuré » qui peut être un animal ou une chose particulière issue de la vie courante.

5. – Estimation visuelle d'une collection structurée

5.1. - Collection d'objets perçus dans un « tout structuré »

Dans ce cas, la tâche *estimer* est susceptible de mobiliser des connaissances et expériences du *monde propre à la vie*. Il s'agit ensuite de recourir à des stratégies de comptage, mais aussi de non-comptage (équirépartition, disposition selon une forme géométrique du plan ou de l'espace, symétrie…). Des calculs peuvent aussi être opérés, mais restent forcément simples et élémentaires. Les *Bilderschätzaufgaben* 1 et 2 correspondent à cette catégorie de problèmes d'estimation. Dans l'exercice n° 1, le tout correspond au dalmatien entier (structuré en deux parties) et les éléments aux taches du pelage ; dans l'exercice n° 2, le tout correspond au bac transparent (structuré en quatre parties) et les éléments aux pommes.

Trois nouveaux exercices permettent d'illustrer le cas des collections structurées.

Bilderschätzaufgabe 9

(niveau cycle 2).

Combien d'hirondelles se sont posées sur les quatre fils électriques ?

Figure 16
© Jean-Michel FENEROLE.

Fiche pédagogique. À vue d'œil, la perception globale de ce groupe de volatiles est d'une centaine. Comme les oiseaux semblent équirépartis sur les quatre fils, il est possible de considérer que la collection est structurée. Il est vrai que les hirondelles paraissent un peu plus nombreuses sur le second fil (à partir du haut) et peut-être un peu moins sur le dernier fil, mais le tout devrait se compenser. On compte sur le premier fil 26 oiseaux (25 en estimant à vue d'œil), ce qui permet de penser, après multiplication par 4, qu'il y a un peu plus d'une centaine d'oiseaux. Par comptage approximatif (il est difficile de faire mieux), nous trouvons 108 oiseaux.

Bilderschätzaufgabe 10

(niveau cycle 3).

Combien de melons ont été posés sur cet étalage ?

Figure 17

Fiche pédagogique. À vue d'œil, il est possible de supposer qu'il y a par exemple 40 melons. Pour une estimation plus précise, la perception de cet empilement de melons comme une structure à trois étages est possible. Le premier étage est un rectangle de 6 melons de longueur et de 4 melons de largeur. Le second étage semble être un carré de 4 melons de côté. Et le dernier étage ne compte que quelques melons (peut-être 8). Au total, les melons de cet empilement seraient approximativement $6\times4+4\times4+8=24+16+8$, donc 48.

Bilderschätzaufgabe 11

(niveau cycle 3).

Quel est le nombre de pions dans le bocal ?

Figure 18

Fiche pédagogique. Cette fois-ci, le tout structuré correspond au bocal avec ses quatre couches de pions que l'on peut supposer contenir grosso modo le même nombre de pions. On admet ensuite que la base de la boîte est carrée. La longueur de côté de ce carré semble être de 6 pions (comptage), la hauteur de la couche de pions pour une couleur donnée semble être de 3 pions (comptage). On estime ainsi que le nombre de pions contenus dans ce bocal est $6\times6\times3\times4=36\times12$, qu'on peut calculer ainsi : $36\times10+36\times2=432$, soit environ 430. Pour rappel, le bocal en contient 420.

5.2. - Collection d'objets perçus par le biais d'une structure

Dans cette nouvelle section, les objets à dénombrer de façon approximative appartiennent à des contenants dont le contenu n'est pas attrapable par la perception visuelle – par exemple en raison de parois opaques. Dans ce cas, la stratégie consiste à s'appuyer sur des cardinaux de référence au préalable mémorisés. Le traitement de ces exercices repose donc sur la construction d'une culture de la numérosité du *monde propre à la vie*.

Trois exemples sont donnés, le premier concerne des boîtes d'œufs, le second porte sur la dentition et l'ossature d'un chien, et le dernier s'intéresse aux autocars d'une compagnie.

Bilderschätzaufgabe 12

(niveau cycle 3).

Combien d'œufs sont sur les étalages ?

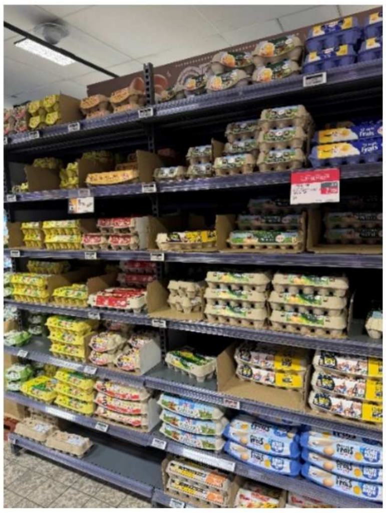

Figure 19

Fiche pédagogique. On sait déjà que les petites boîtes contiennent 6 œufs et que les grandes boîtes contiennent en général 10 œufs (expériences de vie). On observe que trois boîtes au plus peuvent être empilées et on suppose qu'il y a au plus trois rangées de boîtes dans le sens de la profondeur. Par des stratégies de comptage et de non-comptage, on estime ainsi le nombre de petites boîtes égal à environ 80, et le nombre de grandes boîtes égal à environ 110. Il y a donc environ $80 \times 6 + 110 \times 10 = 480 + 1\,100$, soit environ 1 600 œufs.

Bilderschätzaufgabe 13

(niveau cycle 3).

Le chien Odin a 80 dents et 300 os. Est-ce plausible ?

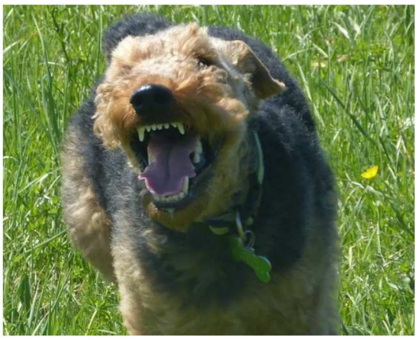

Figure 20

Note pédagogique. Le traitement de l'exercice peut suivre une séance portant sur la dentition et le squelette d'un être humain. Il peut aussi donner un rôle particulier aux élèves qui ont vécu des expériences de jeu avec des chiens, observé des canidés frétiller ou bénéficié de toute autre exposition au secteur canin.

Une solution possible. Concernant les dents, il est déjà possible de s'appuyer sur nos connaissances de la dentition d'un être humain qui compte, pour rappel, 32 dents dont 8 incisives, 4 canines et 20 prémolaires et molaires. La photographie laisse ensuite penser qu'un chien a une dentition comparable à la nôtre. Odin semble avoir 11 incisives (donc déjà 3 dents de plus qu'un humain). Les prémolaires-molaires d'un chien sont plus larges certes, mais les mâchoires d'un chien sont plus longues. Il est donc peu plausible qu'Odin ait 80 dents – en fait, c'est le crocodile qui a 80 dents, le chien en a 42 !

Concernant les os du squelette d'Odin, il est également pertinent de se ramener à une ossature de référence – on sait notamment que le squelette humain compte 206 os. Il est ensuite utile de comparer les corps d'un humain et d'un chien. Le canidé a un cou plus long que celui de l'homme. Il a aussi une queue. Par ailleurs, la colonne vertébrale du chien, de la tête à la queue, semble très souple (chien qui remue la queue et qui frétille à l'arrivée de son maître), ce qui exige un nombre suffisant de vertèbres (entre 47 et 52 pour le chien, contre 33 pour l'homme). L'hypothèse selon laquelle Odin aurait 300 os ne semble pas absurde. En fait, un chien a entre 280 et 300 os.

Bilderschätzaufgabe 14

(niveau cycle 3).

Y a-t-il suffisamment d'autocars pour transporter tous les élèves de ton école ?

Figure 21

Une solution possible. Comme il s'agit de transporter tous les élèves, le nombre de places dans chacun des 12 autobus (le comptage semble pouvoir être exact) doit être minoré, alors que le nombre d'enfants scolarisés dans l'école doit être majoré. Concernant le premier point, un autocar standard peut accueillir au moins 50 personnes (connaissance sémantique). Concernant le second point, dans une école élémentaire, une classe contient généralement moins de 30 élèves (expériences de vie). Le nombre de classes dépendra ensuite de l'école, mais si l'on admet qu'il y a deux classes par niveau, soit 10 classes, le nombre d'élèves sera tout au plus égal à 300. Comme $12 \times 50 = 600$, ces cars peuvent très largement transporter tous les élèves de l'école.

Les sections précédentes ont mis en évidence les compétences mobilisées lors des *Bilderschätzaufgaben*. La question de la mise en œuvre de ce type d'activités se pose désormais.

6. – Quelques réflexions pour la mise en œuvre dans les classes

Ce chapitre reprend ce qui avait déjà été développé dans Soriano-Gafiuk (2024, pp. 22-24) pour le traitement des estimations portant sur les grandeurs. Une adaptation au cas des quantités est faite.

6.1. - Convaincre de la pertinence de l'estimation

Les *Bilderschätzaufgaben* prennent d'autant plus de sens chez les élèves s'il est impossible de calculer de façon exacte le cardinal de la collection représentée. C'est pour cela qu'il est important de discuter avec les élèves de la pertinence du recours à l'estimation et que le choix des *Bilderschätzaufgaben* n'est pas une question secondaire. Toutefois, d'autres supports pédagogiques peuvent être utilisés, comme des textes témoignant de l'importance des estimations dans le *monde propre à la vie*. Pour illustrer cette dernière ligne, le texte suivant est proposé. Il s'agit d'une interprétation dans la langue française d'extraits issus du site de la ligue allemande pour la protection de la nature (https://blogs.nabu.de) et sélectionnés par Bicker (2020, p. 42). Il décrit le comptage des oiseaux sur la zone côtière de la mer des Wadden, une baie germanique de la mer du Nord.

Tous les 14 jours environ, les oiseaux posés au sol sont comptés sur toute la baie de la mer des Wadden. Il s'agit alors de jongler avec de grandes quantités de volatiles. Ce n'est pas un problème trivial et ça peut facilement exaspérer un observateur. Comment en effet avoir une vue d'ensemble de la faune ornithologique ? Et même lorsque les oiseaux sont posés au sol, comment une seule personne peut-elle compter autant d'oiseaux en conservant une rigueur scientifique ? Et comment procéder avec les nuées qui traversent le ciel à vive allure ? La réponse n'est que moyennement satisfaisante : tout est une question d'expérience tant il est nécessaire de disposer d'un bon sens des quantités. Outre les instruments d'observation (jumelles, longue-vue, et, le cas échéant, appareil photographique), l'équipement le plus important pour compter les oiseaux est le compteur et le carnet de notes – votre tête seule serait en effet rapidement dépassée. Si vous disposez de beaucoup de temps et s'il y a peu d'oiseaux, vous pouvez pratiquement compter les oiseaux l'un après l'autre et ainsi développer votre perception visuelle des quantités. Mais plus il y a d'oiseaux à compter, moins il y a de temps disponible, et plus votre calcul deviendra approximatif. Face à un tel défi, le principe est de compter le nombre d'individus d'un grand groupe de vo-

latiles, assez grand mais pas trop, puis d'estimer le nombre de regroupements d'oiseaux de même taille présents le long de la baie. Il est par exemple important que la densité des groupes d'oiseaux soit prise en compte. Ainsi, à la fin, les données calculées ne sont pas des valeurs qui correspondent exactement à la réalité, mais des valeurs qui décrivent au mieux la réalité. Même si, au début, des doutes subsistent quant à la plausibilité des résultats, à la fin cela devient presque une routine.

Mais qui peut dire si l'on est suffisamment proche de la réalité ? Il est nécessaire de ne jamais cesser de comparer les résultats obtenus avec d'autres données scientifiques, et sinon de contrôler régulièrement ses calculs en comptant les volatiles d'après photographies. Aussi, à la fin des observations, ce n'est pas grave si l'on a estimé qu'il y avait 3 700 bécasseaux sanderling alors qu'il y en en réalité 3 912 ou 3 499, car il s'agit en définitive de trouver un ordre de grandeur. Et celui-ci devra en revanche être correct !

Le texte, qui s'achève en rappelant la nécessité de travailler avec des ordres de grandeur lors des activités d'estimation, permet d'introduire la section suivante.

6.2. - Développer les techniques du calcul avec des arrondis

Le traitement des *Bilderschätzaufgaben* passe forcément par des approximations puisque les valeurs numériques sont obtenues par estimation. Les calculs précis n'ont alors plus vraiment de sens. Le mathématicien allemand Carl Friedrich Gauss (1777-1855) affirmait d'ailleurs : « Rien ne montre mieux le manque de culture mathématique qu'un calcul exagérément précis ». Pour cette raison, *« le recours aux valeurs arrondies est privilégié, d'abord parce que les valeurs arrondies sont plus faciles à mémoriser, ensuite parce qu'elles simplifient les calculs, et enfin parce que les contextes des énoncés peuvent exiger l'utilisation d'ordres de grandeur »* (Soriano-Gafiuk, 2024, pp. 20-21). En outre, certaines quantités peuvent apparaître comme négligeables par rapport aux quantités totales à mesurer. Les trois exercices suivants illustrent ces dernières lignes :

Bilderschätzaufgabe 12

(niveau cycle 2).

Combien de fenêtres a le bâtiment de la faculté de sciences humaines du campus universitaire de Metz ?

Figure 22

Fiche pédagogique. Les deux extrémités du bâtiment n'apparaissent pas : à droite, les arbres cachent un pan du bâtiment et, à gauche, la photographie est coupée. Une estimation du nombre de fenêtres impose de fait de faire des suppositions. On peut d'abord partager la façade principale en trois parties : la partie centrale, l'aile droite et l'aile gauche (*cf.* figure 23).

Figure 23

On peut ensuite supposer que les deux ailes sont symétriques, si bien qu'on ne s'intéressera plus qu'à la partie gauche (plus visible sur la photographie), et que les vitres du rez-de-chaussée ne correspondent pas à des fenêtres, mais plutôt à des baies vitrées. La partie centrale est totalement visible ; il semble qu'elle a 11 fenêtres par étage. Pour l'aile gauche, on compte 17 fenêtres par étage. Comme la photographie est coupée, on arrondira par exemple à 25 (mais c'est encore une supposition). Au total, on estime donc le nombre de fenêtres à environ : $4\times(25+25+11)\approx 4\times(25+25+10)$, soit environ 240 fenêtres – le recours aux arrondis est justifié par le non-sens d'un calcul précis, étant donné les suppositions effectuées. On suppose ensuite qu'il y autant de fenêtres sur la façade postérieure (240 fenêtres). Pour les façades latérales, il est possible de supposer qu'elles sont par exemple quatre fois moins longues que les faces frontales et donc qu'elles comptent quatre fois moins de fenêtres, soit environ 60 chacune. D'autres suppositions sont possibles, comme estimer qu'il n'y a qu'une seule fenêtre par étage pour chacune des faces latérales, ces fenêtres correspondant à la cage d'escalier, soit $2\times 4=8$ fenêtres. Les élèves doivent comprendre qu'ils ne sont pas en mesure de valider les hypothèses émises à moins de se procurer les plans du bâtiment, de travailler sur une série de clichés ou de se rendre directement sur les lieux. Au final, l'estimation donne environ $2\times(240+60)=600$ fenêtres pour la première configuration, mais $2\times(240+8)\approx 500$ fenêtres pour la seconde configuration. Il s'agit seulement de résultats plausibles, puisque la forme et les proportions du bâtiment ne sont pas données.

Bilderschätzaufgabe 13

(niveau cycle 3).

Quel est le nombre de manchots royaux ?

Figure 24
© Daniel PERNET.

Une solution possible. À vue d'œil, il y a plusieurs milliers de manchots. Il est cependant difficile d'être plus précis sans autres éléments de référence que les nuées précédemment étudiées. L'idée va être de procéder à des regroupements, ceux-ci devant cependant tenir compte de l'effet de la perspective.

Les manchots sont répartis uniformément sauf en bas de l'image. On découpe donc le cliché en 34 colonnes, en plus du socle rectangulaire (*cf.* figure 25).

Figure 25

Le nombre de manchots présents dans la partie inférieure est, à vue d'œil, négligeable. Le nombre de manchots dans la première colonne est environ 120 (image zoomée). Le nombre total de manchots est donc égal à environ $34\times 120\approx 4\,000$.

Bilderschätzaufgabe 14

(niveau cycle 3).

Quel est le nombre d'hirondelles ?

Figure 26
© Jean-Michel FENEROLE.

Une solution possible. À vue d'œil, une estimation obtenue par perception quasi-simultanée est de 300 environ (par exemple). Pour les quatre premiers fils électriques horizontaux, il est possible de procéder comme pour l'exercice n° 9. Admettons ainsi qu'il y a déjà $4 \times 40 = 160$ oiseaux sur ces 4 fils. Toujours à vue d'œil, on suppose qu'il y a trois fois moins d'oiseaux sur le 5^{e} fil horizontal, soit une quinzaine.

Quant aux deux fils verticaux (de gauche), le comptage est très difficile. L'idée est alors de percevoir des quantités d'une vingtaine. On identifie ainsi 14 regroupements de 20 (*cf.* figure 27), soit 280 oiseaux.

Le troisième fil vertical laisse apparaître, à vue d'œil, une quinzaine d'oiseaux. Les quelques hirondelles en vol sont négligeables.

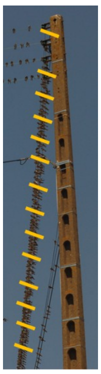

Fig. 27

Au total, on estime donc le nombre d'oiseaux à environ 160+15+15+280, soit, en arrondissant, à environ 500.

6.3. - Éveiller à la numérosité et développer des travaux de coopération

Même si cela prend du temps, il est utile pour le traitement d'activités d'estimation de quantité d'éveiller les élèves à la numérosité de leur environnement et de construire ainsi chez eux une sorte de culture arithmétique. Pour atteindre cet objectif, l'enseignant doit profiter de toutes les opportunités en incitant ses élèves à s'interroger sans cesse sur les données numériques rencontrées dans les textes étudiés en classe, qu'il s'agisse d'énoncés mathématiques, d'articles de journaux ou de ressources documentaires diverses. Il s'agit à chaque fois d'examiner la plausibilité de ces données en comparant celles-ci entre elles bien entendu, mais aussi, au fur et à mesure de la montée en compétences des élèves, en recourant à des valeurs de référence au préalable mémorisées.

Les ressources pédagogiques germanophones proposent aussi de construire avec les élèves des affiches illustrées portant sur des quantités ou des thématiques particulières. Pour illustrer cette nouvelle information, quelques exemples sont apportés.

Affiche sur le nombre 40 : 4 barres de numération, 40 jetons disposés de différentes manières, les 40 voleurs d'Ali Baba, le nombre approximatif de dents du chien (42 exactement), le nombre d'allumettes d'une petite boîte, etc.

Affiche sur le nombre 200 : 2 plaques de numération, le nombre de craies contenues dans deux boîtes de 100, le nombre de feuilles dans un rouleau de papier toilette, le nombre d'élèves dans ton école, le nombre d'os dans le squelette humain (206 exactement), le nombre de cheveux sur 1 cm^2 de cuir chevelu (approximativement), etc.

Affiche « Combien de personnes ? » : dans ta classe, dans ton école, dans une salle d'attente, à la caisse d'un magasin, dans un bus, dans un autocar, dans une rame de TGV, dans un amphithéâtre, dans une salle de cinéma, lors d'une manifestation, dans ta commune, dans ton département, dans ta région, en France, en Europe et dans le monde.

Comme les *Schätzaufgaben* exigent la mémorisation de valeurs de référence, les activités de coopération sont souvent recommandées (par exemple par le site allemand KIRA[3]). Il faut en effet comprendre que les élèves ont leurs propres expériences de vie et connaissances sémantiques. De ce fait, *« la mutualisation des richesses individuelles par le biais d'un travail en groupe présente une véritable plus-value »* (Soriano-Gafiuk, 2024, p. 22). D'autres arguments soutiennent la pratique des *Schätzaufgaben* dans le cadre de travaux de coopération entre les élèves : travailler ensemble leur permettra en effet d'échanger leurs idées pour l'élaboration des affiches, de réfléchir aux meilleures stratégies, mais aussi d'affûter les arguments de sorte que ceux-ci deviennent suffisamment persuasifs. Les *Bilderschätzaufgaben* peuvent par ailleurs permettre de valoriser des élèves qui ont des difficultés à s'approprier des savoirs scolaires, certes, mais qui présentent en revanche des talents particuliers à percevoir et à intégrer la numérosité de leur environnement. Ce dernier point défend l'idée que le traitement de *Bilderschätzaufgaben* par de petits groupes d'élèves hétérogènes peut s'avérer fructueux.

6.4. - Savoir valider/évaluer les estimations des élèves

Avant d'aborder les questions relatives à la validation et à l'évaluation des estimations des élèves, il est utile de faire le point sur les exigences attendues.

Pour rappel, le traitement d'un *Schätzaufgabe* ne conduit pas à l'établissement une démonstration, mais à la construction d'une argumentation suffisamment convaincante. Les élèves doivent être en mesure d'expliquer leurs choix en termes de stratégie, d'hypothèses et d'éléments de comparaison. L'objectif est pour eux d'être suffisamment persuasifs pour obtenir l'adhésion de leurs camarades. Duval explique, concernant l'argumentation, qu'il s'agit d'un *« mode naturel du raisonnement »* qui est *« intrinsèquement lié à l'utilisation de la langue naturelle »* et dont le *« fonctionnement est congruent à celui de la pratique spontanée du discours »* (Duval, 1992-1993, p. 59). Pour ces raisons, la littérature germanophone rappelle régulièrement que les *Schätzaufgaben*, dont les *Bilderschätzaufgaben* font partie,

[3] KIRA – *KInder Rechnen Anders* (Chaque enfant apprend autrement) – est le nom d'une plateforme gérée par l'Institut Leibniz, soit l'un des principaux instituts scientifiques dans le domaine de la pédagogie et de la didactique des sciences naturelles et des mathématiques en Allemagne. https://kira.dzlm.de/ (consulté en octobre 2024).

s'appuient sur les compétences de communication des élèves.

L'évaluation des productions des élèves porte donc d'une part sur la construction et la présentation de cette argumentation, et d'autre part sur le résultat obtenu (la valeur estimée). La validation de ce résultat dépend de la taille des quantités et du contexte de l'énoncé : pour certains exercices, une erreur de plusieurs centaines d'unités est acceptée et, pour d'autres, une approximation à l'unité près est attendue. Parfois, il n'est pas possible pour l'enseignant d'apprécier la valeur estimée, en particulier pour les énoncés dont les contextes imposent d'émettre des suppositions (par exemple, sur la forme du bâtiment de la faculté de sciences humaines et sociales de Metz). Dans tous les cas, même s'il n'y a pas uniformité entre les différentes études portant sur l'évaluation des *Schätzaufgaben*, un consensus émerge autour du fait suivant : pour l'évaluation des valeurs estimées, l'enseignant doit apprécier si ces résultats sont *« sensés, exploitables, suffisants ou raisonnables plutôt que vrais ou faux »* (Franke & Ruwisch, 2010, p. 250).

Conclusion

Un enseignant désireux d'engager sa classe dans ce type d'activités doit intégrer le fait qu'un temps non négligeable devra être dédié à ces questions, d'abord parce que le *« développement des capacités d'argumentation est didactiquement plus complexe et plus long que l'apprentissage de ce qu'est une démonstration »* (Duval, 1992-1993, p. 60), ensuite parce que l'intuition sensible à la numérosité s'affine à force d'entraînement et de « recalibrage », mais aussi parce que les élèves doivent mémoriser un catalogue suffisamment riche de quantités de référence. La pratique des *Bilderschätzaufgaben* ne peut donc être pensée dans la ponctualité. Le professeur des écoles gagne au contraire à développer chez ses élèves une sorte de réflexe à appréhender la numérosité des « choses » du *monde propre à la vie*, et pour cela à exposer sa classe à des quantités de nature, de taille, de densité, d'étendue et de distribution très diverses. Pour répondre à cette nécessité d'inscrire cette pratique dans une sorte de progression, qui peut même relever de la quotidienneté, le recours aux activités ritualisées se présente comme une solution pertinente. Il s'agit par exemple pour l'enseignant de projeter sur un écran l'image d'une quantité et de laisser les élèves réagir, d'abord de façon intuitive puis de manière stratégique, jusqu'à les engager dans une sorte de débat scientifique. Les activités de coopération par petits groupes doivent naturellement être préservées, celles-ci facilitant la participation de tous et permettant par ailleurs un travail de communication plus achevé (par exemple, via la présentation par un élève ambassadeur des déductions de son groupe).

Concernant le constat relatif à la pauvreté du répertoire de points de référence des élèves, l'idée est de profiter de toutes les opportunités, lors des lectures commentées de textes contenant des données numériques, lors des séances portant sur la résolution de problèmes arithmétiques contextualisés, mais aussi lors des promenades mathématiques et autres sorties scolaires. Les élèves doivent prendre conscience que les nombres sont omniprésents dans leur environnement. L'élaboration d'affiches peut faciliter l'appropriation de cette prise de conscience. Quoi qu'il en soit, comme pour tout apprentissage, l'enseignant augmentera au fil du temps son niveau d'exigence, en visant notamment une exposition à des collections de taille croissante. L'objectif final est de rendre les élèves aptes à estimer des ensembles comptant quelques unités, quelques dizaines, quelques centaines, puis enfin quelques milliers d'éléments. Pour cela, la classe s'appuiera sur une intuition sensible entraînée, sur une aptitude de plus en plus certaine à développer des stratégies, mais aussi sur une capacité à intérioriser et à mémoriser la numérosité d'un catalogue de collections.

Concernant les ressources pédagogiques, le plus simple est sans doute de constituer soi-même une série de *Bilderschätzaufgaben*, en prenant des photographies de collections ou en proposant aux élèves d'apporter leurs propres clichés. La vie courante offre de nombreuses possibilités : des étalages de fruits et légumes sur les marchés, des rassemblements d'animaux (troupeaux, bancs, nuées, nuages…), des paquets d'objets de même nature (bonbons, biscuits, boutons, stylos, pates…), des massifs de fleurs, etc. Les illustrations insérées dans cet article prouvent par ailleurs que de nombreuses images peuvent être téléchargées depuis la toile. Le site https://www.oiseaux.net/ donne par exemple accès à des milliers de photographies dont les originaux sont souvent cédés par les auteur·rices via le formulaire de demande d'autorisation.

« Les Schäzaufgaben *s'imposant, au moins au début de l'apprentissage, comme des activités inhabituelles et parfois déroutantes, il est important de ne pas placer les élèves en situation de difficultés, mais au contraire de leur faire vivre des situations de réussite »* (Soriano-Gafiuk, 2024, p. 24). Pour cela, le mieux est sans doute de commencer par des collections de petite taille comme nous l'avons déjà expliqué, mais aussi de faciliter les comparaisons à vue d'œil de quantités. C'est d'ailleurs avec cette intention qu'au fil de ces pages, des binômes de figures ont été constitués de façon réfléchie : les figures 4 et 5 montrent des étourneaux posés, les figures 6 et 7 révèlent des oiseaux de grande taille, se tenant en position verticale et apparaissant en gros plan, alors que les figures 10 et 12 concernent des nuées de passereaux en plein vol. Quant aux estimations de quantités de collections déjà structurées, l'idée est de commencer par des exercices dont la résolution s'appuie sur des éléments de référence dont l'enseignant est sûr qu'ils feront écho à des expériences de vie ou à des connaissances mémorisées par les élèves. Pour cela, il suffit de choisir une thématique susceptible d'éveiller l'intérêt de la classe (par exemple, les véhicules de transport, les animaux, les activités sportives…), de développer un répertoire de représentants autour de cette thématique (par exemple, dans le cadre de séances de géographie, de sciences de la vie ou d'éducation physique et sportive), et ensuite d'opter pour des exercices mobilisant ce répertoire.

La fin de notre propos revient sur l'intérêt des *Bilderschätzaufgaben* dans la construction du sens du nombre, ce lien de cause à effet provenant du fait que les tâches d'estimation consistent à attraper la numérosité d'une collection. Tous les exercices abordés au fil de ces pages visent assurément à faire prendre conscience aux élèves que sont insensées des affirmations prétendant par exemple que le car scolaire contient 553 élèves ou que Monsieur Berger possède 356,7 chèvres. Les *Bilderschätzaufgaben* s'imposent par ailleurs comme des occasions de développer chez les élèves des compétences de transcodage d'une quantité (d'une représentation non-symbolique à une représentation symbolique du nombre), qui sont construites au niveau de l'école maternelle, mais finalement assez peu au niveau de l'école élémentaire. À ce propos, il est d'ailleurs intéressant de noter ce que la photographie des manchots (*cf.* figure 18) laisse déjà apparaître : au fur et à mesure que la taille des nuées augmente, la représentation non symbolique devient difficile, les éléments constituant la collection étant de moins en moins perceptibles. Le recours à des images animées, parce qu'elles permettent de balayer du regard des parties différentes de la nuée, de ressentir le mouvement et d'en apprécier le grouillement, permet cependant d'observer des quantités dépassant les milliers de volatiles, les réseaux sociaux proposant effectivement des vidéos de ballets de nuées d'étourneaux. Dans cette logique de construction d'une culture arithmétique, les élèves peuvent d'ailleurs découvrir que la plus grande nuée d'oiseaux jamais observée dans le ciel comptait 40 millions de volatiles (des carouges à épaulette, en Arkansas, 1964, selon *eBird*[4]), mais que le plus grand nuage de criquets observé rassemblait quant à lui 200 milliards d'insectes (en Éthiopie et dans certains pays limitrophes, 2020, selon *Ça m'intéresse*[5]). La visualisation des vidéos de ces gigantesques regroupements animaliers, qui permet d'attraper de manière sensible des quantités de taille dépassant les quelques milliers, se révèle cependant insuffisante lorsqu'il s'agit de saisir des quantités encore plus grandes – les vidéos en ligne sur le net ne permettent pas de distinguer les quantités relevant de quelques millions des quantités relevant de quelques milliards. C'est ainsi que notre perception du *monde propre à la vie* atteint ses limites et que s'ouvre à nous la voie vers le monde scientifique, avec ses représentations symboliques de nombres entiers extrêmement grands – parfois si grands (comme le nombre de Graham) que les scientifiques ont été amenés à inventer de nouvelles notations, autres que les puissances de 10, pour pouvoir les écrire. L'apprentissage des estimations de quantités accessibles par la perception visuelle aboutit ainsi de manière naturelle à un voyage dans le monde magique des nombres, offrant au final une preuve de l'utilité des notations symboliques, tout en témoignant de la beauté des mathématiques.

[4] https://ebird.org/home

[5] https://www.caminteresse.fr/

Florence SORIANO-GRAFIUK
INSPÉ de Lorraine,
Campus biculturel franco-allemand de Sarreguemines,
Place Jeanne d'Arc - 57 200 SARREGUEMINES

Références bibliographiques

Asam, Y. (2008). *Schätzen und Überschlagen im Mathematikunterricht der Grundschule*. [Schriftliche Hausarbeit zur Ersten Staatsprüfung für das Lehramt an Grundschulen in Bayern, Universität Augsburg].
https://opus.bibliothek.uni-augsburg.de

Bicker, U. (2020). Jetzt ziehen sie wieder - Zugvogel im Wattenmeer. *Mathematik, 52 (Schätz mal! Größenvorstellungen aufbauen)*. Hannover : Friedrich.

Blankenagel, J. (1983). Schätzen, Überschlagen, Runden. Bestandsaufnahme, Reflexion von Bedeutung und Möglichkeiten. *Sachunterricht und Mathematik in der Primarstufe, 11*(8 et 9), 315-322.

Cech-Wenning, S. (2022). *Die Fermi Kartei - Offene Aufgaben in 3 Schwierigkeitsstufen mit Lösungshilfen Klasse 1-3*. Staßfurt : Verlag an der Ruhr.

Dehaene, S. (2010). *La bosse des maths*. Paris : Odile Jacob.

Duval, R. (1992-1993). Argumenter, démontrer, expliquer : continuité ou rupture cognitive ? *Petit x, 31*, 37-61.

Farges, J. (2006). Monde de la vie et philosophie de la vie. Husserl entre Eucken et Dilthey. *Études Germaniques, 242*(2), 191-217.
DOI 10.3917/eger.242.0191

Franke, M. & Ruwisch, S. (2010). Größen und Messen. Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule. *Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II, vol. 0* (pp. 177-259). Heidelberg : Spektrum Akademischer Verlag.

Heid, L.-M. (2017). *Das Schätzen von Längen und Fassungsvermögen. Perspektiven der Mathematikdidatik*. Wiesbaden : Spektrum.

Izard, V. & Dehaene, S. (2008). Calibrating the mental number line. *Cognition, 106* (3), 1221-1247.

Padberg, F. & Benz, C. (2020). *Didaktik der Arithmetik*. Berlin : Springer Verlag.

Paenza, A. (206). *La columna de Paenza: Estimaciones*. Editoriales.
https://www.intramed.net/content/40148

Pies-Hötzinger, A. & Waasmaier, S. (2020). Zum Thema. Schätz doch mal! *Grundschule Mathematik - Fachzeitschrift im Abo, 52*, 4-5. Hannover : Friedrich Verlag.

Sirieix, P. (2023). Où en sont les élèves sur l'estimation de la mesure de longueurs ? *Grand N, 111*, 85-122.

Soriano-Gafiuk, F. (2024). La consigne *« Schätz mal! »* dans les écoles allemandes lors de séances portant sur les grandeurs. *Grand N, 113*, 5-27.

Trouillot, É. (2016). *Les secrets de notre cerveau avec les nombres.*
https://blog.mathador.fr/cerveau-nombres/33/

Winter, H. (2003). *Sachrechnen in der Grundschule. Problematik des Sachrechnens. Funktionen des Sachrechnens. Unterrichtsprojekte. 6. Auflage*. Frankfurt am Main : Cornelsen Verlag Scriptor.

Programmes et instructions officielles

MEN (2016). *Grandeurs et mesures au cycle 2*. Éduscol.
https://eduscol.education.fr/document/15406/download

MEN (2020). *Programme du cycle 2. Bulletin Officiel de l'Éducation Nationale n° 31 du 30 juillet 2020*. Éduscol.
https://www.education.gouv.fr/media/70279/download

MEN (2021). *Pour enseigner les nombres, le calcul et la résolution de problèmes au CP*. Éduscol.
https://eduscol.education.fr/document/3738/download?attachment

MEN (2024). *Programme de mathématiques du cycle 1*. Conseil supérieur des programmes. Éduscol.
https://eduscol.education.fr/document/20062/download