Repères - IREM n° 136 octobre 2024

ROUES DENTÉES ET ENGRENAGES, NOMBRES ET OPÉRATIONS : ALLERS ET RETOURS

Frédérique PLANTEVIN[1]
IREM de Brest

Introduction

Les machines à calculer mécaniques sont tombées en désuétude avec la généralisation des calculettes électroniques – il y a un peu plus de 40 ans. L'histoire de ces instruments, entre leur première invention au XVII^e^ siècle et l'arrêt total de leur développement dans le troisième quart du XX^e^ siècle a été racontée par de nombreux auteurs (Marguin, 1994 ; Jacob, 1911 par exemple), documentée par de nombreux autres dans un travail non encore achevé, reprise et diffusée largement sur la Toile. Bien que certaines machines soient rares et précieuses, visibles dans les musées scientifiques (ou pas, lorsque chez des collectionneurs), bon nombre des modèles du XX^e^ siècle ont été tellement répandus en Europe qu'on peut malgré tout encore en trouver facilement dans des ventes d'objets de seconde main, sur Internet ou même dans les braderies ici ou là ; de nombreuses collections privées en possèdent et également quelques institutions, qui ont développé une politique patrimoniale.

On peut donc se retrouver facilement confronté à une de ces machines ; quels effets cette confrontation produit-elle ? La machine paraît à la fois désuète et familière par son aspect, abordable par la simplicité apparente de sa facture et la nature de sa fonction et en même temps complètement étrangère par son fonctionnement. Bien que sa disparition (dans son utilisation première) soit relativement récente, il semble ne plus y avoir d'intuition collective de son fonctionnement, tant les calculatrices électroniques puis les ordinateurs ont imprégné totalement notre façon de penser le calcul (les questions suivantes vont apparaître au premier contact avec les machines : « où entre-t-on le deuxième opérande ? », « où lit-on ce qu'on a entré ? », « où sélectionne-t-on l'opération retenue ? », « où lit-on le résultat ? »).

Ces décalages engendrent la curiosité, le questionnement et le désir de comprendre ; il ne s'agit pas seulement de connaître le mode opératoire pour arriver à retrouver les calculs dont on connaît le résultat, il faut comprendre comment c'est possible. Pour comprendre, l'utilisateur/explorateur mobilise ce qu'il sait du calcul, de la représentation des nombres, des propriétés des opérations, explicitement et verbalement ou pas, jusqu'à ce que ses connaissances et ce qu'il voit coïncident, et la plupart du temps, avec un sentiment d'éclaircissement profond.

Ces ressorts marchent quels que soient le cadre et l'utilisateur, organisé en classe ou en activité de loisir, pour des enfants ou des adultes. On peut donc les utiliser pour enseigner.

C'est dans cette idée que le travail sur les instruments et en particulier sur ceux de

[1] frederique.plantevin@univ-brest.fr

calcul s'est développé à l'IREM de Brest depuis une quinzaine d'années.

Une exposition avec des ateliers pour les classes co-animés par des étudiants et des universitaires (Le Brusq & Plantevin, 2013) grâce à la collaboration avec des collectionneurs d'instruments, un groupe de recherche (*Instruments dans l'histoire et dans la classe*, noté IHC par la suite) avec des enseignants du primaire et du secondaire, en mathématiques et en technologie, ont permis de développer et de tester des activités pour les classes de cycle 3 (Moyon, Chorlay & Plantevin, 2018 ; Groupe IHC, 2018) et pour la formation des enseignants[2] ; la fondation du Cabinet de curiosité[3], un lieu consacré aux instruments anciens à la Faculté des sciences de Brest, et finalement la conception de cours consacrés aux instruments mathématiques pour les étudiants de mathématiques (ou autres) à différents niveaux. Petit à petit, les idées se sont affinées ; les caractéristiques des activités avec des instruments mathématiques historiques qui nous semblent riches se sont précisées et les objectifs que l'on peut fixer à un tel travail ont pu être décrits (Plantevin & Milici, 2020).

En premier lieu, il s'agit de faire l'expérience de la matérialité des concepts théoriques en reliant les instruments à leurs contenus mathématiques, mais aussi de situer les artefacts dans leur contexte d'origine en considérant les mathématiques de l'époque, et finalement de faciliter le développement de l'autonomie des étudiants en encourageant leur liberté, leur responsabilité et leur créativité.

Le cœur des activités présentées ici, la réalisation d'un prototype d'une additionneuse à roues, a été testé auprès de divers publics dans divers cadres et circonstances, en classes de CM1, CM2, 6^{e}, en stage et atelier de formation d'enseignants, en classe de licence de mathématiques et de master MEEF, en atelier d'animation scientifique avec des adultes, elle est donc en partie le résultat, le prolongement ou l'approfondissement de plusieurs travaux menés avec des formations différentes du groupe, à des moments différents (*cf.* les références bibliographiques et les notes). Cependant, l'exploitation du kit avec des classes de CM1 et CM2 rapportée ici est une expérimentation menée avec deux enseignantes de primaire entre 2019 et 2020 dans le cadre du groupe IHC de l'IREM de Brest, Priscilla Guéna (école du Vieux Poirier, Goulven) et Muriel Geslin (école du Champ de Foire, Plougastel-Daoulas).

La séquence s'appuie sur l'observation d'une additionneuse particulière, une *Lightning calculator*, que l'on nomme LC dans la suite. C'est une additionneuse à roues ; l'étude de ses caractéristiques montre quelques-unes des subtilités de l'histoire des instruments de calcul. Mais l'étape cruciale de l'activité est la réalisation matérielle d'un prototype opérationnel d'additionneuse avec un kit rudimentaire fourni (roues dentées, clous et support, de quoi graduer, stylet). Pour satisfaire son cahier des charges précis (additionner deux nombres à trois chiffres, dont la somme a au plus trois chiffres, avec report automatique de la retenue) mais sans prescription ni indication autre que l'observation de la LC, il faut lier intimement questions technologiques et mathématiques. En découle une compréhension concrète du principe de fonctionnement des machines arithmétiques mécaniques plus avancées (multiplicatrices) qui, en retour, éclaire sous un jour nouveau les opérations mathématiques qu'elles réalisent. Cet aller-retour entre instruments et concepts mathématiques qu'ils représentent est un deuxième but de cette activité, le plus important mais pas le seul.

[2] Dans le cadre des actions de l'IREM de Brest et de la Maison pour la Science de Bretagne.

[3] Fondé en 2015 par l'autrice pour travailler sur les instruments, à partir des collections de physique de la Faculté des sciences et de celle de l'IREM.

La plus grande partie de cet article est consacrée aux additionneuses à roues et aux opérations d'addition et de soustraction, d'une part parce que l'exploitation du kit de construction que nous proposons n'a fait encore l'objet d'aucune publication et d'autre part parce que le travail sur la mécanisation du calcul de l'addition permet d'aborder de façon utile et constructive les opérations plus complexes que sont la multiplication et la division, au moyen des machines multiplicatrices (qui, dans l'immense majorité des cas, sont des additionneuses évoluées). La partie 1 est consacrée à la présentation de l'activité autour de la *Lightning calculator*, et de ses attendus. La partie 2 en présente les implémentations et résultats avec des enseignants et des élèves. La partie 3 dresse un bilan de ce qui a été travaillé en mathématiques dans cette activité. La partie 4 est consacrée à une séquence avec des multiplicatrices de type *Odhner* menée dans le cadre du projet *« Passerelles : enseigner les mathématiques à partir de leur histoire au cycle 3 »* (Moyon & Tournès, 2018). Une synthèse de ce qui a été déjà écrit dans la publication, un approfondissement concernant la division, tout cela articulé avec l'activité décrite dans cet article (dont elle est le prolongement naturel) sont présentés dans cette partie 4. Dans les deux annexes sont présentés d'une part les ressources complémentaires, en particulier iconographiques, pour mener l'activité complète et d'autre part, une description illustrée d'un calcul mené par deux prototypes d'additionneuse à roues.

1. – Activités autour d'une additionneuse à roues LC

***Figure 1** : Additionneuse à roues* Lightning Calculator *(brevet 1926, dimensions réelles : 34 cm×8 cm×5 cm).*

La LC est une curieuse petite machine. C'est une additionneuse à roues. Elle permet de réaliser l'addition de nombres à 7 chiffres au plus (et dont la somme ne dépasse pas 7 chiffres) avec report automatique de la retenue. Son principe de fonctionnement existe depuis le XVII^{e} siècle (Pascal, Schickard) mais son brevet (Michigan, USA) date du premier quart du XX^{e} siècle ; elle sera fabriquée ensuite pendant une trentaine d'années (avec quelques améliorations, notamment la soustraction). À cette époque, de nombreuses machines beaucoup plus sophistiquées et performantes existent déjà, surtout en Europe ; pourtant la LC est un grand succès commercial aux États-Unis où elle est encore de nos jours assez facile à trouver. En France, elle est rare car elle semble ne pas avoir été importée à l'époque de sa fabrication.

***Figure 2** : La LC est très compacte.*

Elle pourrait donc sembler désuète même pour son époque, et pourtant elle est en fait résolument de son temps par sa compacité, comme le montre la photo de la figure 2. On peut trouver des images et vidéos montrant l'intérieur de la machine sur la Toile (ainsi que son brevet, *cf.* la sitographie en fin d'article) qui permettent de mieux apprécier sa « modernité ». Tous ces paradoxes sont typiques des artefacts anciens et constituent autant de pièges dans lesquels une analyse hâtive pourrait nous mener. Même si ce n'est pas la raison principale du choix de cet objet, c'est un de ses atouts que de permettre d'aborder des questions d'histoire des sciences et des techniques en situation, à partir d'un cas concret. Son atout majeur, et la raison pour laquelle nous l'avons retenue au départ, c'est d'être une additionneuse à roues, dont il est possible de reproduire le fonctionnement de façon convaincante comme on va le voir.

Avant de passer à la description des activités menées autour de cette machine, indiquons rapidement comment on l'utilise en décrivant son mode opératoire et en montrant les différentes étapes d'un calcul.

Pour entrer les opérandes, on entre chiffre par chiffre en piquant le stylet dans le trou en face du chiffre et en l'amenant jusqu'à la butée, ce qui fait tourner la roue d'inscription dans le sens horaire d'autant de dixièmes de tour qu'il y a d'unités dans le chiffre. On entre un opérande après l'autre. On lit le résultat de l'addition dans les lucarnes (on appelle l'ensemble des lucarnes le totalisateur).

L'exemple de calcul, 283+31, est photographié pas à pas ci-dessous ; on pourra aussi consulter la vidéo[4] de ce calcul.

[4] https://ubotv.univ-brest.fr/video/1001-addition_1-lc/

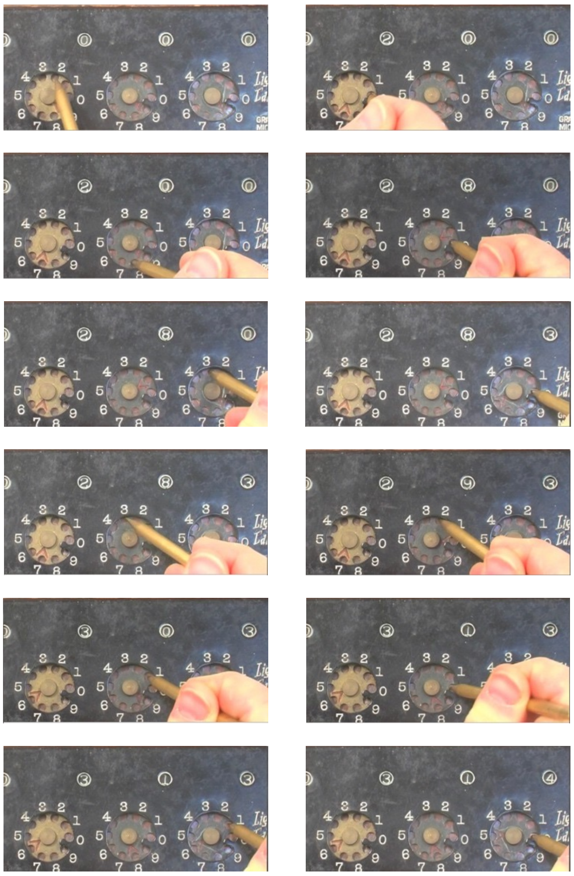


Figure 3 *: Étapes du calcul de 283+31 avec la LC, deux photos pour l'inscription de chaque chiffre, quatre pour bien voir la transmission de la retenue lorsque l'on inscrit 30.*

On peut regarder l'intérieur de la machine (*cf.* sitographie) pour constater que chaque roue d'inscription est engrenée avec sa roue totalisatrice (de résultat) graduée et avec la roue totalisatrice de l'ordre suivant (à gauche donc) par une de ses dix dents qui est un peu plus longue que les autres. Un tour de la roue d'inscription fait ainsi faire un tour à sa roue totalisatrice et un dixième de tour à la roue totalisatrice de l'ordre suivant. Il y a de plus un dispositif placé sur chaque roue totalisatrice qui assure que la course entre chaque rotation d'un dixième de tour est complète. Le principe est très simple ; connaître l'intérieur de la machine n'est pas nécessaire pour mener l'activité car on peut fort bien en imaginer un possible (il y en a plusieurs, comme on verra) sans idée préconçue et chercher à le fabriquer. Dans un deuxième temps, on peut vouloir savoir comment fonctionne la LC, d'où l'explication et la référence pour aller plus loin, mais à notre avis, les utilisateurs/explorateurs devraient être laissés dans l'ignorance de ces détails tant que leur propre machine n'est pas fabriquée de sorte que ce ne soit pas un obstacle à l'invention de leur propre prototype.

1.1. - Description des trois étapes, de l'observation à la construction d'un prototype

Lorsque testée en classe ou en formation d'enseignants, l'activité suit trois étapes décrites ci-dessous (avec, comme on l'imagine, des variantes de formulation, de rythme et de temporalité). Dans des contextes d'animation scientifique, on procède de manière plus directe en général, la construction avec le matériel est proposée presque en simultané avec l'observation de la LC, les considérations historiques en découlant éventuellement. Une compilation des diverses consignes possibles pour décliner l'activité est proposée dans les documents joints (*cf.* l'annexe 1 pour le descriptif).

Observation de photos de différentes machines de différentes époques

Une sélection de photos (entre 5 et 8) est proposée selon les contextes parmi les 7 placées en annexe 1 en plus de celle de la LC.

• Pour la première question – déterminer ce qu'elles ont en commun et ce que chacune a de spécifique –, on pourrait faire remarquer les choses suivantes.

Toutes les machines présentent des cadrans avec les chiffres inscrits en graduation, un stylet ou un système pour pointer vers les chiffres du cadran, des petites fenêtres (une ou deux par cadran) indiquant un chiffre (quand il y en a deux, l'un des deux indique le chiffre qui est pointé) ; dans plusieurs machines, il y a une double graduation. Une machine a deux cadrans particuliers : un avec 12 graduations de 0 à 11, l'autre avec 8 graduations en huitièmes, de 0 à 7/8. Elles sont presque toutes américaines et le texte qui apparaît est en langue anglaise. Les cadrans semblent regroupés de droite à gauche par deux, puis trois ; certaines ont des indications pour caractériser les cadrans (*units*, *tenths*, *hundreds*, *thousands*). Certaines indiquent ce qu'elles font par leur nom (*Addometer*, *Lightning adding machine*) ou explicitement par une inscription qui le dit. Certaines affirment faire aussi la soustraction, elles ont alors une double graduation. Les matériaux sont variés, du laiton au plastique en passant par le bois, le métal ou la Bakélite. La finition est de type industrielle (normée, nette, clairement fabriquée par des machines) sauf pour la *Auch*, qui, elle, est clairement un objet unique fabriqué comme un tout, gravé, d'une facture très soignée : un objet précieux, de toute évidence.

On cherche donc à faire émerger parmi les élèves ou les utilisateurs/explorateurs des idées de nature différente sur les aspects techniques, mathématiques et culturels qui permettent d'aborder plusieurs points intéressants spécifiques de l'histoire des sciences et des techniques.

• Avec la deuxième question – les classer de la plus ancienne à la plus récente en étudiant les matériaux ou leur facture –, on pourrait aussi déduire (deviner, conjecturer en tout cas) du point précédent le type d'utilisateur à qui chacune est destinée et pour quel usage.

On remarque que, dans les photos, il n'y a pas d'échelle et donc pas de moyen de com parer leurs tailles, ce qui est pourtant un facteur important à prendre en compte pour apprécier leur « modernité » via leur compacité.

• La dernière étape de cette phase d'observation attentive est de déterminer à quoi elles servent, avec des arguments explicites.

Dans cette étape, ce qui est recherché est l'explicitation.

Voir la LC en action via un film ou en vrai

L'observation de la LC doit permettre le légendage d'une photo de la machine. Il s'agit d'identifier les parties importantes, de trouver les mots pour décrire précisément ce que l'on voit. Dans ce but, on a besoin d'émettre des hypothèses sur ce que la machine fait ; la mise en commun permet d'exprimer clairement et de partager les ressorts des réflexions menées.

Le but est d'établir un vocabulaire commun pour la suite du travail, qui soit clair pour tous, qui explicite le plus possible et le plus justement possible ce que la machine fait et d'émettre quelques hypothèses sur son fonctionnement interne. On cherche à faire émerger l'idée des roues graduées pour représenter les nombres, ordre de numération par ordre de numération, selon la notation décimale de position des nombres, d'engrenages entre ces roues pour la possibilité de transmettre la retenue et donc de roues dentées.

On peut faire dessiner l'intérieur de la machine qui ferait donc l'addition de deux nombres et discuter des propositions ensemble pour déterminer ce qui est impossible, ce qui pourrait marcher et pour avoir peut-être une idée déjà de la multiplicité des réponses possibles. Cette partie, l'observation de la machine en fonctionnement et le dessin de l'intérieur de la machine, a été testée dès la première expérimentation comme on peut voir dans les références (Moyon, Chorlay & Plantevin, 2018 ; Passerelles, 2018) et avec des enseignants en formation.

On peut constater des difficultés de nature différente, mathématiques ou plutôt technologiques ou bien à propos du lien entre ces deux aspects. Par exemple : les roues dentées sont bien présentes mais pas toujours avec le bon nombre de dents (maths), pas toujours le même nombre de dents dans des roues de même taille engrenées (techno), l'engrenage est complet pour représenter la retenue mais du coup tout est bloqué (techno), les roues ne sont pas placées en ligne, les unes à côté des autres ou de façon à être engrenées logiquement les unes aux autres (maths ou lien maths-techno en tout cas). Là encore, la possibilité d'échanger sur les productions des différents groupes (d'élèves ou de professeurs) est importante. La compréhension vient souvent de la confrontation des différentes idées.

Construction d'un prototype

L'idée de construire un prototype d'additionneuse avec le kit que l'on propose est venue d'une petite brochure, *Supplément de Bibliothèque de travail* (SBT), de 1965. Cette collection (qui contient plus de 800 numéros, complétés de quelques 500 suppléments) a été conçue et constituée entre 1932 et les années 80 comme outil documentaire adapté aux élèves pour le travail en autonomie prôné par la pédagogie Freinet.

***Figure 4** : Le SBT 189 (1965), une source d'inspiration d'une activité en 2020.*

C'est le collectionneur d'instruments de calculs Claude Cargou qui a attiré mon attention sur cette publication (*cf.* la couverture et la quatrième de couverture en figure 4). L'activité proposée est très dirigée ; il ne s'agit pas ici de chercher comment construire une machine à calculer qui permette le calcul d'addition et de soustraction de deux nombres à trois chiffres, mais seulement de réaliser un prototype selon des plans fournis. Mais, si on propose le matériel fabriqué, sans indication sur la manière de s'en servir pour atteindre le but recherché, l'activité devient une véritable activité de mathématiques et de technologie.C'est ce que nous avons fait. Le kit de construction (*cf.* figure 5) contient 4 roues à dix dents, 4 roues sans dent, 4 roues avec une dent, un support, un cache, des tasseaux pour poser le cache, 4 grands clous, des pointes, des petites tiges en bois et des gommettes.

Figure 5 *: Matériel de construction, kit de base dans sa boîte.*

1.2. - Détails sur la construction du prototype

Selon le matériel donné, on obtient des recherches de construction de machines différentes bien entendu ; si l'on n'a pas fait faire les dessins avant, il peut être utile de donner un kit très ouvert avec des roues de toutes les tailles, avec différents nombres de dents de 1 à 12 par exemple. De même, on a proposé seulement des roues à une dent pour mettre en place la retenue, d'autres dispositifs pourraient être imaginés.

Selon le temps passé à étudier la LC et aussi selon le public, le prototype réalisé par les élèves (ou les professeurs ou tout utilisateur/explorateur) ressemble plus ou moins à la LC. Les caractéristiques les plus remarquées sont le sens de rotation pour l'inscription, identique pour toutes les roues, l'inscription avec la butée où on « amène » le chiffre désiré à la butée (en fait on amène le secteur de la roue en face du chiffre désiré à la butée).

Les buts sont plus ou moins faciles à atteindre selon le public à qui l'activité est destinée mais dans tous les cas et même pour des adultes avertis, ils restent les mêmes : expliciter ce que l'on constate, l'expliquer, le justifier pour comprendre vraiment ce que l'on fait.

Le premier but de l'activité est de déterminer que si l'on veut représenter un nombre à 3 chiffres avec des roues graduées, il faut avoir trois roues graduées en 10 secteurs angulaires égaux et qui sont placées selon la notation habituelle, de droite à gauche pour aller de la roue des unités à la roue des centaines.

Le deuxième but est de déterminer qu'il faut que ces roues s'engrènent car sinon il n'y a pas de calcul possible, puisque l'on ne peut pas compter le nombre de tours complets faits par une roue.

Ensuite, si l'on veut engrener deux roues de façon différentielle, c'est-à-dire telle que la première ne fasse pas toujours bouger la deuxième quel que soit son mouvement, il faut avoir des roues avec un nombre de dents différent (ou quelque chose qui dépasse sur certaines dents éventuellement).

Le plus important sans doute d'un point de vue mathématique : pour transmettre la retenue, il faut que la roue des unités, par exemple, en finissant un tour complet fasse tourner la roue des dizaines d'un secteur, c'est-à-dire d'un dixième de tour (qu'on appellera parfois unité de rotation ou rotation élémentaire par la suite).

Pour faire cela concrètement – étant donné le matériel fourni –, il faut une roue à une dent : la roue des unités, graduée en 10 secteurs possède une seule dent ; « transmettre la retenue », c'est ajouter 1 à 9, c'est-à-dire faire une rotation d'un secteur correspondant à un dixième de tour à la roue des unités à partir de la position 9 (qui reste à déterminer) sur la roue des unités. Appliquer une rotation d'un dixième de tour à une roue, n'est pas passer d'un nombre à un chiffre à son successeur dans la liste ordonnée des entiers, mais lui ajouter un ; ainsi le lien entre opération et numération est explicité et matérialisé. Il est important que ce soit fait avant toute graduation.

Une fois retenues les deux roues, une à 10 dents, une à 1 dent, leur position respective est arrêtée, car la roue à 10 dents est nécessairement la roue des dizaines, puisque l'autre roue la fait tourner d'une unité lorsqu'elle exécute un tour entier (de 10 unités donc), et cela même sans graduation. Cette étape est cruciale : c'est effectivement le lien entre addition et numération : le 1 de 13 est le même que le 1 de la retenue dans 6+7 ; curieusement, cela ne va pas de soi.

Explicitons cela : on peut représenter 1 et 3 par deux roues à 10 dents en plaçant une origine sur chaque roue et un repère sur le support fixe qui porte leur axe de rotation respectif ; mais, pour que ces roues représentent le nombre 13, il faut que les roues soient engrenées de sorte qu'un tour de la roue qui représente le 3 fasse tourner d'un dixième de tour celle qui porte le 1 (*cf.* figure 6).

Figure 6 *: Représentation des nombres avec des roues à 10 dents, 1 et 3 à gauche mais 13 au milieu et à droite grâce à l'engrenage de la roue à une dent du 3 avec celle du 1 (dent cerclée à droite).*

Une fois cela fait, il faut penser à la roue des centaines. Elle doit être engrenée par celle des dizaines par une seule dent : il faut donc un deuxième étage de roues pour que ce soit possible. Si on veut poursuivre la machine avec une roue des milliers, il faudra un troisième niveau à la roue des centaines, pour porter la roue à une dent qui engrène la roue des milliers. Il y a bien sûr plusieurs façons de construire ces niveaux mais il faut que pour chaque paire de roues adjacentes, la roue à une dent de la roue de droite soit au même niveau qu'une roue à dix dents de la roue de gauche et que ce niveau soit différent de celui de chacune des roues à une dent ou dix dents de la roue encore plus à gauche. C'est pourquoi on a besoin de roues sans dents, dont on peut se servir aussi pour rajouter des niveaux neutres qui isolent en quelque sorte les niveaux où il y a des dents (et éviter les frottements parasites qui peuvent arriver dus à un défaut d'horizontalité des roues).

Toutes ces étapes permettent de construire le principe de fonctionnement du prototype avec trois roues. Les roues sont placées, les axes de rotation fixés sur le support et le sens de rotation de chaque roue arrêté.

Il faut maintenant graduer les cadrans, ou les roues, ou les deux, placer des repères pour pouvoir « entrer » effectivement les chiffres des opérandes puis lire le résultat du calcul mené. Chaque secteur représente une unité, une rotation d'un secteur correspond à l'addition « +1 » et au passage d'un chiffre à son successeur. Pour que l'on puisse représenter un chiffre, il faut donc un repère à la fois sur la roue et sur le cadre/support qui, lorsqu'ils sont alignés, donne la position de départ de la machine et l'origine des chiffres, le 0. Ces deux repères peuvent être n'importe où sur le cadre et la roue, pourvu que, lorsqu'ils coïncident, la dent unique soit à neuf rotations élémentaires de commencer à s'engrener avec la roue de gauche (ce qui se termine à la fin de la dixième rotation).

Pour entrer un chiffre, on peut piquer la roue en face de l'origine du cadre/support et faire tourner ce point de la roue jusqu'à atteindre le chiffre voulu sur le cadran, et on lit donc ledit chiffre en face du repère origine de la roue, ou bien piquer en face du chiffre voulu et l'amener en face de l'origine du cadran comme si celui-ci était une butée (comme la LC en quelque sorte). La première procédure est identique pour ajouter un autre chiffre et permet de lire le résultat en face du repère de la roue : prenons par exemple 3+5, on pique sur la roue en face de l'origine du cadre qui, en position de départ, est aussi le repère sur la roue et on l'amène sur le 3, on pique à nouveau sur la roue en face de l'origine du cadre et on amène ce point en face du 5. Dans ce mouvement, le repère de la roue a fait 3 rotations élémentaires puis 5 rotations élémentaires dans le même sens, soit au total 8 rotations élémentaires, et c'est effectivement vers le 8 que le repère de la roue pointe.

La deuxième procédure ne fonctionne pas aussi simplement car si, dans le même exemple, on pique en face du 3 et qu'on amène ce point en face de l'origine du cadre/support, le repère sur la roue pointe vers le 7 alors que la roue a bien fait 3 rotations élémentaires : si on veut procéder de cette manière, il faut soit avoir une deuxième graduation pour la lecture (*cf.* figure 12 ou annexe 2.1.), soit avoir une roue au-dessus engrenée avec la roue de l'ordre qui nous intéresse et qui renverse à nouveau la graduation (comme dans la LC).

On le voit, il y a une grande variété de prototypes possibles même avec seulement trois roues (sens de rotation, place des origines sur le support en face de chaque roue et bien sûr graduation, en particulier la graduation double). Il n'y a en fait aucune raison pour que les prototypes créés soient semblables ; tout prototype qui marche est acceptable, la démonstration fait foi. C'est d'ailleurs un autre objectif de cette activité, qui vise le développement de l'autonomie scientifique en encourageant les initiatives et donc les activités ouvertes.

2. – Implémentation et résultats

2.1. - Avec des adultes : groupe de recherche et formation d'enseignants

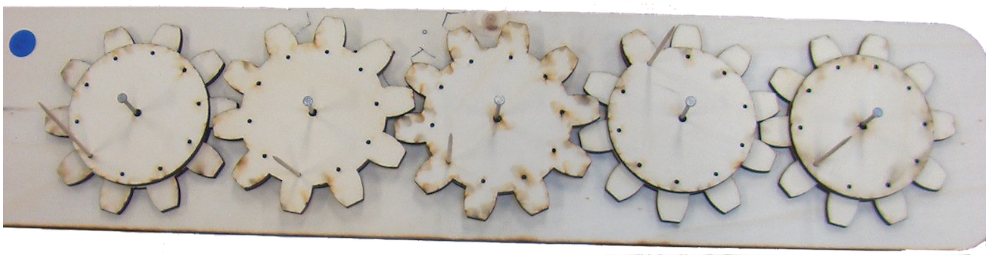
L'activité a été menée en formation des enseignants deux années de suite. Pour préparer le travail avec les élèves, le groupe IHC a par ailleurs cherché à construire autant de prototypes différents que possible de manière à ne pas être déstabilisé par les idées inattendues d'un binôme d'élèves. Ce n'est évidemment pas possible d'être complètement à l'abri des surprises (et tant mieux) ni si facile de déterminer si un prototype pourrait fonctionner normalement.

L'activité en formation se déroulait sur une petite journée seulement, ce qui était tout juste suffisant pour mener à bien le travail de graduation pour les plus rapides. Des photos des prototypes (les participants pouvaient emporter leur prototype avec eux à l'issue de la journée) et des films de la démonstration (menée avec une visionneuse et un vidéoprojecteur) ont été faits. Les deux occurrences ont mené à des versions assez homogènes mais différentes l'une de l'autre. La première session a conduit essentiellement à la production de prototypes à 3 roues seulement, dont la majorité revêtaient des doubles graduations. La deuxième session a vu la réalisation de machines à 6 roues sur deux lignes, la deuxième ligne pouvant servir à l'inscription seulement ou à la retenue (ou les deux parfois). Certains prototypes à deux lignes se sont révélés non fonctionnels au moment de la démonstration, en général parce que certaines roues en engrenaient d'autres à tort. Dans tous les cas, ces prototypes permettent de préserver un sens unique de rotation pour l'inscription des chiffres, une caractéristique de la machine modèle originale, la LC, que les enseignants se sont appliqués à préserver (alors qu'elle n'est en rien essentielle, mais plus facile d'usage, il est vrai). Certains sont arrivés à la conclusion qu'il fallait une deuxième rangée de roues pour pouvoir utiliser la butée, également comme dans la LC. Il semble que plus l'accent est mis sur les caractéristiques de la machine observée et plus le constructeur cherche à les reproduire dans le prototype. C'est très fort chez les adultes qui, souvent, veulent produire quelque chose de bien fait et de bien fini du premier coup. Les élèves ne font pas cela en général ou en tout cas moins, mais probablement cela dépend surtout du temps que l'on passe à voir la machine en action : si elle est disponible en vrai et que l'on peut mener des calculs avec elle par exemple, il est fort à parier que les prototypes auront des caractéristiques très proches de l'originale. Si au contraire, la machine est vue en action (c'est obligatoire) mais sans plus, juste assez pour avoir compris ce qu'elle fait et pouvoir émettre quelques hypothèses sur son fonctionnement interne, les constructeurs doivent faire appel à l'expérimentation et à leur imagination et c'est plus intéressant.

Dans ces formations, le kit était fourni, mais comme la formation se déroulait au Cabinet de curiosité (où il y a du matériel pour bricoler à disposition), les constructeurs pouvaient prendre ce qu'ils voulaient et bien sûr pour des adultes entres pairs, c'est plus facile de prendre l'initiative que pour un élève dans sa classe. On peut donc décider de ne pas donner tout le kit pour guider moins le travail (*cf.* les figures 12 et 13 pour voir ce que cela peut donner).

Commençons par cinq des prototypes préparatoires réalisés par le groupe IHC en amont du travail avec les classes.

Dans le prototype C, les roues 1, 3 et 5 servent à inscrire les chiffres des opérandes et à lire le résultat ; les roues 2 et 4 assurent la transmission de la retenue (dent unique entourée) ; le sens de rotation pour l'inscription de chaque chiffre est identique pour les 3 ordres (sens horaire). On lirait 8 car la roue n° 2 est à deux dixièmes de tour de rotation (deux dents) d'engrener la roue d'inscription des dizaines (n° 3) et la dent de la roue n° 4 est en position 0.



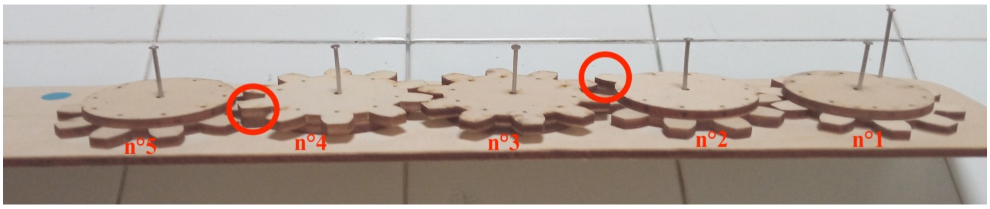


***Figure** 7 : Deux vues du prototype C.*

Dans le prototype B, les roues de la ligne du bas servent pour l'inscription et la transmission de la retenue, celles du haut à la lecture du résultat (le cadre cacherait les roues du haut sauf une fenêtre par roue en face du repère voulu). L'inscription se fait avec une butée pour chaque roue dans le sens horaire pour la première et ensuite alterné.

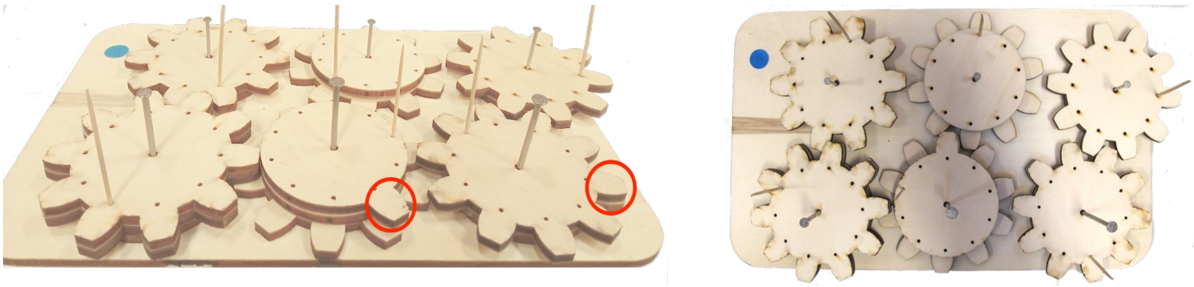


***Figure 8** : Deux vues du prototype B.*

Dans le prototype A, les roues de la ligne du bas servent à transmettre les retenues, celles du haut à l'inscription et à la lecture du résultat avec une double graduation par exemple. Ce prototype est défectueux car la roue d'inscription des dizaines fait tourner à rebours la roue de retenue (et donc possiblement celle d'inscription des unités) à cause des roues à dix dents placées au même niveau qui sont engrenées. Les roues du bas permettent le sens de rotation d'inscription identique dans tous les ordres.

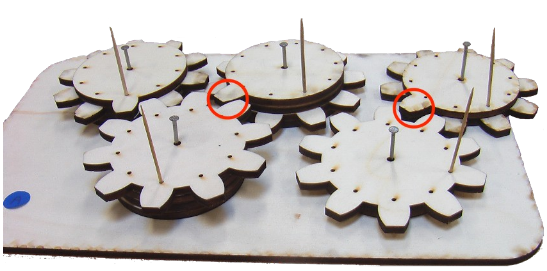


Figure 9 *: Le prototype A.*

Le prototype Y est une curiosité… à prendre avec précaution. Effectivement, dans cette machine, l'ordre de numération est inversé : les unités sont à gauche car cette roue engrène la roue à sa droite avec sa roue à dent unique au premier niveau. Il est faux du point de vue des conventions de notre système de numération mais cohérent et correct dans un système de représentation à l'ordre inversé (*cf.* partie 3).

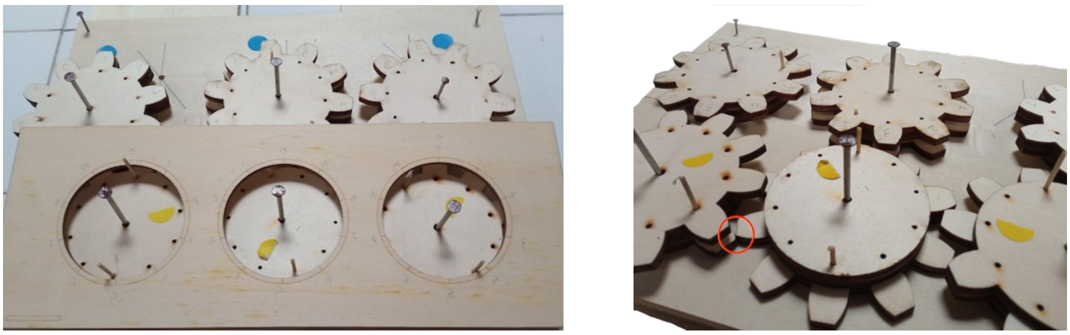


Figure 10 *: Deux vues du prototype Y.*

Le prototype F est à trois roues sur une ligne avec inscription dans le sens horaire sans butée (on pique avec une pointe en face du 0 du cadre et on amène la pointe en face du chiffre voulu pour chaque chiffre des opérandes), on lit en face de la flèche, ici la machine est à zéro. Cette machine permet la soustraction, c'est exactement la machine du SBT. Le prototype M est également à trois roues avec inscription dans le sens horaire sans butée, ici le 0 de la roue a été choisi en face de la dent unique de retenue, le 0 du cadre a été placé en conséquence ; la machine indique 22.

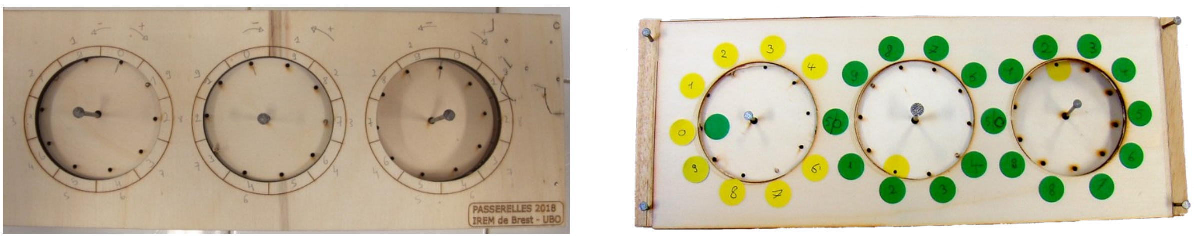


Figure 11 *: Deux prototypes à trois roues, le F et le M.*

La figure 12 présente deux prototypes parfaitement fonctionnels réalisés par deux binômes d'enseignants lors de deux sessions différentes de la formation MPLS (*cf.* annexe 1). Parmi tous ceux fabriqués, nous retenons ceux-là parce qu'ils sont particulièrement aboutis (ce qui montre ce que l'on peut réaliser en une journée de formation) et aussi parce qu'ils proposent des solutions différentes de ce que nous avons montré avant.

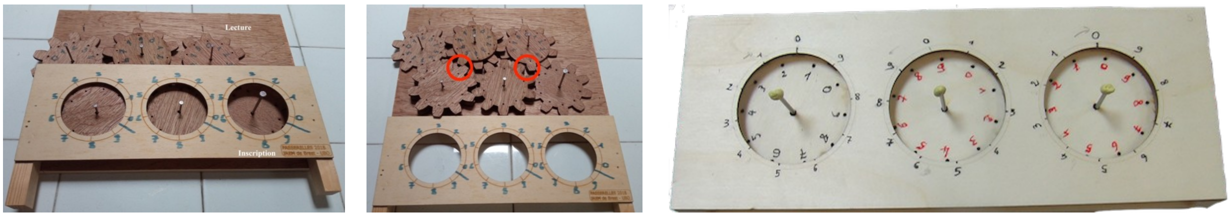


Figure 12 *: Deux prototypes (le premier avec deux vues) parfaitement fonctionnels réalisés en formation.*

Dans le premier, à deux lignes, la ligne du bas ne sert qu'à l'inscription avec un système de butée et dans le sens horaire. La retenue est transmise par les roues de la ligne du haut, qui servent également à la lecture du résultat. Comme dans la LC, les roues de la ligne du bas ne sont donc pas engrenées les unes aux autres ; contrairement à la LC, la retenue est transmise de la roue totalisatrice à la roue d'inscription de l'ordre suivant.

Le second est un prototype à trois roues avec double graduation, qui permet une inscription avec une « butée » (rôle tenu par le 0 du cadre) ; les graduations du cadre sont utilisées pour l'inscription dans le sens indiqué, les graduations en rouge pour la lecture du résultat (en face du 0 du cadre).

2.2. - Résultats des élèves

Le premier mouvement des élèves, une fois qu'ils ont placé l'origine sur le support/cadre, est d'indiquer les chiffres sur les dents des roues (voir Moyon, Chorlay & Plantevin, 2018) ; cela fonctionne pour le premier opérande en amenant le chiffre voulu en face de l'origine mais, ensuite, pour le second opérande, il faut compter les rotations élémentaires c'est-à-dire compter les secteurs que l'on fait défiler devant l'origine ; on peut cependant lire le résultat en face de l'origine à la fin, et même si ça ne correspond pas au cahier des charges du prototype, ce n'est pas faux.

Si on n'a pas de kit, ou si on ne donne pas le kit complet (avec le support et le cadre et la sélection de base de roues à dix, une et zéro dents), on voit apparaître d'autres prototypes, et ceci quels que soient les public et contexte. On obtient également les prototypes qui préservent le sens de rotation identique pour tous les ordres : à une ligne avec roues intermédiaires ou à deux lignes avec une ligne de roues dédiées à la lecture. C'est plus varié dans la restitution, et personnel, mais, en même temps, la conception du prototype avec seulement trois roues et donc des sens d'inscription alternés (et la graduation qui va avec) est très intéressante à considérer. Il faudrait pouvoir s'assurer que cette piste soit explorée aussi. C'est ce qu'on voit ici dans la classe de Priscilla Guéna qui n'a donné ni support, ni cache dans un premier temps : les élèves ont pris ce dont ils avaient besoin dans le matériel à disposition dans la classe.

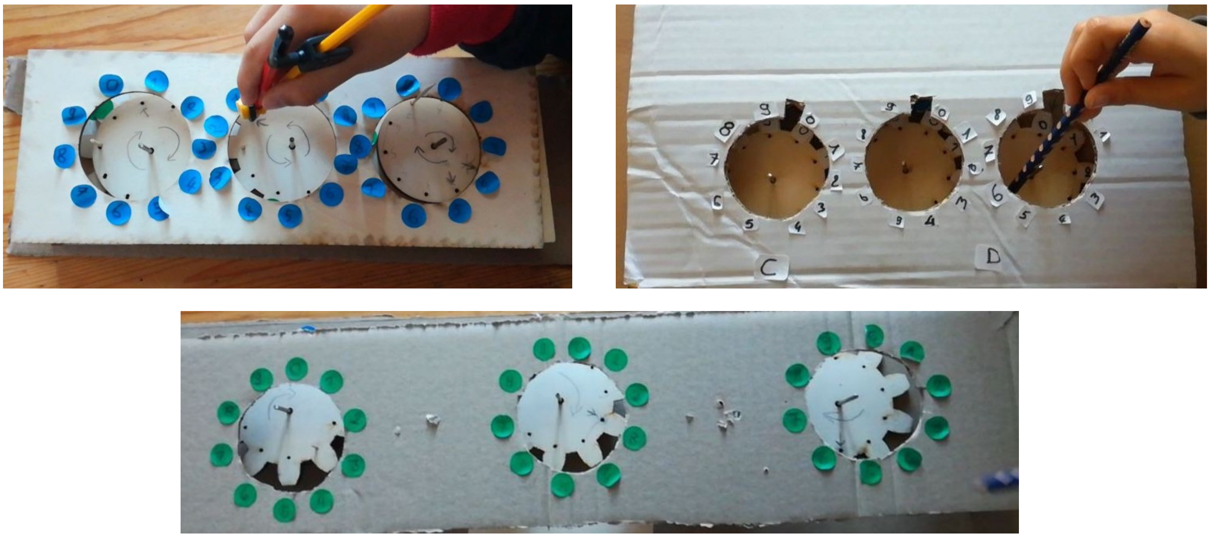


Figure 13 *: Trois prototypes réalisés dans la classe de PG. Support et cache n'ont pas été donnés aux élèves qui ont improvisé en fonction de leurs besoins en utilisant le matériel disponible dans la classe.*

Dans la classe de Muriel Geslin, le matériel a été entièrement donné et utilisé, la solution à trois roues a été la seule retenue (*cf.* figure 14). Le premier prototype est à double graduation avec butée et les deux autres à simple graduation. Dans tous les cas, le 0 sur la roue indique la place de la dent de retenue. Le dernier ne fonctionne pas : il faudrait une deuxième graduation car, d'après le sens de la flèche et de la graduation, il fonctionne avec une butée.

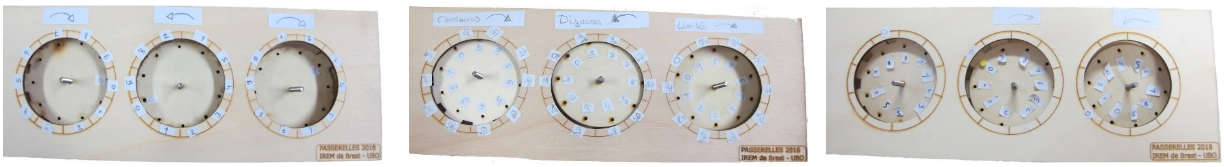


Figure 14 *: Trois prototypes à trois roues réalisés dans la classe de MG.*

3. – Bilan de ce qui est travaillé en mathématiques avec cette activité

Plusieurs choses ont déjà été dites dans les étapes attendues de la construction. La plupart sont liées à la représentation des nombres dans notre numération décimale de position. Il s'agit d'incarner en quelque sorte les principes de cette représentation dans la machine : c'est-à-dire chercher à le faire puis l'ayant fait constater ce que cela donne.

L'observation d'une additionneuse à roues telle que la LC et surtout la conception d'une telle machine, renforce la compréhension de la représentation des nombres dans le système de numération décimale de position ; prenons un exemple. Inscrire 123 dans une additionneuse dont on aurait compris le fonctionnement, ce n'est pas entrer un 1 puis un 2 puis 3 à la bonne place pour que les chiffres des lucarnes ressemblent au nombre voulu. Comme les roues sont engrenées, le 1 est bien un 100, le 2 est bien 20 et le 3 juste 3 unités : dans la conception de la machine, on pourrait considérer trois roues, une pour chaque ordre, les graduer, les ranger dans le bon ordre et indiquer 1, 2, 3 sur chaque roue mais cela ne représenterait pas 123 (*cf.* figure 6). Certains élèves commencent par faire cela, réalisent quelques additions correctes mais, bien sûr, dès que la somme partielle dans un ordre dépasse 9, le résultat est faux. Ce qui leur permet de réaliser la nécessité de l'engrenage. Inversement, certains élèves trouvent très rapidement la manière de mettre en œuvre la transmission de la retenue avec le matériel donné mais ne sont pas capables de dire quelle est la roue des dizaines et quelle est la roue des unités dans leur dispositif. L'activité révèle que le lien entre numération et opération n'est pas toujours clair, et permet donc d'y revenir.

Dans cet ordre idée, l'exemple du prototype Y est particulièrement intéressant ; il est conçu à l'envers donc faux du point de vue de la convention de représentation des nombres mais il est juste du point de vue fonctionnel dans le sens où la roue des unités, même mal placée, engrène bien celle des dizaines. Le calcul fait est $123+95$ mais en fait ce qui est entré est $321+59$ (et donne donc 812 dans ce « système »).

Dans le calcul avec la machine (que ce soit la LC ou le prototype), on entre un nombre chiffre par chiffre donc il n'y a pas de différence entre le nombre 37, par exemple, et le calcul de la somme $30+7$. Si on entre les dizaines en premier, on le constate en lisant 30 après avoir entré le chiffre des dizaines : $37=3\,d+7\,u=30+7$

La décomposition des nombres dans la base 10 est matérialisée : ordre (une roue), et lien renforcé entre opération et construction des entiers naturels (par addition).

Comme on entre un chiffre à la fois pour chaque opérande, on voit le calcul se faire ordre par ordre ; par exemple, le calcul de $37+48$: on entre le premier opérande (37) puis le deuxième opérande en commençant par le chiffre des unités par exemple (8) :

$$\begin{array}{rcl}
37+8 & = & (3\,d + 7\,u) + 8\,u \\
 & = & 3\,d + (7\,u + 8\,u) \\
 & = & 3\,d + 15\,u \\
 & = & 3\,d + (10\,u + 5\,u) \\
 & = & 3\,d + (1\,d + 5\,u) \\
 & = & (3\,d + 1\,d) + 5\,u \\
 & = & 4\,d + 5\,u
\end{array}$$

puis son chiffre des dizaines (4) :

$$\begin{array}{rcl}
37+48 & = & (37 + 8) + 40 \\
 & = & (4\,d + 5\,u) + 4\,d \\
 & = & 4\,d + 4\,d + 5\,u \\
 & = & (4\,d + 4\,d) + 5\,u \\
 & = & 8\,d + 5\,u \\
 & = & 85
\end{array}$$

Ou bien on commence par le chiffre des dizaines (4) pour le deuxième opérande :

$$\begin{array}{rcl}
37+40 & = & (3\,d + 7\,u) + 4\,d \\
 & = & 3\,d + 4\,d + 7\,u \\
 & = & (3\,d + 4\,d) + 7\,u \\
 & = & 7\,d + 7\,u
\end{array}$$

On entre ensuite les unités (8) :

$$\begin{array}{rcl}
37+48 & = & (37 + 40) + 8 \\
 & = & (7\,d + 7\,u) + 8\,u \\
 & = & 7\,d + (7\,u + 8\,u) \\
 & = & 7\,d + 15\,u \\
 & = & 7\,d + (10\,u + 5\,u) \\
 & = & 7\,d + (1\,d + 5\,u) \\
 & = & (7\,d + 1\,d) + 5\,u \\
 & = & 8\,d + 5\,u \\
 & = & 85
\end{array}$$

Ainsi le calcul s'appuie sur l'associativité et la commutativité de l'addition, et sur la relation fondamentale $10\,u=1\,d$, comme on le voit en écrivant les calculs en ligne.

Pour aller plus loin, on pourrait ajouter ce qu'il faut pour réaliser les soustractions, permettre de travailler avec des nombres décimaux, revenir aux machines dont les photographies sont étudiées au départ de l'activité. L'*Addometer* (*cf.* photo 2 de l'annexe 1) par exemple est un bon prolongement avec ses roues à douze dents et huit dents qui donnent l'occasion de parler du système de mesures de longueur impérial et US, pieds, pouces et fractions de pouces. On peut aussi imaginer créer des additionneuses pour des bases de numération autres que dix, comme les bases hexadécimale ou sexagésimale par exemple.

La raison d'être de cette séquence était au départ de permettre de se pencher sur les multiplicatrices mécaniques et de travailler avec de façon éclairée en mathématiques, c'est-à-dire en essayant de lier concepts et objets mathématiques à leur représentation matérielle dans la machine. Cela permettait aussi de travailler avec des élèves plus avancés sur la multiplication et la division avec ces machines. Regardons maintenant comment la compréhension d'une additionneuse à roues peut mener à l'étude des multiplicatrices.

4. – Séquence avec des multiplicatrices

Comme dit précédemment, nous avons deux raisons de procéder dans cet ordre, additionneuse puis multiplicatrice ; ces deux motivations correspondent à deux aspects assez différents du passage de l'une à l'autre : faire apprécier la portée des changements apportés par ces nouvelles machines et comprendre leur fonctionnement. On ne peut comprendre le calcul mécanique si l'on ne s'est pas penché sur la représentation des nombres matériellement et sur le lien entre cette représentation et l'addition, et plus largement les opérations arithmétiques. En retour, ce travail produit une nouvelle perception des mathématiques en jeu, ce qui est le but. Toutes ces machines effectuent la multiplication par un entier comme une addition répétée (et la division euclidienne comme une soustraction répétée), on peut donc faire des calculs de multiplication avec les additionneuses. C'est important de le faire pour pouvoir saisir ce qu'apporte l'invention de l'entraîneur et du chariot.

Ce travail a été détaillé dans le chapitre 3 du manuel *Passerelles* (Moyon & Tournès, 2018). Il s'appuyait sur un modèle particulier de multiplicatrice à entraîneur à nombre variable de dents de type *Odhner* (une *Brunsviga 20*[5]), mais toute machine de ce type peut convenir, bien entendu.

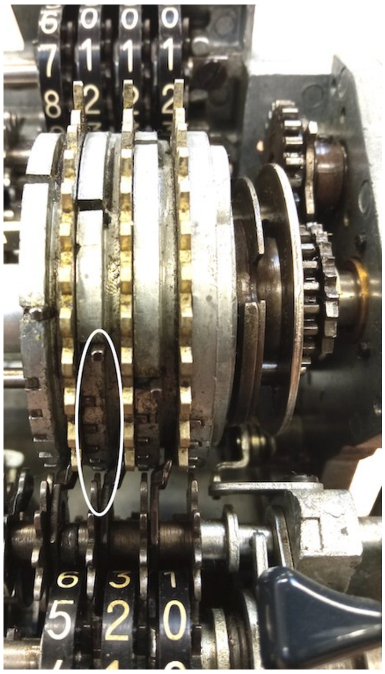


Figure 15 *: Détail de l'entraîneur d'Odhner sur une machine construite pour l'apprentissage. On voit la dent cylindrique à section carrée qui va engrener le totalisateur.*

Pour la clarté du propos, il peut être judicieux de vérifier que la machine étudiée ne dispose pas d'un mode soustraction qui n'autorise qu'un sens de rotation de la manivelle (ou évite de changer de sens de rotation de la manivelle, selon le point de vue que l'on a !)[6].

[5] On peut voir cette machine ici : https://ubotv.univ-brest.fr/video/1053-bintro2mp4/

[6] Les *arithmomètres* du type « Thomas de Colmar » présentent cette caractéristique ; bien que ce soient des

Pour que l'activité soit accessible à tous et même sans avoir une telle machine (ce qui est tout de même fréquent malgré leur caractère assez commun), des films ont été réalisés pour la séquence dont le but est celui annoncé ici.

Les multiplicatrices sont des additionneuses dotées de deux améliorations considérables, un entraîneur qui permet d'ajouter en un seul geste tous les chiffres d'un nombre au résultat du totalisateur, et un système de décalage, en général un chariot, qui permet, en déplaçant le totalisateur, de « multiplier par 10 » d'un seul geste. L'idée de ces deux avancées est due à Leibniz (1673) mais le premier à en avoir réalisé une version efficace et reproductible industriellement est Thomas de Colmar (1820). Les machines *Odhner* (1873) ont des entraîneurs différents des précédents, beaucoup moins encombrants mais assez difficiles à voir et à comprendre car ils sont compacts et tournent dans un plan parallèle aux rainures où glissent les doigts d'inscription, ce qui est assez contre-intuitif. Si on peut ouvrir le capot de la machine et regarder comment les dents cylindriques à section carrée sortent de l'entraîneur au fur et à mesure que le doigt d'inscription glisse dans la rainure vers des chiffres plus grands, c'est une bonne chose. De ce point de vue, l'*arithmomètre* de Thomas de Colmar et la plupart de ses clones sont plus intéressants car ils ont en général une trappe de visite. Par cette ouverture, on peut voir les cylindres à dents inégales sous la rainure d'inscription de chaque ordre, et même, éventuellement, avec un petit dispositif de surélévation et un miroir, on peut les voir en action, ce qui est très satisfaisant.

Le chariot intervient au moment d'ajouter l'opérande inscrit au nombre présent dans le totalisateur. Prenons un exemple : si on souhaite multiplier 123 par 45, on peut inscrire 123, décaler le chariot d'un cran et tourner 4 fois la manivelle, ce qui donnera $1\,230 \times 4 = 123 \times 40 = 4\,920$ dans le totalisateur puis ramener le chariot à sa place originale et tourner la manivelle 5 fois pour ajouter au résultat précédent $123 \times 5 = 618$, ce qui donnera 5 538 en 1 mouvement du chariot et 9 tours de manivelle (au lieu de 45). Comme on le voit, cette fonctionnalité est essentielle pour l'efficacité de la machine en termes de nombre d'opérations, mais ce qui est le plus formidable, c'est la simplicité de cette idée qui est seulement de mettre en œuvre le système de numération avec lequel nous travaillons : un décalage du chariot (qui porte le totalisateur) d'un cran vers la gauche place le chiffre des unités du nombre inscrit (3) en face du chiffre des dizaines du totalisateur.

Ici, il ne s'agit pas de construire un prototype, mais de l'étudier. L'activité a pour but de faire découvrir le fonctionnement des machines en s'appuyant sur les connaissances des opérations arithmétiques et de leur calcul posé pour aller plus loin. Dans ces machines qui peuvent faire les quatre opérations, il n'y a pas de bouton pour choisir l'opération. Pour la multiplication, on inscrit le premier opérande mais on construit le deuxième (le multiplicateur) qui s'affiche comme un résultat de manipulations en même temps que le résultat. Pour la division euclidienne, l'utilisateur inscrit dividende et diviseur mais construit le quotient et obtient le reste comme le résultat de l'opération. Toutes ces nuances particulières pour mener à bien des calculs par ailleurs connus (et plus ou moins maîtrisés) amènent à les reconsidérer, à les comprendre d'une façon nouvelle et donc à les approfondir. On voit l'aller-retour dont je parle dans l'introduction. Il s'agit de comprendre la machine en utilisant ce que l'on sait, en cherchant à retrouver ce que l'on connaît ; une fois la machine comprise, on découvre qu'elle nous donne une nouvelle perspective sur ce que l'on croyait savoir complè-

machines magnifiques et très parlantes, par leur taille et leur disposition, elles sont malgré tout de ce fait moins adaptées à notre propos pour l'étude de la division.

tement et qu'elle permet de faire même mieux que ça. Regardons cela.

D'un point de vue mathématique, on peut chercher à écrire en ligne les opérations successives que la machine réalise pour calculer un produit. En écrivant de cette façon, on met en évidence non seulement la décomposition des nombres dans la base 10 mais aussi toutes les propriétés algébriques des opérations addition et multiplication (associativité et commutativité, distributivité de la multiplication sur l'addition). La machine fait les calculs attendus grâce à ces propriétés, son principe même repose sur ces propriétés : chercher à l'écrire explicitement permet de les faire apparaître et de les nommer. Ce qui est au cœur du programme du cycle 4, le début de l'algèbre.

Les machines arithmétiques permettent de mener un travail intéressant sur la division (qui n'a été que partiellement abordée avec les élèves dans *Passerelles*, faute de temps). La machine réalise la division euclidienne des entiers naturels ; elle permet de calculer la division avec un nombre de décimales prescrit au départ. Elle le fait en mettant en œuvre l'algorithme d'Euclide par soustractions répétées du diviseur tant que le reste de cette opération est positif. Voir cet algorithme matérialisé dans la machine est un grand choc, utile selon nous : d'une procédure sur le papier, la boucle « tant que » entre en action sous les yeux de l'utilisateur attentif et la condition de positivité du reste du théorème-définition de la division euclidienne, en étant ainsi concrètement utilisée, prend la place essentielle qui lui revient.

Le calcul peut être mené en appliquant un mode opératoire à la lettre et sans rien connaître de la division (heureusement, car sinon ce serait inutile… et ces machines n'auraient pas été fabriquées en autant d'exemplaires divers et variés). Prenons un calcul simple, 47 divisé par 7 : on inscrit les chiffres du multiplicande 47 avec les doigts d'inscription et on effectue un tour de manivelle dans le sens horaire (le voilà dans le totaliseur), on remet le compte-tours à 0 et on inscrit les chiffres du diviseur 7, puis on tourne la manivelle dans le sens inverse jusqu'à ce que la machine sonne (ce qui arrive au cours du 7e tour) ; on repart enfin dans le sens direct une fois et on lit le quotient dans le compte-tours (6) et le reste dans le totaliseur (5). On a bien $47-6\times7=5$.

Voyons maintenant un deuxième calcul, où le dividende est plus grand que le diviseur d'au moins un ordre de grandeur ; mener le calcul de la même manière que précédemment est évidemment possible mais pas très efficace en termes de nombre d'opérations (de tours de manivelle). Avec le chariot, on peut réduire ce nombre en inscrivant le diviseur multiplié par des puissances de 10, en commençant par le plus grand produit inférieur au dividende. Par exemple, menons le calcul de 345 divisé par 27 : on inscrit 345, on l'enregistre dans le totalisateur et on remet à 0 le compte-tours ; on inscrit 27, puis on décale le chariot vers la droite (le chiffre 7 des unités du diviseur est donc en face des dizaines du totalisateur), puis on effectue un tour de manivelle dans le sens antihoraire (le totalisateur indique 75, qui est bien le résultat de la soustraction $345-270$ réalisée par la machine) ; si on faisait encore un tour, la machine sonnerait car $75<270$ donc on ne le fait pas. On remet le chariot à sa place et on entame les tours de manivelle antihoraires des soustractions répétées de 27 jusqu'à ce que le résultat devienne inférieur ou égal à 27 (ou bien jusqu'à que la machine sonne, un tour plus loin, si on veut éviter d'être attentif ; dans ce cas on revient en arrière – sens horaire – une fois), cela se produit au bout de deux tours. Dans le totaliseur, on lit le reste qui est 21. Dans le « compte-tours », on lit non pas le nombre de tours de manivelle dans le sens antihoraire effectués, qui est 3, mais le nombre 12 car le « compte-tours » (qui est donc bien plus qu'un compte-tours) est placé sur le chariot lui aussi et dénombre les tours faits dans chaque position du chariot, avec le même décalage que le totalisateur, 12 est bien le quotient attendu car on a bien $345-12\times27=21$. On reconnaît la procédure du calcul posé de la division.

Si on veut passer à la division décimale, on peut le faire en décalant le chariot à l'inscription du dividende, d'autant de fois que l'on veut de décimales. Voyons comment procéder sur notre exemple, pour obtenir, par exemple, 3 chiffres après la virgule. Il suffit d'entrer 345 000, en inscrivant 345 puis en décalant le chariot trois fois vers la droite avant de tourner la manivelle (le totalisateur indique 345 000) puis d'appliquer la procédure décrite plus haut – sans oublier de remettre préalablement à 0 le « compte-tours ». On inscrit 27, on décale le chariot 4 fois vers la droite (car $270\,000<345\,000$) et on tourne la manivelle une fois dans le sens antihoraire (on lit 10 000 dans le compte-tours, et 75 000 dans le totalisateur) ; on ramène le chariot d'un cran vers la gauche et on tourne la manivelle 2 fois (on lit 12 000 dans le compte-tours, 21 000 dans le totalisateur) ; on ramène le chariot d'un cran vers la gauche et on tourne la manivelle 7 fois pour soustraire $7\times2\,700$ à 21 000 : on lit 12 700 dans le compte-tours, 2 100 dans le totalisateur ; on ramène à nouveau le chariot d'un cran vers la gauche et on tourne la manivelle 7 fois pour soustraire 7×270 à 2 100 : on lit 12 770 dans le compte-tours, 210 dans le totalisateur, et une dernière fois pour obtenir finalement $345\,000-12\,777\times27=21$ en 24 tours de manivelles (au lieu des 12 777 tours qui auraient été nécessaires sans le chariot). On obtient donc finalement $345-12{,}777\times27=0{,}021$ c'est-à-dire $345\div27\approx12{,}777$, avec un « reste » 0,021 non divisé, résultat que l'on peut lire directement si on a utilisé les marques mobiles disponibles sur les cadrans du compte-tours et du totalisateur pour repérer la place de la virgule. Remarquons que l'on aurait pu s'arrêter plus tôt dans le calcul et ne pas faire les deux dernières étapes puisque dès qu'on obtient 2 100, on sait que les chiffres suivants du quotient seront des 7 (on pourrait même en déduire le développement décimal infini du rationnel $\frac{345}{27}$).

On fait avec la machine exactement ce que l'on fait dans le calcul posé, sauf que l'on travaille avec les entiers et qu'il faut donc soi-même placer la virgule. Ce n'est pas un inconvénient, bien au contraire car cela permet de comprendre pourquoi on peut calculer avec les nombres décimaux comme avec les entiers (et une fois qu'on l'a compris, la procédure un peu mystérieuse du calcul posé est transparente). Remarquons également que, avec la machine, le nombre de décimales étant choisi au départ, on ne peut plus poursuivre le calcul pour obtenir d'autres décimales, contrairement au calcul posé.

Le calcul de la division avec les calculatrices électroniques impose l'idée de la division comme une opération de partage en parts égales le plus équitable possible, avec l'idée de précision (ou d'erreur). C'est une vision assez éloignée de la division euclidienne et de son calcul posé. Lier les deux procédures n'est pas évident avec la disparition brutale du reste dans le calcul fait à la calculatrice. La multiplicatrice peut permettre de rendre plus visible ce lien en explicitant à la fois l'algorithme d'Euclide sur les entiers et l'idée d'un calcul avec une précision prescrite sur les nombres décimaux et finalement les rationnels.

Conclusion

J'ai essayé de montrer comment l'étude de deux machines arithmétiques mécaniques permet de travailler de manière authentique le lien entre numération et calculs. En commençant par l'opération la plus simple et fondamentale qui soit, l'addition, on permet d'expliciter les bases de l'arithmétique mais surtout celles du calcul algébrique. Le moment où ces différentes activités peuvent prendre la meilleure place dans la scolarité est un point important mais il me semble, selon notre expérience, que c'est surtout le temps que l'on doit y passer qui varie. En effet, quel que soit le moment où cette activité est menée, ce qui est révélé par la construction du prototype d'additionneuse, puis par l'étude d'autres machines plus complexes, doit être compris. Ce n'est pas le seul moyen d'y parvenir, bien sûr, mais c'en est un. C'est aussi une activité que l'élève peut mener en relative autonomie et surtout en responsabilité et pour son propre compte, la diversité des réponses possibles lui donnant cette liberté. Ce n'est pas si fréquent ni si facile à trouver. Enfin, pour les adultes, comme pour les élèves, faire coïncider ce qu'ils savent déjà avec l'objet nouveau dont ils cherchent à comprendre le fonctionnement, relier des connaissances en apparence disjointes, produit une grande satisfaction et un certain soulagement. Cela fait plaisir à voir et montre aussi l'utilité de l'activité.

Pour terminer, disons un mot de la faisabilité. Nous avons testé l'activité de l'additionneuse avec des élèves de cycle 3, en primaire et au collège où, comme chacun sait, l'organisation du temps scolaire est très différente. Au collège, l'activité a été menée entre les classes de technologie et de mathématiques (et en coanimation lorsque c'était possible) ; non seulement cela permet d'augmenter le temps dévolu à l'activité sans rogner sur les autres apprentissages nécessaires mais, en plus, cela permet de donner sa pleine mesure à l'activité, qui conjugue intimement les questions conceptuelles aux questions technologiques et permet d'atteindre des objectifs spécifiques de chaque discipline sans que ce soit au détriment de l'autre.

Frédérique PLANTEVIN
Laboratoire de mathématiques de Bretagne atlantique - CNRS - UMR 6205 (LMBA),
Université de Bretagne Occidentale,
IREM de Brest

Références bibliographiques

Auteurs bénévoles (2004). La bibliothèque de travail (BT), des premiers pas à nos jours. *Le nouvel éducateur, 155*, 9-11.

Cargou, C., Cargou, M.-P. & Plantevin, F. (2012). *Multipliez ! Instruments de calcul de la mulitiplication. 200 ans de génie, 200 ans d'industrialisation* (Préface de D. Tournès). Brest : IREM de Brest.

Groupe Instruments de calcul dans l'histoire et dans la classe (IHC), IREM de Brest ; Plantevin, F., Fustec, V., Lefèbvre, Y., Le Thénaff, Y., Le Pors, M., Geslin, M., & Bernard, D. (2018). La mécanisation du calcul. Dans M. Moyon, D. Tournès, *Passerelles : enseigner les mathématiques par leur histoire au cycle 3* (pp. 64-91). Paris : Association pour l'élaboration et la diffusion de ressources pédagogiques sur l'enseignement des mathématiques à l'école (ARPEME).

Jacob, L. F. G. (1911). *Le calcul mécanique. Appareils arithmétiques et algébriques. Intégrateurs*. Collection Encyclopédie scientifique. Bibliothèque de mathématiques appliquées (dir. M. d'Ocagne). Paris : G. Doin.

Le Brusq, C. & Plantevin F. (2013). Exploitation pédagogique d'une exposition d'instruments de calcul. Dans *Actes du XXXIX*[e] *colloque COPIRELEM, Quimper 2012. Faire des mathématiques à l'école : de la formation des enseignants à l'activité de* *l'élève*. Atelier A4. Brest : IREM de Brest.

https://bibnum.publimath.fr/IWO/IWO13002.pdf

Marguin, J. (1994). *Histoire des instruments et machines à calculer. Trois siècles de mécanique pensante, 1642-1942*. Paris : Hermann.

Moyon, M., Chorlay, R., Plantevin, F. (2018). Enseigner les mathématiques par leur histoire au cycle 3. Dans F. Vandebrouck & B. Lebot, Mathématiques au Cycle 3 : actes du Colloque du Plan National de Formation, Poitiers 2018 (pp. 87-109). Poitiers : IREM de Poitiers.

ISBN 978-2-85954-096-8

⟨hal-01781209⟩

Moyon, M. & Tournès, D. (2018). *Passerelles : enseigner les mathématiques par leur histoire au cycle 3*. Paris : Association pour l'élaboration et la diffusion de ressources pédagogiques sur l'enseignement des mathématiques à l'école (ARPEME).

Pellissier, M. (1965). *Construis une machine à calculer (addition et soustraction), 189*. Supplément au n° 612 de Bibliothèque de Travail. Nantes : Institut coopératif de l'école moderne (ICEM).

Plantevin, F. & Milici, P. (2021). Historical Instruments, Education, and Do-It-Yourself in the Cabinet of Curiosity of Brest, France. Dans E. Cavicchi & P. Heering, *Historical Scientific Instruments in Contemporary Education* (pp. 209-225), Leiden, NL : BRILL, Scientific Instruments and Collections.

ISBN 978-90-04-49966-9

https://brill.com/display/book/9789004499676/BP000021.xml

https://hal.science/hal-04317916v1

Sitographie

https://www.jaapsch.net/mechcalc/lightning.htm#lightning

consulté le 24 septembre 2024.

Ce site en langue anglaise contient un très grand nombre d'informations utiles et exploitables en classe ; on peut aussi voir ou télécharger le brevet directement ici :

https://irem.univ-poitiers.fr/colloque2017/ressources/At13_24_25_35-Annexe4.pdf

http://www.boelter.rechnerlexikon.de/Zehneruebertrag/ten_carry_mechanism.html

consulté le 24 septembre 2024.

Ce site en langue allemande propose des vues de l'intérieur de la Lightning calculator de 1926 et des versions ultérieures.

https://www.icem-pedagogie-freinet.org/node/24927

consulté le 30 août 2024.

Version numérisée du SBT 189. Le site https://www.icem-pedagogie-freinet.org/ propose un grand nombre de numéros de BT et SBT (dont le n° 189) numérisés, mais aussi de très nombreuses ressources dont la version numérique de BT, appelée BTn qui a pris la suite de BT.

Annexes

Annexe 1

Les documents distribués lors de la formation MPLS « Nombres, opérations et engrenages » en 2019 et 2020, dont les différentes modalités pour l'activité complète, sont téléchargeables à partir de la fiche Publimath de l'article. Ci-dessous, les images qui peuvent être utilisées pour la première activité en plus de celle de la LC.

Image 1

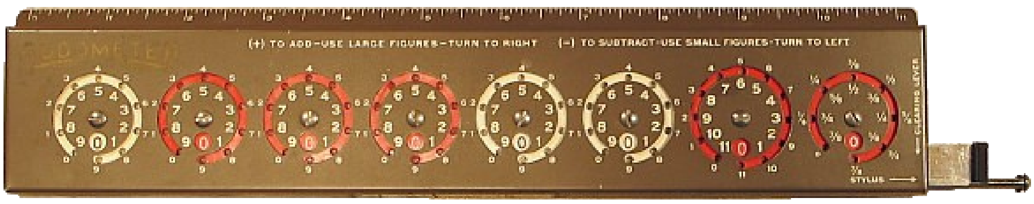


Image 2

Image 3

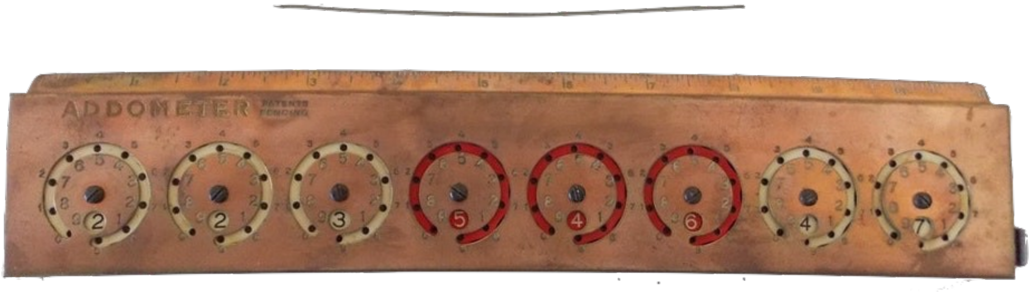


Image 4

Image 5

Image 6

Image 7

Annexe 2

Comment utilise-t-on ces prototypes ? Voici deux exemples du calcul 123+95 en quelques étapes sur deux machines à trois roues. Pour plus de détails, les films de ces calculs sont disponibles, au côté de la vidéo de démonstration de la LC (et des films accompagnant le chapitre 3 de Passerelles) sur https://ubotv.univ-brest.fr/search/?q=LC.

Annexe 2.1. – La machine à double graduation

- image 1 : la machine à 0 (avec le cache) ;
- image 2 : la machine à 0 (sans le cache) ;
- image 3 : 123 inscrit (avec le cache) : on pointe sur la roue en face du chiffre voulu du cadran extérieur (noir) et on amène en face du 0 du cadre extérieur en suivant le sens de la flèche, on lit en face du 0 du cadre extérieur le chiffre du résultat sur la roue (vert) ;
- image 4 : la même chose sans cache ;
- image 5 : après avoir inscrit 95, on lit le résultat sur les roues, en face des 0 du cadre (chiffres en vert).

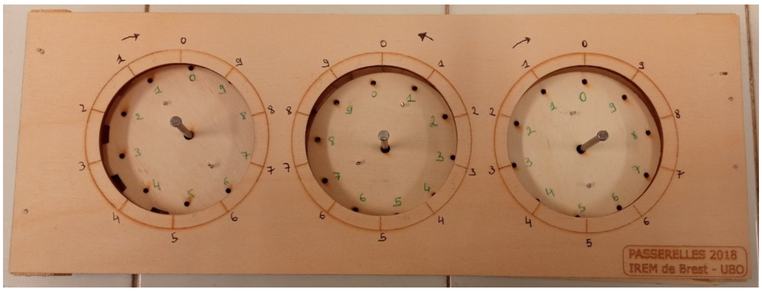


Image 1

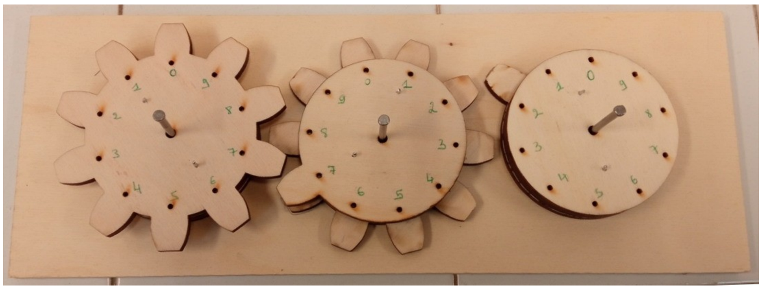


Image 2

Image 3

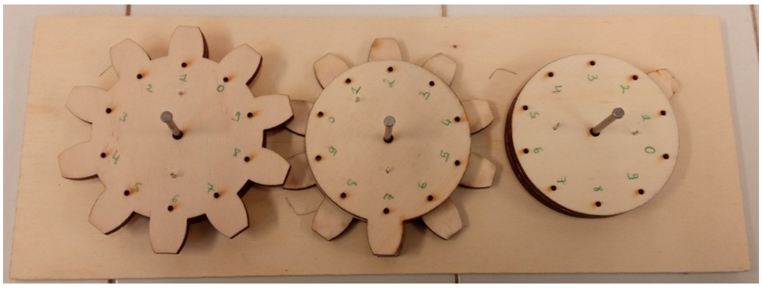


Image 4

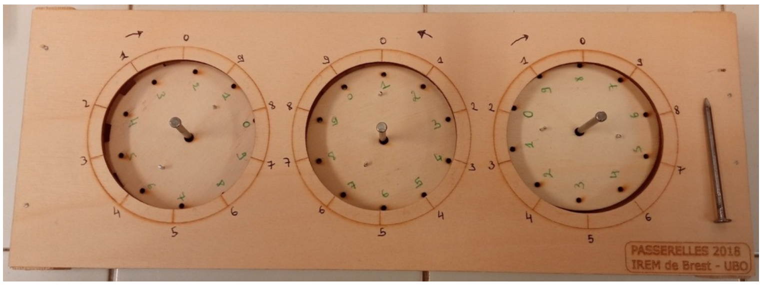


Image 5

Annexe 2.2. – La machine à simple graduation avec les chiffres noirs pour l'addition (et rouge pour la soustraction)

- image 1 : la machine à 0 (avec le cache) ;
- image 2 : la machine à 0 (sans le cache)
- image 3 : 123 inscrit (avec le cache) : pour chaque chiffre, on pointe sur la roue en face du 0 du cache et on amène en face du chiffre voulu du cadran extérieur en suivant le sens de la flèche noire, on lit le chiffre du résultat en face de la flèche de la roue sur le cadre extérieur
- image 4 : après avoir inscrit 95, on lit le chiffre du résultat en face de la flèche de la roue sur le cadre extérieur
- image 5 : la même chose sans le cache

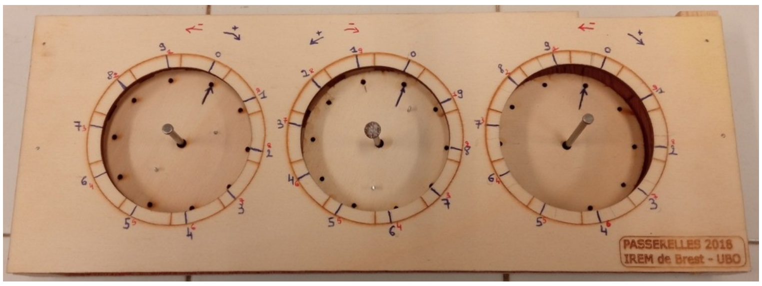


Image 1

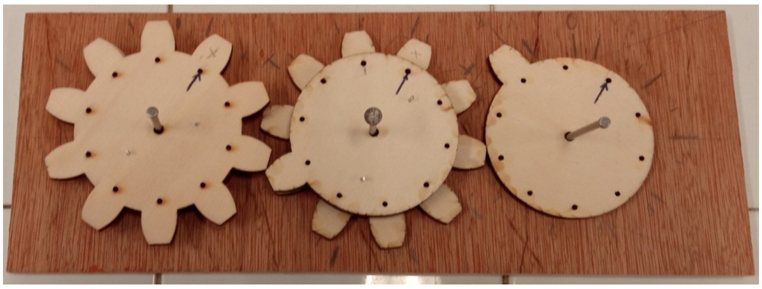


Image 2

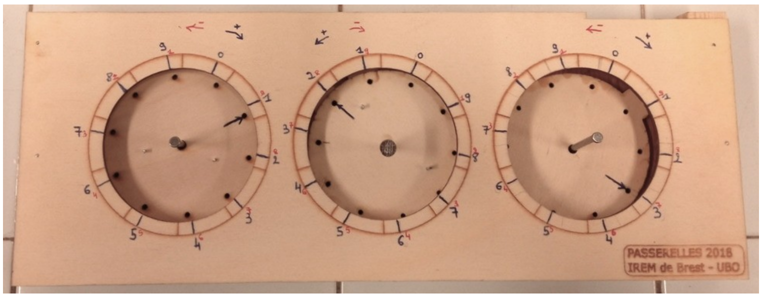


Image 3

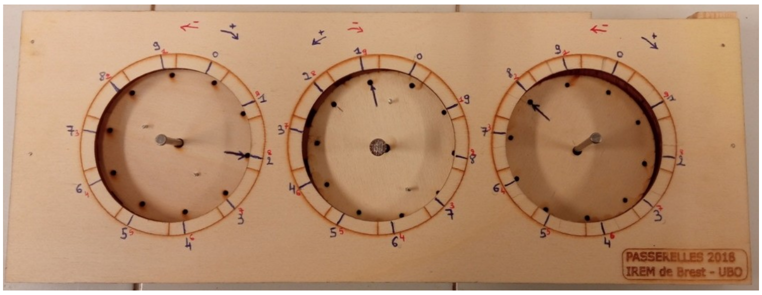


Image 4

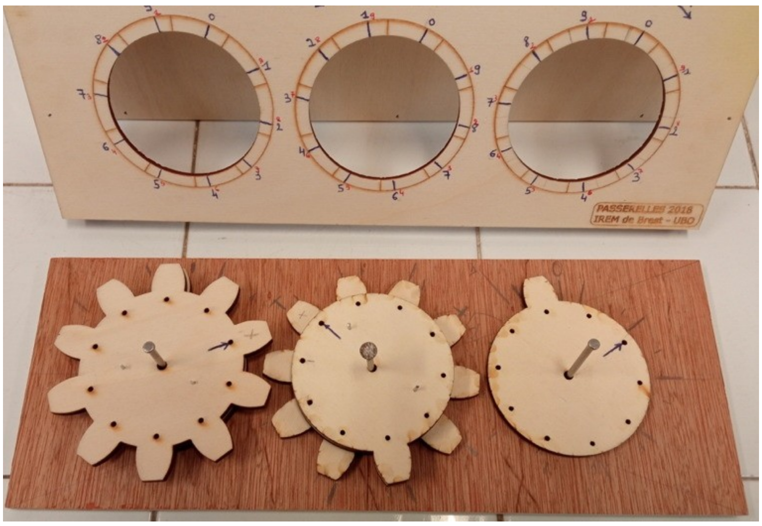


Image 5