COMMENT DES ELEVES DE 3EME ONT COMMENCE A ENTRER DANS L'ALGEBRE ELEMENTAIRE

Jean-Claude RAUSCHER
IREM de Strasbourg
jc.rauscher@wanadoo.fr

Sophie BAUERLE, collège Romain Rolland, Erstein
IREM de Strasbourg
sophie.bauerle@ac-strasbourg.fr

Résumé : Faire de l'algèbre en fin de collège signifie en particulier savoir utiliser des équations pour résoudre des problèmes. Mais convertir les données d'un problème en équation est une opération complexe qui soulève des difficultés souvent insurmontables. Avec un groupe de professeurs de collège à l'IREM de Strasbourg, nous avons conçu des tâches très simples pour faire prendre conscience des opérations sémio-cognitives sous-jacentes à ces difficultés. Nous présentons ici les étapes du cheminement fait par les élèves d'une classe de troisième et évaluons leur appropriation de la manière de travailler en algèbre élémentaire.

Introduction : la problématique et le parcours de recherche.

La conversion d'un énoncé de problème en équation est une tâche qui reste incompréhensible pour la plupart des élèves en fin de collège et en seconde. Voici comment Lacroix décrivait, il y a deux siècles, le problème didactique que soulève cette conversion : « *Il est difficile de donner une règle d'après laquelle on puisse effectuer la partie qui a pour objet la traduction en caractères algébriques des conditions de la question. Il faut, pour y réussir, se familiariser avec l'écriture algébrique et acquérir l'habitude.*» (Lacroix, 1820, p.15). Et il y a vingt-cinq ans, J-C Duperret et J-C, Fenice ont rappelé comment les enseignants se heurtaient aux impasses et aux abandons des élèves face à l'incompréhensibilité de cette tâche de conversion :
« *Certains acceptent vite la mise en équation comme un moyen de résolution de problèmes, alors que d'autres sont plus réfractaires à cette abstraction qui pour eux ne simplifie rien. La mise en échec de leurs procédures arithmétiques (souvent déjà peu solides, et se combinant à des difficultés de compréhension du texte, de mémorisation, d'appréhension des interactions entre les données) par des problèmes introduisant l'inconnue des deux côtés du signe "=" n'est plus alors pour eux une motivation, mais le plus souvent, une*

source de découragement, voire un critère d'arrêt de leur travail » (Duperret, Fenice,1999, pp. 53-54).

C'est l'accompagnement régulier d'un élève en marge de ses cours, de la classe de 4ème à la classe de 2de qui m'a fait mesurer la complexité de cette difficulté récurrente et souvent insurmontable (Rauscher, 2020). Comme beaucoup d'élèves, Jonathan était paralysé devant tout problème pour lequel il lui était demandé de recourir à l'algèbre. Et cela malgré toutes les explications qui avaient été données et les activités qui avaient été faites en classe ! Que faire alors pour faire progresser Jonathan ? Et les premières réexplications que je lui avais données ne servaient à rien : « *Je ne me souvenais plus comment faire. Tu m'as expliqué mais en interro, je ne me rappelais plus rien* ». Le point crucial de son incompréhension est apparu dans la résolution du problème que je lui avais donné : « *Une bouteille et son bouchon pèsent ensemble 110 grammes. La bouteille pèse 100 grammes de plus que le bouchon. Combien pèsent respectivement la bouteille et le bouchon ?* » Comprenant que sa réponse (« *10 et 100g* ») était fausse, il avait accepté d'appeler « *x* » le poids du bouchon. Mais quand je lui ai demandé d'exprimer le poids de la bouteille en fonction du poids du bouchon, il a eu une réaction très révélatrice : « *On ne peut pas savoir car on ne sait pas le poids du bouchon* ». Il n'envisageait pas d'utiliser cette première lettre pour exprimer le poids du deuxième objet à l'aide de la même lettre. La lettre choisie désignait bien pour lui le poids (ou la masse) de la bouteille, mais il considérait que cette valeur était fixée. Autrement dit, pour lui, *une lettre était associée à une grandeur, et aucune explication ne pouvait casser cette association devenue réflexe*. Il m'a alors fallu chercher des tâches simples qui l'aident à prendre conscience de *l'opération de désignation fonctionnelle*. Elles devaient évidemment être totalement différentes des activités qui lui avaient été proposées dans sa scolarité.

L'opération de désignation fonctionnelle implique deux tâches sémio-cognitives : *la condensation par une lettre d'une liste de nombres indéfiniment ouverte et la désignation de deux variables à l'aide d'une lettre et de symboles "+", " ×", etc*. (Duval et Pluvinage, 2016, pp.141-143). Ces deux tâches sont spécifiques aux mathématiques, mais elles doivent être suivies par d'autres tâches pour que les élèves voient comment on passe des phrases d'un énoncé de problème à l'écriture symbolique d'une équation. Il m'a fallu beaucoup de tâtonnement et aussi de discussions avec Raymond Duval et François Pluvinage pour les mettre au point. Ainsi, peu à peu Jonathan a pris conscience des opérations sémio-cognitives impliquées par la désignation fonctionnelle. Et son attitude à l'égard de l'algèbre élémentaire a changé. Le cas de Jonathan a soulevé la question de son intérêt et de ses apports éventuels pour l'enseignement de l'algèbre élémentaire au collège. Les enseignants pourraient-ils reprendre ces tâches dans des classes de 24 à 30 élèves avec les mêmes conséquences positives que pour Jonathan ? Et comment ?

Pour aborder cette question un groupe IREM intitulé « *Apprentissages en algèbre au Collège* » a été créé. Et des expériences ont été menées dans plusieurs établissements de la 6ème à la 3ème et même en seconde (Rauscher & Bauerle-Schoenenberger, 2023). Elles portaient sur la manière d'intégrer des moments de travail individuel que les tâches de désignation par une lettre exigent, sans perturber la poursuite des activités habituelles requises pour suivre les objectifs du programme. Et l'objectif des tâches proposées était uniquement que chaque élève réalise comment utiliser des lettres, des symboles d'opération en vue d'écrire une équation avec le symbole de relation « = ». Aussi, nous avons fait varier les symboles d'opérations et exclu les grands nombres, les décimaux, les quotients, *pour* *que les élèves se concentrent sur les associations* « un nombre ou une lettre et un symbole d'opération » : « *+(-3)* », « *2a* », « *2 × a* », et des associations plus complexes comme « *3a + 2* ».

Tout le travail que nous venions de faire portait sur le premier pas nécessaire pour entrer dans la compréhension de l'algèbre enseignée au collège. Mais pour situer ce travail, il faut utiliser la distinction épistémologique fondamentale entre *expression incomplète* et *expression complète* qui permet d'analyser les productions faites dans les registres de la langue naturelle et des écritures symboliques (Duval et Pluvinage, 2016, p 144). Les tâches proposées jusque-là se limitaient à la production d'« expressions incomplètes » comme « *a + 2* », « *2a* » et aux multiples manières de les désigner en français comme « *de plus que...* », « *le double de ...* ». Et leur but était que les élèves reconnaissent tout de suite les premières quand ils voyaient les seconde, et inversement. C'était là la première condition pour que les élèves puissent mettre en équation un énoncé de problème. Le pas important qui restait à faire était la production d' « *expressions complètes* », c'est-à-dire d'expressions comportant le symbole « = » comme « *(a + 10) + a = 50* ». En réalité, ce pas est un véritable saut sémantique et logique : *la question des conditions de vérité* se pose pour les expressions complètes, mais non pour les expressions incomplètes. Ce pas est également un saut cognitif. En effet la conversion d'un énoncé de problème en une équation qui permet de le résoudre est un processus global complexe. Il faut articuler des expressions incomplètes avec le symbole « = » en une équation qui prend en compte toutes les informations et toutes les contraintes données dans l'énoncé. D'une part, il ne faut surtout pas lire les énoncés de problème en mathématiques, comme on lit normalement les énoncés de problèmes en dehors des mathématiques (voir note dans l'annexe 1). D'autre part, il faut distinguer dans l'équation les différents niveaux de l'organisation syntaxique des opérations de substitution à effectuer successivement pour la résoudre (Deledicq ,1979).

C'est ce saut à la fois sémantique et cognitif qui a fait l'objet de la recherche et des expériences que nous avons faites, au cours de huit séances de novembre 2022 à mai 2023, dans une classe de 3ème au collège Romain Rolland à Erstein. Les activités ont été élaborées en étroite concertation avec l'enseignante de la classe, et ce texte a été rédigé avec elle. Et nous espérions un taux de réussite autour de 75% minimum, c'est-à-dire bien au-dessus de celui enregistré dans les évaluations nationales et dans les enquêtes PISA. Mais selon quels critères pouvions-nous parler de réussite, ou plus justement, d'acquisition pour chacune des tâches ayant été données en classe ? Nous en avons retenu deux. Tout d'abord les productions des élèves doivent être mathématiquement justes. Mais cela ne permet aucun pronostique pour les apprentissages ultérieurs. C'est pourquoi les productions doivent être quasi-immédiates - de l'ordre de moins d'une minute- car la prise de conscience des conversions et des substitutions d'expressions linguistiques ou symboliques à faire pour passer d'un énoncé de problème à l'équation se traduit par leur reconnaissance immédiate, sûre d'elle-même et irréversible.

Ce sont les activités proposées dans chacune des séances et les changements dans les productions écrites des élèves comme dans leurs réactions et explications orales que nous présentons ici.

1. — Comment susciter l'appropriation individuelle en classe des expressions incomplètes

Les écritures symboliques « *2a* », « *a + 2* », « a^2 », etc sont des expressions incomplètes qui associent trois symboles opératoires différents au même chiffre « *2* ». Ce chiffre est un nombre et l'association « *2a* » un autre nombre. Les expressions incomplètes fusionnent deux opérations sémio-cognitives totalement différentes : *la condensation d'une liste indé-*

finiment ouverte de nombres par une lettre, et la désignation fonctionnelle. Il est nécessaire d'avoir fait prendre conscience de chacune de ces deux opérations dans les calculs numériques les plus simples, pour introduire ensuite les calculs avec des lettres, avant le saut dans le calcul algébrique avec les équations. Voici les types de tâches que nous avons élaborées d'abord avec Jonathan, puis dans les classes[1].

1. 1 - Les tâches pour prendre conscience de la désignation fonctionnelle

L'activité sémio-cognitive (Tableau 1, Figure 1) porte sur des tableaux à compléter qui mettent en regard *deux listes corrélées de nombres entiers*, qui peuvent être indéfiniment allongées. La relation entre les deux listes de nombres est très simple pour qu'elle puisse donner lieu à son repérage quasi immédiat et

Tableau 1	
1	4
2	5
3	.....
4	.....
.....	.....
6	9
.....	.....
50	53
51	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
107	110
108	.....
.....	.....
Une lettre ?	***Et alors quoi écrire ici en utilisant la même lettre ?***

Tableau 2	
Nombre choisi	....
0	0
1	2
2	4
3	6
4	.....
.....	......
.....	.....
.....	.....
50	100
51	.....
.....	.....
107	214
108	......
.....	.....
Une lettre ?	***Et alors quoi écrire ici en utilisant la même lettre ?***

Tableau 3	
Nombre choisi	....
0	0
1	1
2	4
3	9
4	.....
.....	......
.....	.....
.....	.....
50	2500
.....	.....
106	
107	11449
.....	.....
.....	.....
Une lettre ?	***Et alors quoi écrire ici en utilisant la même lettre ?***

FIGURE 1– Tâche de condensation et tâches de désignation fonctionnelle

1. Les pionnières pour mettre au point et tester dans leurs classes ces activités ont été Audrey Candeloro (en 4ème) et Hélène Chilles Brix (en 5ème) au collège Twinger de Strasbourg classé en zone REP et Pauline Wiederhold (en 5ème et 4ème) au collège Marcel Pagnol de Wasselonne. Les autres membres du groupe IREM, ont par la suite pu en tester la pertinence dans leurs classes jusqu'en 3ème (Sophie Bauerle-Schoenenberger, Sandrine Bass, Mikhaela Amzallag, Claire Padoin, Anne Schultz, Julie Benoit)

ne poser ainsi aucune difficulté en soi. La dernière ligne du tableau demande d'une part de choisir une lettre pour désigner la première liste de nombres (opération de condensation d'une liste indéfiniment ouverte de nombres par une lettre) et d'autre part d'utiliser la même lettre pour désigner la deuxième liste ouverte de nombres (désignation fonctionnelle).

La difficulté n'est pas le repérage de la relation fonctionnelle numériquement vite identifiée, mais l'association de la lettre choisie pour la première colonne avec un symbole opératoire et le nombre (Rauscher, Bauerle-Schoenenberger, 2023, p 384). Arrivés à la partie algébrique de très nombreux élèves ne savent plus quoi faire et demandent de l'aide, d'autres écrivent l'opérateur « *+3* » dans la case qui fait face à la lettre ou encore « *ajouter 3* ». De façon plus surprenante encore, nous avons souvent rencontré, à tous les niveaux de collège, des propositions qui consistent à choisir une lettre pour la première case et la lettre située trois rangs plus loin dans l'ordre alphabétique. C'est en se contentant strictement de leur rappeler patiemment la consigne « *Quoi écrire avec la même lettre ?* » que le professeur relance les élèves.

Laisser le temps à chacun des élèves de remplir le tableau à son rythme est essentiel, car, pour comprendre, il faut faire soi-même jusqu'au moment où « *ça marche* ». Et alors là, on voit des visages souriants et on entend des réactions spontanées : « *Ah oui c'est ça !!! C'est tout bête !* » ou encore « *Ah oui, maintenant je comprends à quoi servent les lettres !* ». Cette compréhension survient brusquement pour chaque élève. C'est là, la prise de conscience d'une opération cognitive propre aux démarches algébriques élémentaires. Elle se réalise ainsi individuellement pour chaque élève, *indépendamment du niveau de classe de la 6ème à la 3ème*.

Une fois que cette prise de conscience est réalisée à partir de ce premier tableau, d'autres tableaux sont proposés aux élèves (voir exemples tableaux 2 et 3 de la figure 1). La tâche est analogue mais la dernière ligne est alors remplie immédiatement sans hésitation par les élèves, preuve que la prise de conscience réalisée précédemment est irréversible. Tâche analogue mais non répétitive puisqu'on fait varier le symbole opératoire. Cela permet ainsi aux élèves de découvrir le caractère général des opérations de désignations fonctionnelles avec des désignations comme « $a + a$ », « a », « $2a + 1$ » « $a \times a$ » ou « a^2 ». Ils ont alors aussi l'occasion de conscience d'équivalences (« $a + a = 2a$ », « $a \times a = a^2$ », et de non-équivalences (ex : « *carré du nombre ≠ double du nombre* »).

Un enseignant qui voudrait introduire dans une classe de sixième ces activités visant la compréhension de la désignation fonctionnelle devrait d'abord proposer une tâche visant exclusivement la fonction de condensation des lettres. Elle touche la question primordiale de ce que le choix d'une lettre désigne : l*a valeur numérique manquante ou toute une liste de nombres sans qu'il soit nécessaire de dire lequel*. Voici, par exemple, une tâche possible. On propose la liste de nombres « 1, 2,3, ...14, 15,16, ... 45, 46, ... ». Et on demande de la compléter jusqu'au moment il n'y aura plus de points pour la continuer. Puis on attend les réactions de perplexité ou d'impatience devant cette tâche sans fin pour engager une discussion : « *On va continuer longtemps comme ça ? Qu'est-ce qu'on pourrait faire pour désigner tous ces nombres ?* »

Tout cela peut paraître une perte de temps et sans intérêt mathématiquement. Certes ! Mais dès qu'on introduit immédiatement *la lettre comme une inconnue* on envoie les élèves dans le mur, et on crée un obstacle didactique à *la compréhension de la lettre comme variable*. Et en conséquence comme on a pu le constater pour Jonathan au départ, les élèves sont aveugles à l'utilisation d'équations pour résoudre des problèmes et, plus gravement, à la simple utilisation de formules pour résoudre des problèmes concrets comme on peut le voir dans une enquête PISA (Duval et Pluvinage,2016, p.120) En outre, si d'un point de vue mathématique les symboles opératoires renvoient à des propriétés mathématiques différentes, l'enseignement de ces propriétés ne fait pas comprendre la désignation fonctionnelle. Au contraire la désignation fonctionnelle est prérequise pour mettre en œuvre la propriété d'une opération. Pour s'en convaincre, il n'y a pas besoin de regarder les résultats en mathématiques dans les enquêtes PISA, ou ceux, souvent différents, dans les évaluations nationales à l'entrée en sixième et à l'entrée en seconde. Il suffit d'*un test de production et de reconnaissance immédiate de désignations fonctionnelles*, que chaque enseignant pourrait élaborer et faire passer lui-même. Il ne prend que quelques minutes. Les questions de reconnaissance portent sur le passage d'*une expression symbolique incomplète à celle incomplète qui la dit en français* (« *2a* » -> « *le double d'un nombre* »). Les questions de production portent sur le passage inverse (« *le successeur d'un nombre* » -> « *a + 1* »). Et il suffit de trois questions à choix binaires, pour chaque sens de passage pour un test de reconnaissance. La réussite à ces questions comporte deux critères. Les six réponses doivent être mathématiquement justes et *produites quasi-immédiatement*. Une non-réponse est un échec. Cette contrainte de rapidité est nécessaire. Si les élèves perdent du temps, souvent vainement, pour trouver, ou attendent que l'enseignant leur dise contre-productivement quoi écrire, ils ne peuvent plus acquérir de « savoir-faire » en algèbre qui soient transférables pour résoudre des problèmes.

1. 2 - Condensation sémiotique et désignation fonctionnelle ou généralisation d'une progression dans une formule ?

Quand nous présentons notre activité de condensation sémiotique à des enseignants ou à des chercheurs, elle est souvent spontanément apparentée à des activités de généralisation par exemple à partir de patterns ou d'activités sur tableurs. Or ces activités de généralisation sont différentes des activités qui visent ici exclusivement la prise de conscience des deux opérations sémio-cognitives de condensation d'une liste illimitée de nombres et de désignation fonctionnelle d'une autre liste de nombres.

Ce qui est cognitivement mobilisé dans les activités de généralisation est un raisonnement de type inductif pour trouver une règle générale à partir du balayage d'une suite de nombres générée par une progression. Dans un premier temps elle est décrite verbalement par les élèves. L'objectif des enseignants est de faire découvrir l'intérêt de recourir à l'usage de lettres pour d'une part aboutir à une formule et d'autre part utiliser cette formule pour calculer la valeur d'une suite à un rang quelconque, 3, 10, 152 ou n, ou inversement de calculer un rang correspondant à une valeur donnée et parfois par la suite repérer des équivalences entre des formules. Mais difficulté notable, l'usage d'une lettre pour coder cette règle exprimée en langage naturel ne *se fait pas spontanément et doit être suggérée explicitement comme le soulignent* Coppé, Grugeon-Allys et Pilet, (2016) analysant les conditions pour diffuser des situations issues de la recherche en didactique avec l'exemple du carré bordé.

La cause de cette difficulté apparaît clairement dans une expérimentation visant à développer la pensée algébrique, en référence aux travaux de Radford (2014). Les auteurs (Vlassis, J., Demonty, I. & Squalli, H., 2017) y soulignent d'un côté la capacité des élèves à produire une grande diversité de moyens de généralisation. Mais d'un autre, ils constatent la difficulté pour les élèves de franchir le seuil important de la prise de conscience par eux-mêmes de la désignation fonctionnelle comme l'illustre l'exemple suivant : « *Pour les amener à produire a + 2,* *l'enseignante doit mettre en évidence le lien entre les nombres 32 et 34* » (Vlassis et al, p. 150). Et de même l'intervention de l'enseignante est nécessaire pour les élèves qui formulent l'expression « *a+b+a+b* » plutôt que « *a+2+a+a+2+a* ». Les activités proposées ne permettent aux élèves de prendre conscience de l'opération de condensation ni de celle désignation fonctionnelle. En effet la prise de conscience de la désignation fonctionnelle présuppose celle de la condensation d'une liste de nombres indéfiniment ouverte en *une lettre*. Les tâches du tableau 1 (Figure 1) sur la désignation fonctionnelle, qui avaient été élaborées au départ pour Jonathan puis pour des élèves de la 5ème à la 3ème, impliquent les deux opérations (« *Une lettre ?* » « *Et alors quoi écrire ici en utilisant la même lettre ?* »).

2. — Les quatre étapes dans l'appropriation des démarches de mise en équation des données d'un problème

La démarche didactique classique part d'un problème ou d'une sélection de problèmes pour guider les élèves dans la mise en équation de données présentées dans l'énoncé. Nous, au contraire, avons cherché à leur faire comprendre comment on peut fabriquer n'importe quelle situation de problème, donnée en classe à l'Ecole primaire et au Collège, qu'une formule de calcul permet de résoudre (Duval, 2017, pp.91-92, figures 4.10 et 4.11). Dans cette classe de 3ème, le but était de faire prendre conscience du lien complexe entre la formulation des énoncés de problèmes et l'écriture symbolique de l'équation qui va permettre de le résoudre. En effet, le premier obstacle majeur dans l'apprentissage de l'algèbre élémentaire est *la distance cognitive entre l'énoncé d'un problème en langue naturelle et l'écriture symbolique de l'équation*. Cette distance résulte de deux différences tenant à la spécificité de chacun de ces deux registres. D'une part tout ce qui est dit dans un énoncé en langue naturelle *n'est pas pertinent pour écrire une équation*, et inversement une équation donne lieu à autant de problèmes différents que de situations dans lesquelles elle peut être utilisée. D'autre part, les opérations de désignation des nombres et des grandeurs, ainsi que celles de leurs relations, ne sont pas les mêmes dans chacun de ces deux registres. On a pu voir ce premier obstacle chez Jonathan quand il était face au problème du bouchon et de la bouteille.

Les tâches que nous avons proposées visent la prise de conscience de ces deux différences. Mais comme on peut partir de la langue naturelle ou de l'écriture symbolique d'une équation ou d'une formule, il a fallu élaborer des tâches dans les deux sens des conversions pour chacune des deux différences. Pour pouvoir parler de compréhension et d'acquisition, il faut que les élèves réussissent ces tâches *rapidement et dans les deux sens de la conversion*.

L'expérience a été faite au cours de huit séances, de fin novembre 2022 à fin janvier 2023, avec les 28 élèves de la classe de 3*ème* conduite par Sophie Bauerle. Elle a alterné des phases de diagnostic de 10 à 15 minutes, dans lesquelles elle n'intervenait pas, avec des séances plus longues de 35 à 45 minutes de travail individuel où les élèves pouvaient néanmoins interagir, entre eux et avec elle. A la fin de chaque séance, nous nous concertions pour analyser les réactions et les productions des élèves. Comme nous allons le voir, le déroulement de chaque séance nous a réservé son lot de surprises et nous a fait rebondir pour élaborer et organiser chaque fois l'activité de la séance suivante.

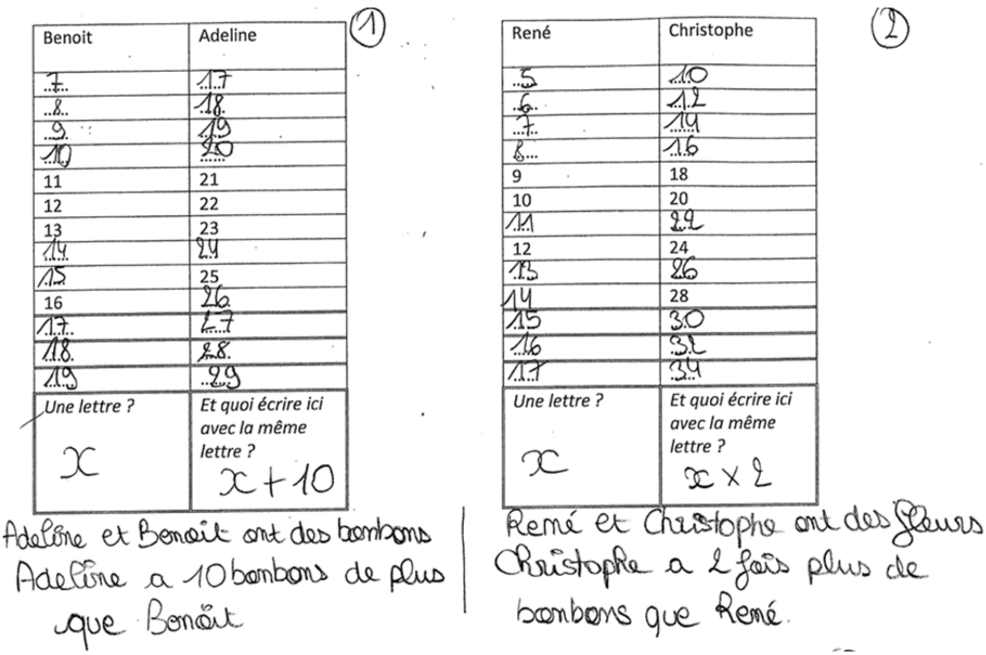
2. 0 - Les Démarches de résolution constatées mi-novembre

Tout d'abord une évaluation portant sur trois énoncés a priori assez simples devait nous renseigner sur ce qu'il en était des démarches entreprises spontanément par les

élèves au départ du parcours (Annexe 1). Les énoncés choisis ont été ceux utilisés dans une étude de Luis Radford (2002), parce que leur résolution nécessite de choisir une lettre pour désigner un nombre ou une grandeur en fonction d'une autre. Il s'agit donc de procéder à *une opération de redésignation* de ce qui a déjà été désigné ou décrit avec les mots de la langue naturelle dans l'énoncé du problème (Duval et Pluvinage pp. 140-143).
Les élèves ayant déjà eu une initiation à l'utilisation d'équations en 4ème, comme cela est préconisé par les programmes, nous imaginions qu'il y aurait un nombre non négligeable de réponses les utilisant. Mais le constat fut net : seulement deux élèves ont entrepris une mise en équation d'un énoncé. La majorité entreprenait des démarches de calcul, avec une certaine réussite pour l'énoncé 1, mais des échecs massifs pour les énoncés 2 et 3. Les nombres de réussites dans leurs démarches dépendaient en effet des expressions françaises qui désignaient les relations entre grandeurs (« *de plus que* », « *de moins que* », etc.) et le point d'ancrage de ces comparaisons. Quelques élèves essayaient de schématiser les situations présentées et d'autres se lançaient dans des essais par tâtonnements. Parfois apparaissaient plusieurs lettres différentes uniquement pour désigner des grandeurs données ou recherchées. Ces lettres correspondaient aux initiales de prénoms évoqués dans les énoncés. Mais ces démarches restaient stériles. Il est à remarquer que ce constat n'était pas propre à cette classe : le même test proposé dans d'autres classes de différents niveaux en fin d'année (4ème, 3ème, et aussi en seconde) a mené aux mêmes constatations. Force était de constater le gap qui séparait dans cette classes les deux élèves qui utilisaient l'algèbre et les autres qui ne l'envisageaient pas. En cohérence avec notre projet, nous ne sommes pas entrés avec les élèves dans une analyse plus détaillée de leur tentative de démarche. L'enseignante a simplement fait état avec eux de ce constat d'échec dans la résolution des problèmes. Et elle a annoncé qu'elle n'allait pas expliquer ou aider à trouver comment résoudre ces problèmes, mais leur proposer des activités qui leur permettraient d'abord de comprendre comment on peut fabriquer de tels énoncés de problèmes. Il s'agissait en effet de marquer qu'on allait faire *un travail en rupture avec les démarches arithmétiques* qui leur étaient familières. Mais les mots « *équation* » ou « *mise en équation* » n'ont jamais été proposés par l'enseignante à ce moment inaugural d'un processus qui a comporté 4 étapes principales que nous allons décrire.

2. 1 - Première étape : faire comprendre comment on fabrique un énoncé de problème à résoudre

Grâce aux tableaux mettant en parallèle des listes corrélées de nombres, les élèves de cette classe de troisième avaient pris conscience en début d'année des opérations de condensation et de désignation fonctionnelle. Nous nous sommes appuyés sur cet acquis et sur cette activité pour proposer une tâche permettant de construire des énoncés de problèmes. Nous sommes partis des tableaux qui mettent en regard deux *listes corrélées de nombres entiers*. La première séance a duré 45 minutes et a comporté deux phases.
Dans la première phase, les élèves avaient d'abord à compléter la partie numérique et la partie littérale de quatre tableaux de couples de listes ouvertes de nombres. Il était ensuite demandé *d'inventer, pour chacun des tableaux, un « morceau d'énoncé » qui pourrait être associé aux quatre désignations fonctionnelles respectives*. Le choix du contexte dans lequel ils situeraient ces expressions en langue naturelle était de leur ressort. Mais un début de contextualisation était néanmoins amorcé par des prénoms indiqués respectivement en tête de chaque colonne et les élèves se souvenaient bien sûr des énoncés de problèmes rencontrés lors du test initial.



1

Benoit	Adeline
7	17
8	18
9	19
10	20
11	21
12	22
13	23
14	24
15	25
16	26
17	27
18	28
19	29
Une lettre ? x	Et quoi écrire ici avec la même lettre ? $x+10$

Adeline et Benoit ont des bonbons Adeline a 10 bonbons de plus que Benoit

2

René	Christophe
5	10
6	12
7	14
8	16
9	18
10	20
11	22
12	24
13	26
14	28
15	30
16	32
17	34
Une lettre ? x	Et quoi écrire ici avec la même lettre ? $x \times 2$

René et Christophe ont des fleurs Christophe a 2 fois plus de bonbons que René.

FIGURE 2– Exemple de fiches remplies par une élève

Les tableaux n'étaient évidemment pas donnés remplis. Chaque élève devait préalablement compléter la partie numérique et la partie littérale des tableaux. Cela facilitait la transition vers la formulation d'un bout d'énonce des données du problème à inventer. Nonobstant quelques maladresses de langage, tous les élèves ont trouvé aisément des expressions correspondant bien aux désignations fonctionnelles trouvées apparaissant dans les tableaux qu'ils avaient remplis.

Par exemple :

« a + 10 » : « Adeline a (**10 de plus que**) Benoit. Des chewingums »

« Benoit a (**10**) maisons (**de moins qu'**) Adeline »

Tout comme dans les énoncés en annexe, nous avons ici mis en caractères gras et entre parenthèses les expressions incomplètes pertinentes pour convertir les phrases d'un énoncé en une égalité numérique. Tout le reste devant évoquer une situation concrète est inutile et même trompeur. Il faut reconnaître tout de suite les expressions incomplètes pertinentes dans le registre de la langue, *sans les dissocier des nombres associés*, pour les convertir dans le registre des écriture symboliques. Et il faut oublier tout le reste, sinon on s'égare. Les ancrages dans l'énoncé renvoient à la désignation par une lettre, cette désignation pouvant ou non être fonctionnelle selon les énoncés (Annexes 1-5).

Dans une deuxième phase, à partir des « *morceaux d'énoncés* » en français que les élèves venaient de produire, il leur a été demandé d'en choisir un et de le compléter afin d'obtenir « *un énoncé complet de problème qui pourrait être donné à d'autres élèves* ».

Plusieurs élèves ont écrit des énoncés complets susceptibles d'être mis en équation comme :

« *René et Christophe jouent au golf. Christophe a le double de points par rapport à René. A eux deux, ils ont 48 points. Combien de points ont-ils chacun ?* »

Mais il y avait aussi des énoncés sans question comme :

« *Benoit et Adeline ont 38 billes en tout. Benoit en a 10 de moins qu'Adeline* »

Et surtout il y avait beaucoup d'énoncés qui ne permettaient pas de retrouver la donnée manquante :

« *René et Christophe ont des fleurs. Christophe a 2 fois plus de fleurs que René. Combien de fleurs a chaque enfant ?* »

Ces productions révèlent comment beaucoup d'élèves lisent et comprennent des énoncés de problèmes. L'urgence didactique était alors de leur faire prendre conscience des conditions nécessaires pour que ces problèmes soient résolubles. *Une comparaison des énoncés de problème écrits par les élèves* s'est donc imposée. Pour cela nous leur avons proposé de comparer cinq de leurs textes en leur demandant de repérer ceux qui étaient complets et les manques des autres textes (Annexe 2). Cette activité de comparaison d'énoncés ne relève pas de pratiques habituelles mais est essentielle pour prendre conscience des conditions qui en font des énoncés complets. Elle été effectuée sans difficulté par les élèves qui ont tous bien analysé les cinq énoncés. Cela n'a pris qu'à peine 15 minutes.

Les élèves avaient donc jusque-là, successivement :

- écrit des morceaux d'énoncés à partir de désignations fonctionnelles en utilisant des expressions comme « *de plus que* » « *de moins que* » etc., devant être associées à un nombre,
- écrit des énoncés intégrant ces morceaux d'énoncés
- analysé ces énoncés pour repérer les conditions qui en font des énoncés complets

Toutes ces tâches avaient été proposées dans le but de faire comprendre comment est fabriqué un problème à résoudre par l'algèbre. Pour continuer nous sommes assurés que les élèves pouvaient reconnaître *les morceaux d'énoncés nécessaires* pour écrire une équation.

2. 2 - Deuxième étape : s'approprier le puzzle de l'écriture des symboles dans l'écriture d'une équation

L'écriture symbolique d'une égalité ou d'une équation *articule quatre types de signes*, sur des niveaux d'organisation syntaxique différents : des chiffres, des lettres, un ou plusieurs des quatre symboles opératoires (« +, –, ×, / »), et le symbole relationnel « = ». Ces quatre types de signes sont comme les pièces d'un puzzle. Il faut les reconnaître et les assembler *à partir des morceaux d'énoncés* que l'on distingue dans un énoncé pour pouvoir mettre en équation les données d'un problème.

On a donc demandé aux élèves de convertir chacun des énoncés complets repérés précédemment « *par une égalité* », en utilisant uniquement « *une lettre, des nombres, des signes opératoires et le symbole* = ». On leur avait proposé un espace destiné à faire des essais ou des recherches. Et pour qu'ils se sentent à l'aise, l'enseignante leur avait dit que s'ils ne trouvaient pas, cela n'avait pas d'importance, car la question serait reprise plus tard. De notre côté, on ne savait pas jusqu'où les élèves réussiraient déjà ce premier essai de mise en équation d'énoncés.

Avant que les élèves ne commencent cette activité de puzzle, l'enseignante avait attiré l'attention sur le symbole « = » par un échange avec les élèves. « *Qu'est-ce qu'une égalité ?* ». Plusieurs élèves ayant répondu « *Deux choses pareilles* », l'enseignante a précisé « *Oui avec le symbole* = » et elle écrit au tableau « …….=……. ». Puis l'échange s'est poursuivi pour souligner les autres éléments utilisables dans ce résumé : signes d'opération, nombres, une seule lettre mais qu'on a le droit d'écrire

plusieurs fois.
Précisons aussi que les élèves avaient encore sous leurs yeux les tableaux rencontrés dans la séance précédente pour condenser des listes corrélées de nombres et fabriquer des bouts d'énoncés :

Benoit	Adeline
......	......
......	......
......	......
......	......
......	......
Une lettre : ***a***	*Et quoi écrire ici avec la même lettre ?* ***a+10***

René	Christophe
......	......
......	......
......	......
......	......
......	......
Une lettre : ***b***	*Et quoi écrire ici avec la même lettre ?* ***2b***

FIGURE 3– Activité de conversion rappelée lors l'écriture d'une équation

La possibilité de se référer à ces tableaux a permis par la suite à plusieurs élèves de déclencher une prise de conscience du rôle primordial de la désignation fonctionnelle pour mettre en équation les données d'un problème. Les élèves avaient donc à convertir les deux énoncés complets (énoncés 1 et 5 de l'annexe 2). Après la présentation de la tâche, le travail proprement dit a duré environ 20 minutes.
Un seul élève a d'emblée écrit les deux équations correctes. De nombreux élèves ont proposé rapidement des égalités qui tenaient compte incomplètement des composantes du premier énoncé (Pour rappel : « *Paul et Jean ont 24 bonbons à eux deux. Jean en a 10 de plus que Paul. Combien Paul a-t-il de bonbons ?* »). La réponse la plus fréquente a été « *24 = a + 10* ». Quelques élèves sont restés en attente.
La question de la gestion de la classe s'est alors posée à nouveau comme elle s'était déjà posée lors de l'activité des listes ouvertes de nombres. Comment faire pour que chaque élève puisse faire lui-même les choix demandés ? Comme il n'était pas question de donner des explications en s'adressant à la classe entière, l'enseignante passait voir chaque élève et lui posait des questions sur les choix qu'il avait faits. Par exemple, pour ce problème (énoncé 1 de l'annexe 2) l'enseignante a posé trois questions sur ce qu'un élève venait d'écrire :
- En : « *Peux-tu m'expliquer en quoi ton égalité résume l'énoncé de problème ?* »
- E : « *Le 24 c'est parce qu'ils ont 24 bonbons en tout et le a+10 c'est parce qu'il en a 10 de plus.* »
- En : « *Donc il y a combien de personnes qui possèdent des bonbons ?* »
- E : « *Deux personnes.* »
- En : « *Je suis d'accord, et dans ton égalité les 2 personnes sont bien représentées ?* »

Les élèves rectifiaient alors immédiatement d'eux-mêmes leur égalité initiale avec un sourire de satisfaction qui ne sollicitait plus aucune explication. Et avec les élèves qui étaient bloqués pour démarrer, elle leur faisait formuler « *avec leurs mots* » les informations de l'énoncé et leur demandait ensuite « *Comment on peut les traduire par une égalité en utilisant ce qu'on a fait avec les tableaux ?* » (Figure 3). Cette référence suffisait pour débloquer le travail de mise en équation.
Ces prises de conscience se sont ensuite confir-

mées par le fait que ces élèves reprenaient correctement, sans hésitation et sans explications nécessaires le même travail sur le deuxième énoncé. Mais cela n'a pas été possible avec tous les élèves. Au bout de 20 minutes — c'était l'heure de la fin du cours — 14 élèves sur 27 avaient mis en équation les deux énoncés.

L'intérêt cognitif de cette activité d'assemblage de chacun des quatre types de signes avec des expressions pertinentes d'un énoncé de problème était de préparer les élèves à *fabriquer eux-mêmes un problème*.

Lors de la séance suivante, nous avons demandé de fabriquer un problème, à partir d'un corpus regroupant toutes les expressions importantes que l'on retrouve dans les énoncés de problèmes : « d*e moins que…, de plus que…, le double de…, le triple de…, la moitié de… etc*» et aussi « *en tout… , au total…, etc* ».

Pour réaliser cette tâche, il était suggéré la possibilité de distinguer deux moments de travail, le premier de réflexion préalable afin de noter les différents éléments qui pourraient être mis dans cet énoncé, le deuxième consistant à rédiger l'énoncé.

Cette activité a pris une quinzaine de minutes. Deux tiers des élèves ont écrit des énoncés complets intégrant des expressions du corpus et pouvant se résoudre par une mise en équation. Certains de ces élèves se sont saisis de la possibilité de faire un écrit préparatoire. Voici l'exemple le plus explicite de *schématisation qui a permis à une élève de fabriquer un énoncé de problème* :

Dans le schéma préparatoire élaboré par cette élève, on repère la mise en regard de trois niveaux qui constituent ensuite l'énoncé rédigé. Chaque niveau correspondant à un choix :

- *le choix de la situation choisie* : des surligneurs, et des prénoms d'élèves.
- *le choix des désignations fonctionnelles* en regard des trois prénoms à l'aide d'une lettre. Elles se traduiront dans l'énoncé par l'utilisation des syntagmes de comparaisons choisis
- *le choix des valeurs numériques* qui constituent la description complète de la situation : trois nombres réunis par une accolade indiquant leur total. *L'accolade qui part du nombre 52 et réunit sur deux lignes parallèles les nombres 16, 4 et 32 en correspondance avec des désignations fonctionnelles utilisant la lettre* « *x* » représente bien l'équation qui permettra par la suite de résoudre le problème élaboré.

Des traces d'effaceurs, de réécritures tant au niveau du brouillon qu'au niveau de l'énoncé témoignent d'une recherche de données numériques compatibles. En début d'année lors du test initiale cette élève n'avait pas entrepris de démarche algébrique pour résoudre les problèmes du test initial. Sa production exceptionnelle montrait qu'à ce stade de notre parcours elle avait pris conscience de l'ensemble des opérations sémio-cognitives qui permettent de fabriquer les types de problèmes rencontrés jusque-là. Mais cette clairvoyance n'était pas encore repérable chez tous. Ce sont alors les épisodes suivants qui ont permis de poursuivre le travail de prises de conscience visées.

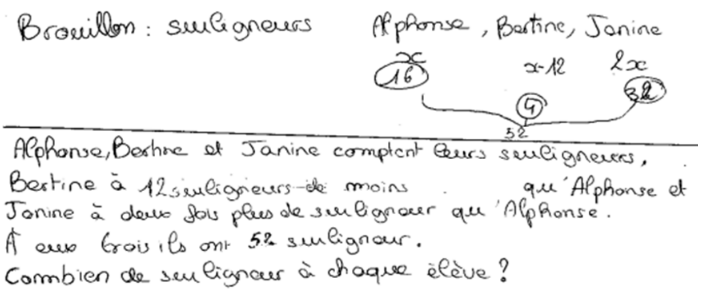

Brouillon : surligneurs   Alphonse, Bertine, Janine
x   x-12   2x
16   4   32
52
Alphonse, Berthne et Janine comptent leurs surligneurs,
Bertine à 12 surligneurs ~~de~~ moins qu'Alphonse et
Janine à deux fois plus de surligneur qu'Alphonse.
A eux trois ils ont 52 surligneur.
Combien de surligneur à chaque élève ?

FIGURE 4– Elaboration d'un énoncé par une élève

2. 3 - Troisième étape : passer d'un énoncé en langue naturelle à l'écriture de l'équation

Après avoir compris le rôle primordial de la désignation fonctionnelle pour mettre en équation, les élèves devaient également prendre conscience que *c'est la désignation d'une même quantité de deux manières différentes* à l'aide de nombres, signes opératoires et d'une lettre qui permet d'établir les équations. Pour cela, nous sommes partis d'énoncés que les élèves avaient produit eux-mêmes précédemment. Le but était toujours de convertir chaque énoncé par une égalité comportant des nombres, une lettre, et des signes opératoires. Un tableau vide a été distribué aux élèves. L'une des colonnes était plus large que l'autre, et la ligne du dessus, plus grande que les autres, devait être utilisée comme marge horizontale. L'avantage d'un tel tableau est de *mettre visuellement en parallèle les phrases d'un énoncé et les différents termes d'une équation.*

FIGURE 5– Les expressions pertinentes de l'énoncé et les termes correpondant de l'équation

Pour introduire l'activité, deux questions ont été posées : « *Que pourrait-on mettre comme titre à chacune de ces deux colonnes ?* » et « *Que pourrait-on mettre dans les lignes ?* ». Les élèves ont rapidement compris que la colonne de gauche était plus adaptée pour y placer des mots et des phrases et que celle de droite accueillerait les expressions algébriques. Pour la colonne de gauche, il y a eu des propositions de titres variées : « *phrases* », « *morceaux d'énoncés* », « *problème* », etc. et pour la colonne de droite « *calculs* », « *résultat* », « *résolution* » et même « *expressions littérales* ». Le mot « *équation* » a été évoqué spontanément par certains élèves. Et la suggestion d'une élève, « *il faut décortiquer l'énoncé et trouver pour chaque phrase ce qui correspond* », soulignée par le professeur, a permis à certains qui hésitaient encore de se lancer.
Progressivement, parfois en usant de l'effaceur ou de ratures, les élèves complétaient que leurs tableaux, les uns plus rapidement que les autres. L'ordre de la prise en compte des éléments de l'énoncé pour mettre en regard les expressions littérales variaient d'un élève à l'autre, ce qui traduisait bien la démarche personnelle de chaque élève. A la fin de cette

Enoncé : *Benoit et Adeline reçoivent de l'argent. Au total, ils ont 40 euros. Benoit reçoit 10 euros de moins qu'Adeline. Combien d'argent ont-ils chacun ?*

Problème	Résultat/Résolution
40 € total	= 40
Adeline (argent)	a
Benoit -10- Adeline	a - 10
Combien d'argent ont-ils chacun ?	a+a - 10 = 40

FIGURE 6– Production d'une élève pour un premier problème

Enoncé : *Lors d'un jeu de cartes, Séverine a gagné trois fois plus de parties que Daniel. Ils ont joué 32 parties. Combien chacun des deux enfants a-t-il gagné de parties ?*

morceau de l'énoncé	expression littérale
nombre de parties	32
Séverine	3x
Daniel	x

Egalité qui résume l'énoncé :

$32 = 3x + x$

$32 = 4x$

$8 = x$

FIGURE 7– Production de la même élève pour un autre problème

séance qui a duré 35 minutes, les élèves dans leur ensemble avaient mis en œuvre les opérations sémio-cognitives pour transformer les énoncés en équation. Cet épisode a donc été décisif. Les figures 6 et 7 montrent deux productions d'une même élève. Mi-novembre cette élève avait sans succès essayé de résoudre les problèmes avec des schémas comportant des flèches.Notons que pour le deuxième problème (Figure 7), elle a très spontanément procédé à la résolution de l'équation.

2. 4 - Quatrième étape : passer d'une équation à la fabrication d'un des multiples énoncés de problème possibles en langue naturelle

Pour consolider leurs progrès, nous avons proposé aux élèves de refaire en sens inverse ce qu'ils venaient de faire, c'est-à-dire en partant d'une équation de rédiger un énoncé de problème dont l'équation donnerait la solution.

Pour cela il avait été suggéré aux élèves de s'aider à nouveau de tableaux vides à deux colonnes. Cela pour leur permettre de commencer par choisir les termes de l'équation. Les titres des deux colonnes étaient rappelés dans la

Equation 1 : $x + (x - 1) + 2x = 95$

Nombres, lettres, signes opératoires	Mots, (prénoms, objets...) et phrases
Total d'argent	A + B + C = 95
A	x
A a 5 de plus que B	x - 5
C a le double de A	2x

Enoncé : Antoine a 5€ de plus que Bernard, Cedric a le double d'Antoine, ensemble ils ont 95€. Combien d'argent a Antoine ?

Equation 2 : $a + (a + 2) + 3(a + 2) = 108$

Nombres, lettres, signes opératoires	Mots, (prénoms, objets...) et phrases
Total de points	108.
D	a
E	(a+2)
F	3(a+2)

Enoncé : Dimitri a 2 points de moins que Elise, Ferdinand a le triple d'Elise, ensemble ils ont 108 points Combien de points a Dimitri.

FIGURE 8– Elaboration d'énoncés à partir d'équations

marge horizontale.
Au bout de 15 minutes l'ensemble des élèves avaient effectué la tâche sans hésitation et sans besoin d'explications. Sans erreurs pour la première équation mais parfois avec quelques confusions pour la deuxième.
La figure 8 montre les productions réussies d'un élève. On peut voir qu'il a effectué sa recherche, en ne tenant pas compte des titres des colonnes qui ne lui étaient finalement pas nécessaires. Dans les expériences faites cette année en 2024, ce sont des colonnes sans titre qui ont été données.

Au cours de ces séances, nous avons ainsi pu suivre l'appropriation personnelle de toutes les opérations sémio-cognitives qui font la complexité de la mise en équation des données d'un problème.

3. — Deux évaluations

Pour vérifier le caractère rapide et sûr de la reconnaissance des opérations sémio-cognitives à effectuer dans la mise en équation des données d'un problème, et donc l'irréversibilité des prises de conscience faites par les élèves, deux évaluations ont été faites à trois mois d'intervalle.

3. 1 - L'évaluation fin janvier : le seuil décisif franchi par la majorité des élèves de la classe

Après cette quatrième étape nous avons estimé que le moment était venu de proposer aux élèves trois énoncés similaires à ceux du test diagnostique de la mi-novembre. Comme au test initial, nous avons effectué deux variations sur les énoncés 1 et 2 : une sur les expressions informatives et l'autre sur les ancrages (annexe 3). L'énoncé 3 était semblable au problème des poids du bouchon et de la bouteille qui nous avait permis de repérer l'obstacle que constituait l'incompréhension de l'utilisation des lettres pour Jonathan. La consigne était d'écrire l'équation du problème puis de la résoudre. Il était indiqué qu'ils pouvaient utiliser des tableaux ou un brouillon.
Le temps mis par les élèves pour effectuer la tâche a été plus ou moins long d'un élève à l'autre. Certains ont rendu leurs feuilles très rapidement et d'autres ont eu besoin d'un peu plus de 10 minutes. Néanmoins quatre élèves, souvent absents et au bord de la déscolarisation ou en grande difficulté, n'ont rien répondu ou ont à peine amorcé une démarche algébrique en s'arrêtant à l'écriture de désignations fonctionnelles.
Voici les résultats pour les trois problèmes (avec 24 élèves présents) :

	Equation correcte	Résolution correcte de l'équation
Enoncé 1	20/24	15/24
Enoncé 2	17/24	13/24
Enoncé 3	19/24	15/24

FIGURE 9– Premier bilan fin janvier

Le tableau montre que les élèves ont spontanément enchainé la mise en en équation des données des énoncés avec le calcul purement « formel » pour résoudre l'équation, résolution qui n'a pas toujours été réussie.
Voici un exemple de production réussi pour l'énoncé 3 (Annexe 3) :

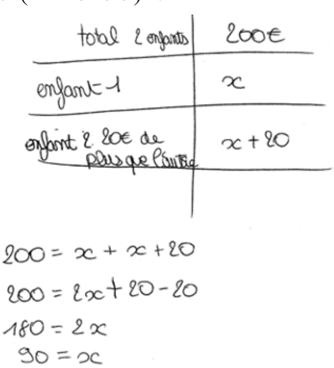


FIGURE 10– Production d'un élève pour un problème fin janvier

Certains élèves ont spontanément pris des initiatives qui montrent leur appropriation des gestes élémentaires du travail de recherche pour résoudre un problème :

- Annoncer ce que désignait la lettre choisie pour la désignation fonctionnelle.
- Contrôler les réponses en revenant aux données de l'énoncé. Des élèves ont à cette occasion découvert une erreur dans la résolution de l'équation qu'ils venaient d'écrire.
- Interpréter le résultat de la résolution de l'équation par rapport à la question posée : « Marie a 12 ans etc.. ».

Au cours des différentes étapes du cheminement que nous leur avons fait suivre, aucune méthode à appliquer ne leur avait été donnée. Ils ont progressivement pris conscience de la démarche de mise en équations de données d'un problème pour le résoudre. Et c'est seulement après coup qu'une synthèse collective avec l'enseignante leur a permis de lister tous les éléments que doit comporter la rédaction de la solution d'un problème.
Après ce test d'évaluation fin janvier, nous n'avons plus proposé d'activités consacrées spécifiquement à la prise de conscience des opérations sémio-cognitives en jeu dans la résolution algébrique de problèmes. Néanmoins en mars nous avons proposé à la classe la résolution de deux problèmes (annexe 4) qui présentaient des aspects nouveaux. Le premier avec une grandeur non discrète, à savoir des comparaisons de longueurs. La grande majorité des élèves a mis en équation et résolu le premier problème très rapidement. Le deuxième énoncé nécessitait de discriminer deux grandeurs hétérogènes en jeu (« nombres de tonneaux, capacité des tonneaux »). C'était là une difficulté nouvelle qui a parfois entraîné quelques confusions entre les désignations des grandeurs de dimensions différentes. Une synthèse collective a permis de repérer et corriger ces erreurs.

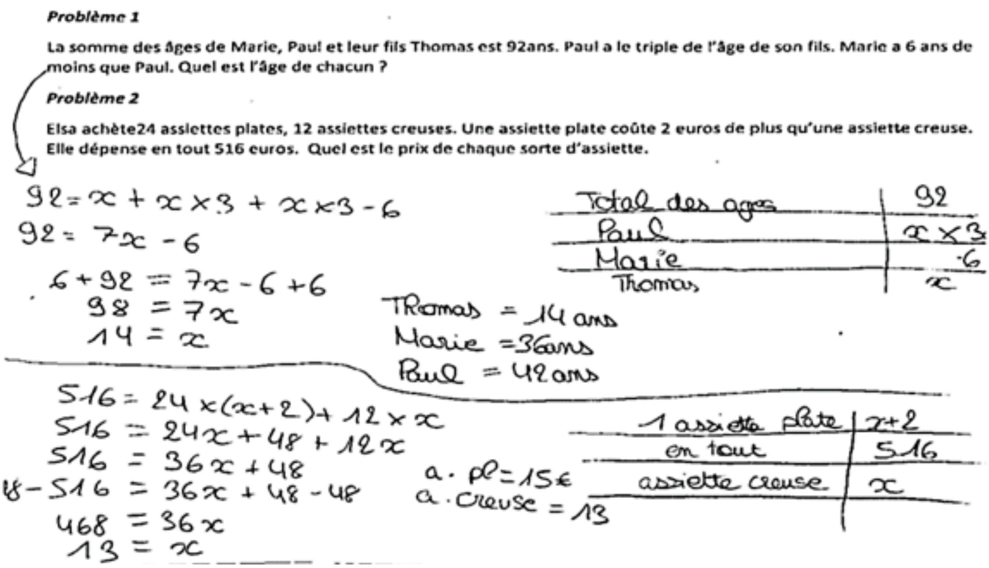
3. 2 - L'évaluation début mai : des élèves sans problème pour commencer à faire de l'algèbre élémentaire

Les deux énoncés présentés début mai (annexe 5) étaient comparables à ceux présentés en mars. Voici les résultats pour les deux problèmes (avec 26 élèves présents) :

	Equation correcte	Résolution correcte de l'équation
Enoncé 1	25/26	20/26
Enoncé 2	21/26	16/26

FIGURE 11– Deuxième bilan début mai

La majorité des élèves a entrepris une démarche algébrique avec succès. Rien de comparable avec ce que nous avons constaté en fin d'année dans une classe de seconde pour des énoncés semblables où quasiment aucune démarche algébrique n'apparaissait. Les quelques échecs que nous avons constatés néanmoins provenaient, pour l'énoncé 1, d'un choix de l'inconnue qui selon le cas aboutissait à une équation comportant des coefficients fractionnaires ou pas (3x ou 1/3x), et pour l'énoncé 2, à des confusions entre les deux grandeurs hétérogènes (nombres et prix des assiettes). Voici par exemple la production de cette élève qui mi-novembre était incapable de résoudre les problèmes du test diagnostic :
Et, en fin d'année, nous avons pu constater la facilité de beaucoup de ces élèves *pour résoudre des problèmes en géométrie en utilisant des formules* (voir la figure 13).
De même, lors d'une séance où l'enseignante leur a soumis un problème de généralisation, (carrés bordés), les élèves ont d'eux même, rapidement et de façon pertinente, recouru à l'utilisation des écritures algébriques symboliques. Mais ce sont aussi des moments où leurs mines réjouies accompagnaient les prises de conscience qui témoignaient des avancées des élèves dont une en particulier s'est exclamée : « *C'est la première fois que je comprends quelque chose en maths !* ».


Problème 1

La somme des âges de Marie, Paul et leur fils Thomas est 92ans. Paul a le triple de l'âge de son fils. Marie a 6 ans de moins que Paul. Quel est l'âge de chacun ?

Problème 2

Elsa achète24 assiettes plates, 12 assiettes creuses. Une assiette plate coûte 2 euros de plus qu'une assiette creuse. Elle dépense en tout 516 euros. Quel est le prix de chaque sorte d'assiette.

$92 = x + x \times 3 + x \times 3 - 6$

$92 = 7x - 6$

$6 + 92 = 7x - 6 + 6$

$98 = 7x$

$14 = x$

Total des ages	92
Paul	$x \times 3$
Marie	-6
Thomas	x

Thomas = 14 ans

Marie = 36ans

Paul = 42 ans

$516 = 24 \times (x+2) + 12 \times x$

$516 = 24x + 48 + 12x$

$516 = 36x + 48$

$48 - 516 = 36x + 48 - 48$

$468 = 36x$

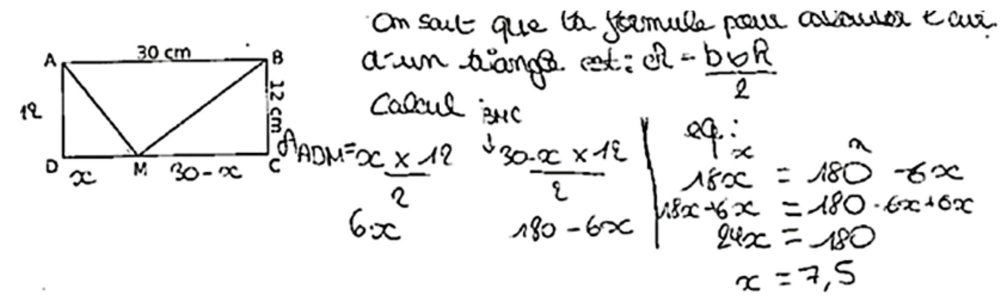
$13 = x$

a. pl = 15€

a. creuse = 13

1 assiette plate	$x+2$
en tout	516
assiette creuse	x

FIGURE 12– Résolution d'un problème avec des variables hétérogènes


Enoncé : *Où doit-on placer le point M sur le côté [DC] de ce rectangle pour que l'aire du triangle ADM soit le tiers de l'aire du triangle BCM ? Justifie.*

On sait que la formule pour calculer l'aire d'un triangle est : $\mathcal{A} = \frac{b \times h}{2}$

Calcul

$\mathcal{A}_{ADM} = \frac{x \times 12}{2}$

$6x$

BMC

$\frac{30 - x \times 12}{2}$

$180 - 6x$

éq. :

$18x = 180 - 6x$

$18x + 6x = 180 - 6x + 6x$

$24x = 180$

$x = 7,5$

FIGURE 13– Utilisation d'une formule en géométrie

Conclusion et perspectives

L'enjeu de notre expérimentation était double. D'une part, il s'agissait de savoir si les tâches qui avaient aidé Jonathan à comprendre la désignation fonctionnelle pouvaient être reprises avec succès dans des classes de 24 à 30 élèves, et quelles autres tâches proposer pour aller plus loin. D'autre part, il s'agissait de savoir si ces tâches qui doivent être faites individuellement et non en groupe, chaque élève travaillant à son propre rythme, étaient compatibles avec le respect des objectifs d'acquisition fixés par le programme.

En ce qui concerne la première question, non seulement les deux évaluations faites à trois mois d'intervalles, mais surtout les changements d'attitude des élèves vis-à-vis de l'activité mathématique nous ont convaincus que cette expérimentation devait être poursuivie. Et les expériences menées cette année (2023/2024) par d'autres membres du groupe IREM en 4ème, 3ème en collège et en seconde en lycée, qui se sont appuyées sur ce parcours ont conduit aux mêmes progressions. Pour la grande majorité des élèves, la conversion d'un énoncé de problème en équation n'est plus un obstacle. Elle se fait rapidement et de manière autonome.

Le plus important reste cependant à faire : la reconnaissance rapide des niveaux d'organisation syntaxiques différents dans les expressions numériques et littérales et dans l'écriture linéaire d'une équation à résoudre. La compréhension du déplacement de termes d'un membre à l'autre de l'équation, les opérations de simplification et le développement de l'écriture des équations linéaires, et la résolution des équations du second degré et la reconnaissance des identités remarquables présupposent cette reconnaissance rapide. Des activités sur la difficulté des écritures fractionnaires, qui apparaissent dans la question diagnostique « (4+6) / (4+1) = (2 ou 6 ?) », permettent de faire découvrir les niveaux d'organisation syntaxique.

En ce qui concerne la deuxième question, le temps consacré à ces activités spécifiques, de fin-novembre 2023 à fin-janvier 2024 a été assez minime par rapport au temps imparti pour l'acquisition des connaissances fixées dans le programme de l'année. Et dans les différents échanges que nous avons eus avec des enseignants (en particulier lors d'un atelier au colloque CORFEM, 2023 et aussi lors d'une présentation de ce travail dans le cadre de l'IREM de Strasbourg), ceux-ci se sont montrés sensibles à cet aspect pragmatique de notre expérience.

Mais une troisième question s'est imposée. Pour que les collègues puissent reprendre notre démarche dans leurs classes, il leur faut d'abord comprendre les variables cognitives qui ont guidé l'élaboration des tâches que nous avons proposées aux élèves. Faite en termes de registres de représentation sémiotique, ces variables cognitives portent sur les opérations sémio-cognitives qui permettent de convertir des énoncés en équations, et inversement. Même dans notre groupe IREM, composé de professeurs de collège, il a fallu un certain temps de tâtonnement et de remises en question pour comprendre que les activités à élaborer étaient spécifiques et se distinguaient des activités didactiques habituelles. Ainsi, de prime abord, les tâches visant la prise de conscience des opérations de désignation à partir d'un tableau à remplir sont souvent confondues avec des activités portant sur certaines notions mathématiques (fonctions, proportionnalité etc.), ou comme nous l'avons expliqué avec des activités de généralisation. Cette question est aussi apparue lorsque nous avons eu l'occasion de présenter notre travail à d'autres collègues, experts en didactique ou pas. Ici l'incompréhension vient de ce que dans notre approche la problématique des registres ne porte pas sur les contenus mathématiques indiqués par une progression décrite dans les programmes, ni sur des considérations cognitivistes indépendantes des disciplines enseignées. Elle se fonde sur le fait que les démarches de pensée,

de voir et dire en mathématiques sont épistémologiquement différentes des manières de penser, de voir et dire en dehors des mathématiques (Duval, 2017).
À la suite de ces questions, nous envisageons plusieurs perspectives de travail.
La première avec les enseignants est très concrète. Elle porte sur l'élaboration de tests de reconnaissance immédiate par les élèves des différentes opérations sémio-cognitives dont nous avons visé l'acquisition dans notre expérimentation. Un test de reconnaissance immédiate ne doit pas prendre plus de cinq minutes. Ainsi les collègues pourront vérifier par eux-mêmes si tout le parcours que nous avons présenté est nécessaire pour leurs élèves. Et là, nous sommes aux antipodes des procédures d'évaluation mises en œuvre dans les enquêtes nationales ou internationales, et dans des recherches en didactique.
La deuxième concerne le calcul purement formel pour résoudre les équations linéaires et celles du second degré (Duval et Pluvinage, 2016). C'est un cheminement à tracer dans le prolongement de celui que nous nous venons de décrire pour les élèves de troisième.
La troisième vient de notre volonté explicite de faire prendre conscience aux élèves de la manière de penser et de voir propre à l'activité mathématique. Plusieurs expérimentations faites en classes pour la géométrie élémentaire ont montré que beaucoup d'élèves, même parmi ceux qui étaient considérés comme « *faibles* », s'appropriaient très vite la manière de « faire des mathématiques ». Nous l'avions constaté dans le domaine de la géométrie en 6ème (Rauscher, 1993). Les professeurs dont les classes hétérogènes progressaient le mieux prenaient sciemment en considération les *questions de désignations et de visualisations des objets en géométrie*. Pour ces professeurs, le fait de proposer un large éventail de conversions et de traitements de registres allait de pair avec des analyses d'items, de tests ou de productions d'élèves riches en précisions relatives à ces questions. Nous avons rappelé et résumé les résultats de cette recherche dans un texte « *Des groupes de niveaux en mathématiques au collège : où est le problème ?* » (Rauscher, 2024). D'où dans le cadre de notre travail consacré à l'algèbre au collège, une question qui ouvre une dernière perspective de travail : une expérimentation sur l'introduction de l'algèbre élémentaire au collège ne pourrait-elle pas commencer en sixième et se poursuivre dans le même collège ? Est-ce que cela ne changerait pas le regard et l'attitude des élèves sur l'activité mathématique ?

Bibliographie

Coppé, S. Grugeon-Allys, B.; Pilet, J. (2016) Conditions pour diffuser des situations issues de la recherche en didactique : l'exemple du carré bordé. Dans Petit x. N° 102. p. 57-80.

Deledicq, A. (1979), *Faire des mathématiques*, 4ème. Paris ; Cedic

Duperret, J-C. Fenice J-C, (1999). L'accès au littéral et à l'algébrique : un enjeu du collège. *Repères IREM*, 34), 20-54.

Duval, R., (2002). L'apprentissage de l'algèbre et le problème cognitif de la désignation des objets. Drouhard J.-Ph., Maure M. (Eds.) *Actes du SFIDA IV*, 13- 16, IREM de Nice, 67-94.

Duval, R.,(2017). *Understanding the Mathematical Way of Thinking –The Registers of Semiotic Representations*. Springer Nature.

Duval, R., Pluvinage, F. (2016). Apprentissages algébriques. I. Points de vue sur l'algèbre élémentaire et son enseignement. *Annales de Didactique et de sciences cognitives*, 21,117-152.

Lacroix, S.F. (1820), *Eléments d'algèbre à l'usage de l'Ecole Centrale des Quatre-Nations.*

Treizième édition revue et corrigée. Paris : Madame Veuve Courcier

Radford, L. (2003). Narratives, expressions algébriques et calcul formel, *Annales de didactique et sciences cognitives 8*, 191-208, IREM de Strasbourg.

Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, 26, 257-277.

Rauscher, J.-C. (1993) *L'hétérogénéité des professeurs face à des élèves hétérogènes : le cas de l'enseignant de la géométrie au début du Collège*. Thèse en Sciences de l'Education, IREM de Strasbourg.

Rauscher, J.-C. (2020). Le cas Jonathan. Le complexe de l'algèbre. Dans Méariclès T. Moretti & Celia Finck Brandt (Orgs.) *Florilégio de pesquisas que envolvem a teoriasemio-cognitiva de aprendizagemmatemática* de Raymond Duval (p.456-485). (Revemat/UFSC, 2020-07-22). EducaçãoMatemática - RepositórioInstitucional da UFSC

Rauscher, J-C. (2024) Des groupes de niveaux en mathématiques au collège : où est le problème ? A paraître dans la revue de l'APMEP, Au fil des maths.

Rauscher, J-C., Bauerle-Schoenenberger, S. (2023). Enseigner l'algèbre élémentaire : de quel point de vue et quelles activités ?. Dans C. Derouet, A. Nechache, P.R. Richard, L. Vivier, I.M. Gómez-Chacón, A. Kuzniak, M. Maschietto& E. Montoya Delgadillo, *Actes du septième symposium d'Étude sur le Travail Mathématique*, 377-388. IREM de Strasbourg.

Rauscher, J-C., Bauerle, S. (2024). De la formulation d'un problème à sa résolution algébrique. A paraître dans les actes du colloque Corfem de Nantes (2023)

Vlassis, J., Demonty, I. & Squalli, H. (2017). Développer la pensée algébrique à travers une activité de généralisation basée sur des motifs (*patterns*) figuratifs. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation, 20*(3), 131–155. https://doi.org/10.7202/1055731ar

ANNEXES

Annexe 1 – Problèmes de l'évaluation initiale

Énoncé 1 :
Kelly a (**onze**) bonbons (**de plus que**) Manuel, José a (**quatorze**) bonbons (**de plus que**) Manuel. Les trois enfants ont (**ensemble 115**) bonbons. Combien chaque enfant a-t-il de bonbons ?

Énoncé 2 :
Kelly a (**32**) bonbons (**de moins que**) Manu, José a (**21**) bonbons (**de plus que**) Manu. Les trois enfants ont (**ensemble 160**) bonbons. Combien chaque enfant a-t-il de bonbons ?

Énoncé 3 :
Si l'on (**additionne**) les âges de Sabrina, d'Ursule et de leur fils Thierry, on (**obtient 89**). Sabrina a (**le triple de**) l'âge de son fils Thierry. Et Ursule a (**5**) ans (**de plus que**) Sabrina. Quel est l'âge de chacun ?

***Note** : nous avons ici mis en caractères gras et entre parenthèses les expressions incomplètes pertinentes pour convertir les phrases d'un énoncé en une égalité numérique. Il faut reconnaître les expressions incomplètes pertinentes dans le registre de la langue, sans les dissocier des nombres associés, pour les convertir dans le registre des écritures symboliques.*

Annexe 2 – 5 énoncés à comparer produits par les élèves

Énoncé 1 :
Benoit et Adeline ont (**24**) bonbons (**à eux deux**). Adeline en a (**10 de plus que**) Benoit. Combien Benoit a-t-il de bonbons ?

Énoncé 2 :
Adeline a (**10**) billes (**de plus que**) Benoit. Combien de billes a Adeline ?

Énoncé 3 : Benoit et Adeline ont (**38**) billes (**en tout**). Benoit en a (**10 de moins qu**)'Adeline

Énoncé 4 :
René et Christophe ont des fleurs. Christophe a (**2 fois plus de fleurs que**) René. Combien de fleurs a chaque enfant ?

Énoncé 5 :
René et Christophe jouent au golf. Christophe a (**le double de**) points par rapport à René. A (**eux deux**), ils ont (**48**) points. Combien de points ont-ils chacun ?

Annexe 3 – Problèmes de l'évaluation fin janvier

Énoncé 1 :
Pierre a (**le triple de**) l'âge de José, et Arthur a (**2**) ans (**de moins que**) José. Ensemble ils ont 98 ans. Quel est l'âge de chacun ?

Énoncé 2 :
(**La somme des**) âges de Marie, de sa mère et de sa grand-mère est (**120**) ans. La mère est (**3 fois plus**) âgée (**que**) Marie et la grand-mère a (**le double de**) l'âge de la mère. Quel est l'âge de chacune ?

Énoncé 3 :
Deux enfants ont (**ensemble 200)** €. L'un des deux enfants a (**20**) € **de plus que** l'autre. Combien a chaque enfant ?

Annexe 4 – Deux problèmes nouveaux en mars

Énoncé 1 :
Trois bâtons mis (**bout à bout**) mesurent (**2,5**) mètres.
Le deuxième bâton mesure (**0,3 m de plus que**) le premier.
Le troisième mesure (**0,2 m de moins que**) le deuxième.
Quelle est la longueur de chaque bâton ?

Énoncé 2 :
Un viticulteur dispose de deux modèles de tonneaux.
Le plus grand tonneau contient (**75**) litres (**de plus que**) le petit.
(**Avec 15 000**) litres de vin ce viticulteur remplit exactement (**50 grands**) tonneaux et (**25 petits**).
Calculer la capacité de chaque modèle de tonneau.

Annexe 5 – Problèmes de l'évaluation finale début mai

Énoncé 1 :
La somme des âges de Marie, Paul et leur fils Thomas est (**92**) ans. Paul a (**le triple de**) l'âge de son fils. Marie a (**6 ans de moins que**) Paul. Quel est l'âge de chacun ?

Énoncé 2 :
Elsa achète (**24**) assiettes (**plates**), (**12**) assiettes (**creuses**). Une assiette plate coûte (**2**) euros (**de plus qu'une**) assiette (**creuse**). Elle dépense (**en tout 516**) euros. Quel est le prix de chaque sorte d'assiette ?