
SUR LES RELATIONS HISTORIQUES ENTRE LES DEMONSTRATIONS MATHÉMATIQUES ET LA LOGIQUE

Évelyne BARBIN
IREM des Pays de la Loire
Université de Nantes

Ce texte reprend la conférence donnée à Nantes le 19 janvier 2024, suite à l'invitation des Commissions inter-IREM lycée et université de présenter une conférence historique lors de la Journée sur « Logique et raisonnement mathématique ». Il veut aborder deux questions : 1) quels rôles et quelles différences entre langages et symboles mathématiques et logiques ? ; 2) pourquoi et comment concevoir un enseignement du langage logique « en situation » ? À cet effet, nous analysons les relations historiques entre les démonstrations mathématiques et la logique jusqu'à la fin du 19^e siècle.

Nous avons choisi cinq périodes historiques importantes dans cette perspective : 1- L'Antiquité grecque avec les démonstrations d'Euclide et la logique d'Aristote ; 2- Le 17^e siècle avec la méthode de Descartes et la logique de Port-Royal ; 3- Les calculs analytiques et les graphismes de Leibniz ; 4- Le début du 19^e siècle avec les ouvrages de 1847 de Boole et De Morgan ; 5- La fin de ce siècle avec l'idéographie de Frege, les diagrammes de Venn et la table de vérité de Ladd. Pour chacun des auteurs, nous examinons ce que sont les « choses » ou les « termes » considérés, ainsi que les relations entre ces « choses » ou « termes », leurs représentations visuelles et leurs écritures. Nous retenons aussi les propos explicites des auteurs sur les relations entre mathématiques et logique et sur l'usage des symboles.

1. — La démonstration mathématique et la logique dans la Grèce antique

Les mathématiques grecques héritent des mathématiques égyptiennes et babyloniennes et elles commencent avec Thalès de Milet et Pythagore de Samos. Depuis Hippocrate de Chios, vers 460 av. J.-C., plusieurs « Éléments » de mathématiques ont été composés avant les seuls qui nous sont restés, *Les Éléments* d'Euclide au 3^e siècle avant J.-C. (Euclide, 1990, p.101-113).

Les choses et leurs relations dans les Éléments

Les « Éléments » portent sur deux choses : la figure et le nombre. Les figures sont à la fois des formes (segment, triangle, carré, etc) et des grandeurs (longueur, aire ou volume), les nombres (entiers) sont représentés par des segments.

Quatre types de relations entre figures ou entre nombres sont étudiés dans les « Éléments ».

La première relation est « l'égalité » : entre des figures lorsqu'elles sont superposables ou de même aire (par exemple pour le théorème de Pythagore) ou bien entre des nombres, représentée par l'égalité entre des segments. La deuxième relation est « le rapport » entre deux figures homogènes ou entre deux nombres. La troisième relation est « l'égalité entre deux rapports » (par exemple pour le théorème de Thalès). Ces trois relations permettent d'exprimer la perpendicularité et le parallélisme de deux droites par des relations entre grandeurs. La quatrième relation est la composition ou la décomposition de figures homogènes ou de segments représentant des nombres. Cette dernière relation est essentielle dans les démonstrations : par exemple, la proposition sur la somme des angles d'un triangle se démontre en décomposant l'angle extérieur d'un triangle en deux angles, tandis que le théorème de Pythagore se démontre en décomposant le carré construit sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle en deux rectangles (Fig. 1).

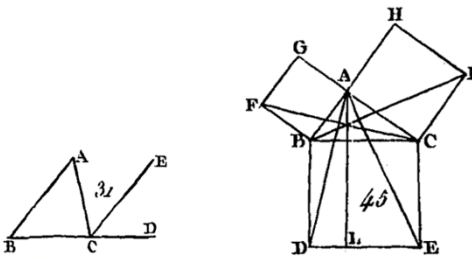


FIGURE 1– Composition et décomposition en géométrie (Peyrard, 1804, Planche 1)

L'irrationalité entre la diagonale et le côté d'un carré a pu jouer un rôle dans l'élaboration d'un premier texte démonstratif dans l'histoire. En effet, d'une part (Fig. 2), elle signifie qu'il n'existe pas de segment PQ qui puisse « mesurer » exactement CB et AB , c'est-à-dire $CB = n PQ$ et $AB = m PQ$ (en écriture moderne), alors qu'il semble toujours possible d'obtenir

un tel segment. D'autre part, elle contredit la doctrine pythagoricienne selon laquelle le nombre est une explication universelle. Affirmer l'irrationalité nécessitait de produire un discours qui ne puisse pas être contredit. D'après Proclus, ce serait un Pythagoricien qui l'aurait exhibé et il en aurait été jeté à la mer par ses condisciples. La première démonstration pourrait être la démonstration par l'absurde, par le pair et l'impair (Barbin, 1995).

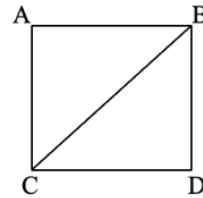


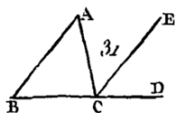
FIGURE 2– Le problème de l'irrationalité

Les treize Livres des *Éléments* d'Euclide portent sur la géométrie ou sur l'arithmétique. Le Livre I repose sur l'énoncé de cinq « demandes » (on « demande » de considérer un énoncé comme « axiome », par exemple l'axiome des parallèles) et de neuf « notions communes » (« communes » aux Livres géométriques et arithmétiques, par exemple sur l'égalité des choses). Le Livre I se présente comme une mise en ordre de propositions numérotées, chaque proposition étant la conséquence des demandes, des notions communes ou des propositions précédentes. Les propositions sont, soit des théorèmes, soit des problèmes (de constructions de figures à l'aide de cercles et de droites).

Une démonstration dans les *Éléments* est un discours s'appuyant sur une figure, qu'elle soit géométrique ou bien arithmétique. Lisons la démonstration 32 du Livre I sur la somme des angles d'un triangle. Elle s'appuie sur une figure (ci-dessous) dont les points et les segments sont désignés par des lettres, qui invitent le lecteur à suivre du regard la construc-

tion de la figure puis le raisonnement. Dans le texte, (prop.) et (n. c.) sont des abréviations pour les mots proposition et notion commune. Le discours est démonstratif, il est articulé par des « puisque » et des « donc », que nous avons mis en italiques (Euclide, 1990, p. 257) :

« En effet, que par le point C , soit menée CE parallèle à la droite AB (prop. 31).



Puisque AB est parallèle à CE et AC tombe sur elles, les angles alternes, ceux sous BAC , ACE sont égaux entre eux. Ensuite, AB est parallèle à CE et la droite BD tombe sur elles, *donc* l'angle extérieur, celui sous ECD , est égal à celui sous ABC , intérieur et opposé (prop. 29). Et il a aussi été démontré que celui sous ACE est égal à celui sous BAC . L'angle tout entier sous ACD est *donc* égal aux deux angles intérieurs et opposés, ceux sous BAC , ABC (n. c. 2). Que soit ajouté de part et d'autre celui sous ACB . Ceux sous ACD , ACB sont *donc* égaux aux trois sous ABC , BCA , CAB . Mais ceux sous ACD , ACB sont égaux à deux droits (prop. 13) ; *donc* ceux sous ABC , BCA , CAB sont aussi égaux à deux droits (n. c. 1). [...]. Ce qu'il fallait démontrer ».

Le discours démonstratif euclidien présente trois caractères : 1- Il comporte beaucoup de démonstrations par impossibilité, comme pour celle par le pair et l'impair ; 2- Il n'est pas fait usage de symboles numériques ; 3- Il n'indique pas de trace des recherches d'énoncés ou de démonstrations. Notons aussi que les *Éléments* d'Euclide servent de référence dans l'enseignement jusqu'au 19^e siècle dans un pays comme l'Angleterre, mais qu'ils sont critiqués et remplacés au 17^e siècle en France (Barbin & al., 2013).

La logique de l'Organon d'Aristote (4^e siècle av. J.-C.)

Aristote vit au 4^e siècle av. J.-C., il a été élève du philosophe Platon et il connaît, comme ce dernier, les mathématiques et la philosophie de son époque, ainsi que des ouvrages aujourd'hui perdus. Il a écrit six traités qui ont été regroupés et mis en ordre après sa mort sous le titre d'*Organon* (outil en grec). Il explique dans « Les seconds analytiques » que la science est la démonstration et que la démonstration est le syllogisme scientifique (Aristote, 1987, p. 8) :

« Mais ce que nous appelons ici savoir c'est connaître par le moyen de la démonstration. Par démonstration j'entends le syllogisme scientifique. [...] Il est nécessaire aussi que la science démonstrative parte de prémisses qui soient vraies, premières, immédiates, plus connues que la conclusion, antérieures à elle, et dont elles sont les causes ».

Puisqu'une science se développe à partir de ses propres prémisses (axiomes), Aristote énonce en général une « incommunicabilité des genres » : « on ne peut pas, dans la démonstration, passer d'un genre à un autre : on ne peut pas, par exemple, prouver une proposition géométrique par l'arithmétique » (Aristote, 1987, p. 44). Dans les *Éléments*, la géométrie et l'arithmétique n'ont pas les mêmes « demandes » (axiomes) et les Livres de géométrie (et leurs prémisses) sont donc bien séparés des Livres arithmétiques (et leurs prémisses).

Les prémisses et les syllogismes sont définis dans « Les premiers analytiques ». Aristote y explique que la « théorie du syllogisme », ce que nous appelons « la logique », dépend de la science démonstrative (Aristote, 1992, p. 1) :

« Il faut d'abord établir quel est le sujet de

notre enquête et de quelle discipline elle relève : son sujet c'est la démonstration, et c'est de la science démonstrative dont elle dépend ».

Par conséquent, pour que la théorie du syllogisme « dépende » de la science démonstrative, qui elle-même se définit par le syllogisme scientifique, il faut comprendre que la « science démonstrative » est celle qui s'exerce dans les sciences constituées. Parmi ces sciences, l'*Organon* se rapporte souvent à la géométrie et l'arithmétique, et il s'agit donc de savoir comment la théorie du syllogisme « dépend » de ces deux sciences.

Aristote poursuit : « Ensuite nous devons définir ce qu'on entend par prémisses, par terme, par syllogisme » (Aristote, 1992, p. 2). La « prémisses » de la théorie logique est définie comme le discours qui affirme ou qui nie « quelque chose » de « quelque chose » (Aristote, 1992, p. 2). Il classe les prémisses, selon que le discours est universel ou particulier, affirmatif ou négatif. Il y a donc quatre prémisses. La prémisses universelle affirmative se dit « tout A est B », la prémisses universelle négative « nul B n'est A », la prémisses particulière affirmative « quelque A est B », la prémisses particulière négative « quelque A n'est pas B ». La logique se présente ainsi par un discours qui s'écrit avec des lettres désignant des « termes ».

Le syllogisme est défini comme un discours où des propositions résultent nécessairement de propositions données : « le *syllogisme* est un discours dans lequel certaines choses étant posées, quelque chose d'autre que ces données en résulte nécessairement par le seul fait de ces données » (Aristote, 1992, p. 4-5).

Les syllogismes ont trois termes : le « majeur », le « moyen » et le « mineur ». La « première figure » des syllogismes est la « proposition

universelle affirmative », dont les trois termes sont affirmatifs (Aristote, 1992, p. 13) :

« Si A est affirmé de tout B et B de tout C , alors (nécessairement) A est affirmé de tout C »

Cette « figure » se présente comme un schéma, en ce sens qu'elle donne à voir les trois prémisses qui la composent et leur articulation conditionnelle « si ... alors ... ». Aristote obtient les autres figures des syllogismes en choisissant leurs trois termes parmi les quatre prémisses. La « théorie du syllogisme » est constitué donc d'un nombre fini de formes textuelles (les figures du syllogismes) portant sur des lettres et le discours conditionnel « si ... alors... ».

En quoi cette théorie dépend-t-elle des sciences constituées ? Après avoir ainsi exposé ce qu'il nomme « les principes des syllogismes en général », Aristote considère le lien entre ces principes et ceux des sciences (Aristote, 1992, p. 158) :

« Mais dans chaque science, les principes propres sont les plus nombreux. Par suite, il appartient à l'expérience de fournir les principes afférents à chaque sujet. Je veux dire que, par exemple, c'est l'expérience astronomique qui fournit les principes de la science démonstrative, car ce n'est qu'une fois les principes célestes appréhendés, que les démonstrations de l'astronomie ont été découvertes. Il en est de même pour n'importe quel art ou science ».

Pour la géométrie par exemple, il revient donc à l'expérience géométrique de déterminer les principes de cette science, c'est-à-dire les définitions et les axiomes concernant les figures. Aristote poursuit :

« Par suite, les attributs de la chose appréhendés, il nous appartient dès lors de dégager promp-

tement les démonstrations. Si en effet, aucun des véritables attributs appartenant aux choses n'a été omis dans notre étude, nous serons capables, en tout ce qui admet une preuve, de découvrir cette preuve et de démontrer, et, pour tout ce qui n'admet pas naturellement de preuve, de le rendre clair ».

Pour lui, donc, une fois connus tous les caractères que l'on peut attribuer aux choses d'une science, il sera possible d'obtenir « promptement » les démonstrations. Par exemple, pour la géométrie, en connaissant tous les caractères relatifs aux figures, les syllogismes rendraient possible de « découvrir » une preuve.

Les mathématiciens du 17^e siècle critiquent cette affirmation : pour eux, les syllogismes ne permettent pas de découvrir les démonstrations. Ainsi, dans *les Discours concernant deux sciences nouvelles* de 1638, Galilée oppose la logique et la géométrie dans un échange entre Sagredo (le sage) et Simplicio (l'érudit aristotélicien) de cette façon (Galilée, 1970, p. 111) :

« Sagredo – Que dirons-nous, seigneur Simplicio ? Ne convient-il pas d'avouer que la géométrie est le plus puissant de tous les instruments pour aiguïser l'esprit et pour le mettre en mesure de raisonner et d'analyser de la meilleure façon ? Platon n'avait-il pas grandement raison quand il désirait que ses élèves eussent d'abord de solides bases mathématiques ?

Simplicio – Vraiment je commence à comprendre que la logique, bien qu'elle soit d'un excellent usage, ne possède nullement, pour ce qui est d'éveiller l'esprit à l'invention, l'acuité de la géométrie ».

2. — La démonstration cartésienne et la Logique de Port-Royal (1637-1662)

Les critiques contre les syllogismes d'Aristote, enseignés dans les universités et dans les écoles, et contre les démonstrations d'Euclide sont fréquentes dans les années 1630. René Descartes a suivi l'enseignement des Jésuites à la Flèche et a donc reçu un enseignement mathématique. Dans les *Règles pour la direction de l'esprit*, écrites vers 1628, il critique les textes des *Éléments*, car ils ne disent rien sur l'obtention des énoncés des propositions et de leurs démonstrations (Descartes, 1970, p. 24) :

« Certes, j'y lisais sur les nombres une foule de développements dont le calcul me faisait constater la vérité ; quand aux figures, il y avait beaucoup de choses qu'ils me mettaient en quelque sorte sous les yeux mêmes et qui étaient la suite de conséquences rigoureuses. Mais pourquoi il en était ainsi et comment on parvenait à le trouver, ils ne me paraissaient pas suffisamment le montrer à l'intelligence elle-même. [...] Ils ont préféré, pour se faire admirer, nous présenter [...] quelques vérités stériles démontrées avec une subtile rigueur logique comme des effets de leur art ».

La relation de composition et décomposition dans la méthode cartésienne

Pour comprendre les critiques de Descartes, examinons, par exemple, à la proposition 11 du Livre II d'Euclide. Il y est demandé de construire le point C du segment AB donné tel que le rectangle $CBDK$ (avec BD égal à AB) soit égal [en aire] au carré de côté AC (Fig. 3). Il n'est pas écrit pourquoi ce problème de construction est posé. Le lecteur devra attendre le Livre IV et la construction d'un pentagone régulier pour la trouver utilisée. Euclide commence par construire un point C par intersections de cercles et de droites (à la

règle et au compas). Cette construction est assez longue, mais il ne dit pas comment elle a été obtenue. Puis il écrit la démonstration, une suite de conséquences à partir des axiomes et des propositions précédentes, dont il ne dit pas non plus comment elle a été « trouvée ».

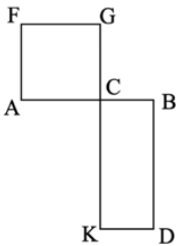


FIGURE 3— La proposition 11 du Livre II d'Euclide

Descartes s'oppose à la « machinerie des syllogismes » car « une telle forme logique ne leur permet à eux-mêmes [les Aristotéliens] de rien percevoir de nouveau et par suite [elle] est tout à fait inutile à ceux qui veulent découvrir la vérité des choses » (Descartes, 1970, p. 65). Il propose une nouvelle conception de la science (Descartes, 1970, p. 92) :

« Nous ne pouvons jamais rien comprendre en dehors [des] natures simples et de l'espèce de mélange ou composition qui existe entre elles. Toute la science humaine consiste uniquement à voir d'une manière distincte comment ces natures simples concourent ensemble à la composition des autres choses. »

La science consiste à composer et à décomposer les choses. Descartes explique que les deux facultés de l'entendement, « intuition » et « déduction », permettent de distinguer entre les « choses simples » et les « choses composées » : les premières sont connues par intuition et les secondes par « déduction » de choses simples à l'aide d'opérations simples. Le mot « déduction » prend un nouveau sens.

La méthode dans La géométrie de Descartes (1637)

Pour Descartes, la véritable mathématique est l'art de résoudre des problèmes et la méthode est un art d'inventer. Dans *La géométrie* de 1637, il caractérise la géométrie comme la science où les « choses simples » sont les segments et il décompose toutes les figures en segments. La relation de composition et décomposition va devenir ainsi un principe de démonstration. Il commence par expliquer (contre Aristote) comment utiliser les opérations de l'arithmétique dans la géométrie. Ces opérations sont des opérations internes sur les segments grâce à l'introduction d'une « unité » (un segment unité). Par exemple, le produit de deux segments est encore un segment et non un rectangle, comme dans les *Éléments* d'Euclide. En effet, en prenant AB l'unité, le produit de BD par BC est BE grâce au théorème de Thalès (Fig. 4).

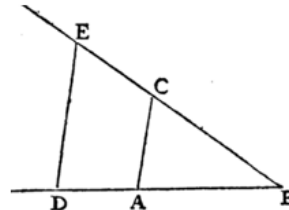


FIGURE 4— Le produit de deux segments dans *La géométrie* de Descartes

La méthode cartésienne repose sur un calcul algébrique avec les symboles des opérations arithmétiques et de racine carrée, et des lettres qui ne représentent plus des points mais des segments. Elle procède en cinq étapes : 1) il faut supposer le problème résolu ; 2) désigner les segments connus et inconnus par une lettre ; 3) traduire le problème par des relations entre ces segments ; 4) obtenir une ou des équations ; 5) résoudre la ou les équations. Dans ses *Commentaires sur la géométrie de M. Descartes* de 1730, Claude Rabuel prend comme premier

problème celui de la proposition 11 du Livre II d'Euclide (Rabuel, 1730, p. 3) :

« La ligne AB étant donnée, il faut trouver sur cette ligne le point C , qui la divise de telle sorte, que le rectangle sous la toute AB et le moindre segment BC soit égal au carré du plus grand segment AC , c'est la Prop. 11. L. 2. Éléments d'Euclide.

Supposons la division faite au point C , & nommons AB , a ; AC , x , BC sera $a - x$. Nous aurons par la nature du Problème $AB \times BC = AC^2$, $aa - ax = xx$, $xx + ax = aa$ ».

Rabuel calcule x à partir de cette équation et obtient ainsi la construction du point C . À la place d'une déduction de propositions, nous avons ici une déduction de choses simples (les segments) à partir de relations simples (les opérations arithmétiques et la racine carrée) par décomposition des figures en segments. L'écriture des équations remplace le discours démonstratif du « donc » (Barbin, 2006, p. 276-277). La méthode permet à Descartes d'associer des équations aux courbes géométriques. Elle donnera naissance à une nouvelle discipline, enseignée jusqu'au 20^e siècle et appelée *Application de l'algèbre à la géométrie* (Barbin, 2019).

Est-ce qu'un résultat trouvé à l'aide de la méthode peut être considéré comme démontré ? Descartes répond dans ses réponses aux objections des *Méditations métaphysiques* de 1641, en écrivant qu'il y a deux façons de démontrer, qui se distinguent du point de vue du sujet, de l'apprenant (Descartes, 1949, p. 278-279) :

« L'analyse montre la vraie voie par laquelle une chose a été méthodiquement inventée [...] en sorte que si le lecteur la veut suivre, [...] il n'entendra pas moins parfaitement la chose ainsi démontrée, et ne la rendra pas moins sienne, que si lui-même l'avait inventée. La *synthèse* se sert d'une longue suite de défi-

nitions, d'axiomes, de théorèmes et de problèmes, [...] elle arrache le consentement du lecteur [...] ; mais elle ne donne pas, comme l'autre, une entière satisfaction aux esprits qui désirent d'apprendre, parce qu'elle n'enseigne pas la méthode par laquelle la chose a été inventée. Les anciens géomètres avaient coutume de se servir seulement de cette synthèse ».

La Logique ou l'art de penser d'Antoine Arnauld et Pierre Nicole (1662)

L'ouvrage des deux jansénistes Arnauld et Nicole, amis de Blaise Pascal, est écrit dans le but de remplacer l'*Organon*. La partie I, « Où l'on fait voir le dessein de cette nouvelle Logique », légitime ce projet dans lequel la logique est maintenant définie comme un « art de penser ». La partie II est consacrée entièrement aux jugements des hommes. Les syllogismes sont abordés dans la partie III « Du raisonnement », tandis que la partie IV est intitulée « De la méthode ».

Dans la « Logique de Port-Royal », les prémisses et les syllogismes sont écrits à l'aide des moyens pédagogiques utilisés dans les écoles. Les quatre prémisses sont notées A , E , I , O et elles sont introduites à l'aide d'exemples significatifs (Fig. 5).

A. L'universelle affirmative, comme *tous vicioz est esclave.*

E. L'universelle négative, comme *Nul vicioz n'est heureux.*

I. La particulière affirmative, comme *Quelque vicioz est riche.*

O. La particulière négative, comme *Quelque vicioz n'est pas riche.*

FIGURE 5— Les quatre prémisses (Arnauld & Nicole, 1662, p. 227)

Les auteurs expliquent que les noms des syllogismes sont « réduits à des mots artificiels » pour être plus facilement retenus. Par exemple,

la première figure des syllogismes est appelée « Barbara » parce que ce mot contient trois *A* qui signifient que les trois termes du syllogisme sont affirmatifs. Elle est introduite, comme les autres figures des syllogismes, à l'aide d'un exemple signifiant, se rapportant souvent à la théologie.

BAR.	<i>Tout sage est soumis à la volonté de Dieu.</i>
BA	<i>Tout homme de bien est sage.</i>
RA	<i>Donc tout homme de bien est soumis à la volonté de Dieu.</i>

FIGURE 6— Le syllogisme Barbara (Arnauld & Nicole, 1662, p. 239)

Dans la partie IV sur la Méthode, les deux auteurs opposent les syllogismes à la démonstration cartésienne et ils adoptent les préceptes cartésiens du *Discours de la méthode* (Arnauld & Nicole, 1662, p. 383) :

« Il sert de peu pour bien démontrer, de savoir les règles des syllogismes [...] ; mais que le tout est de bien arranger ses pensées, en se servant de celles qui sont claires et évidentes, pour pénétrer dans ce qui paraissait plus caché ».

Ils exposent les « défauts des géomètres » en indiquant que « Tout Euclide est plein de ces défauts » : I- Avoir plus de soin de la certitude que de l'évidence et de convaincre l'esprit que de l'éclairer ; II- Prouver des choses qui n'ont pas besoin de preuves ; III- *Démonstrations par l'impossible* ; IV- *Démonstrations tirées par des voies trop éloignées* ; V- *N'avoir aucun soin du vrai ordre de la nature* ; VI- Ne se point servir de divisions et de partitions. Ils considèrent que le défaut V est « le plus grand défaut des Géomètres » :

« C'est ici le plus grand défaut des Géomètres. Ils se sont imaginés qu'il n'y avait presque aucun ordre à garder, sinon que les premières

propositions pussent servir à démontrer les suivantes. Et ainsi, sans se mettre en peine des règles de la véritable méthode, qui est de commencer toujours par les choses les plus simples et les plus générales, pour passer ensuite aux plus composées et aux plus particulières, ils brouillent toutes choses, et traitent pêle-mêle les lignes et les surfaces, les triangles et les carrés : prouvent par des figures les propriétés des lignes simples, et font une infinité d'autres renversements qui défigurent cette belle science. »

La Logique ou l'art de penser est louée dans l'article « Logique » de l'*Encyclopédie* de Diderot et d'Alembert de 1765 : « la méthode de Descartes a donné naissance à la logique, dite l'art de penser. Cet ouvrage conserve toujours sa réputation » (D'Alembert & Diderot, *Encyclopédie*, 1765, p. 637). La logique de Port-Royal a retenu de la méthode cartésienne la mise en ordre des choses, du simple au composé, ainsi que le caractère de clarté et d'évidence qui conduit ses deux auteurs à rejeter les démonstrations par l'impossible.

Dans les *Nouveaux éléments de géométrie* de 1667, Arnauld supplée au défaut V en introduisant dans la géométrie la notion de distance, la « théorie des obliques et des parallèles » et de nouvelles démonstrations des théorèmes de Thalès et de Pythagore qui nous sont restées (Barbin, 2006, p. 293-298).

3. — Démonstration et logique graphique avec Leibniz (1686-1690)

Gottfried Leibniz soutient en 1666 une thèse sur l'art combinatoire appliqué aux syllogismes. Lors de séjours à Paris et à Londres de 1672 à 1676, il apprend les mathématiques de son siècle, celles de Descartes, de Pascal et de Christian Huygens.

Du calcul analytique au calcul logique

En 1684, Leibniz présente sa « méthode analytique », la notion de différentielle et l'algorithme du calcul infinitésimal, puis, plus tard, les équations différentielles associées aux courbes (Barbin, 2006, p. 226-236). Il explique les avantages de cette méthode par rapport à celle de Descartes dans une lettre à Arnauld de juillet 1686 (Barbin, 2006, p. 219-220).

De 1686 à 1690, Leibniz écrit des textes en latin sur la logique, non publiés de son vivant mais connus à partir de 1903, grâce au philosophe Louis Couturat. Il explique son intention dans une lettre à Melchisedec Thévenot de 1691 (Pasini, 1997, p. 44) :

« Puisque je crois que la géométrie et la mécanique sont maintenant devenues entièrement analytiques, j'ai conçu une extension du calcul à d'autres sujets, y compris des sujets que personne n'a pensé qu'ils auraient pu l'appliquer. Ici j'entends par calcul toute notation représentant un raisonnement, même sans aucune relation aux nombres. »

Cette idée d'étendre le calcul analytique est aussi exprimée en 1677 dans la préface de *La science générale*. Leibniz reprend la phrase où Aristote définit la science mais il la poursuit, non pas avec les syllogismes mais avec la méthode : « La science dépend de la démonstration, et l'invention des démonstrations d'une certaine Méthode qui n'est pas connue de tout le monde. [...] [Elle] n'a pas été pratiquée sauf dans les mathématiques » (Couturat, 1903, p. 153). Trente ans exactement après *La Géométrie* de Descartes, les succès de la méthode analytique l'ont imposé comme un art d'inventer. Son projet est d'exprimer toutes nos pensées par un calcul, comme nous exprimons les courbes par une équation (Couturat, 1903, p. 155) :

« Il est manifeste, que si l'on pouvait trouver des *caractères* ou signes propres à exprimer toutes nos pensées, aussi nettement et exactement que l'arithmétique exprime les nombres, ou que l'analyse géométrique exprime les lignes [les courbes], on pourrait faire en toutes les matières autant qu'elles sont sujettes au raisonnement tout ce qu'on peut faire en Arithmétique et en Géométrie. »

Il s'agit de composer un « langue nouvelle » qui servirait à inventer aisément, une langue elle-même aisée à apprendre (Couturat, 1903, p. 155-156) :

« Car toutes les recherches qui dépendent du raisonnement se feraient par la transposition de ces caractères, et par une espèce de calcul ; ce qui rendrait l'invention des belles choses tout à fait aisée. Car il ne faudrait pas se rompre la tête autant qu'on est obligé de le faire aujourd'hui, et néanmoins on serait assuré de pouvoir faire tout ce qui serait faisable. [...] Or les caractères qui expriment toutes nos pensées, composeront une langue nouvelle, qui pourra être écrite, et prononcée : cette langue sera très difficile à faire, mais très aisée à apprendre. [...] De plus cette langue aura une propriété merveilleuse, qui est de fermer la bouche aux ignorants. »

La logique graphique de Leibniz (1686)

Dans le manuscrit latin « Sur la vérification des formes logiques par des lignes » de 1686, Leibniz introduit deux graphismes géométriques pour représenter les quatre prémisses d'Aristote (Fig. 7). Dans le premier graphisme, les termes *B* et *C* sont représentées par des segments emboîtés ou disjoints et, dans le second, par des cercles concentriques, emboîtés ou disjoints. Les syllogismes sont représentés de la même façon, par exemple pour Barbara (Fig. 8).

La représentation graphique à l'aide de cercles

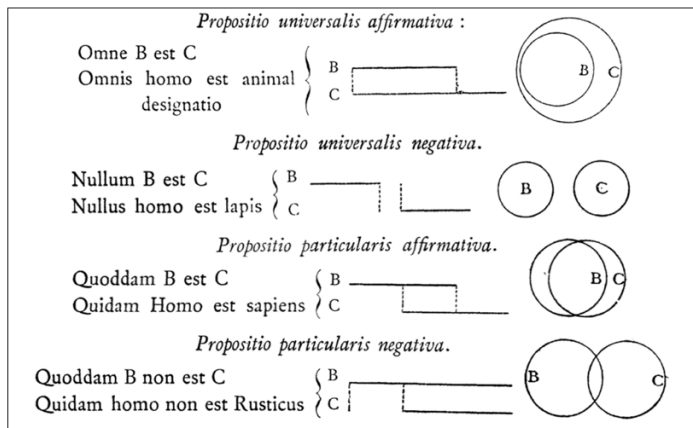


FIGURE 7— Les prémisses dans le graphisme de Leibniz (Couturat, 1903, p. 292-293)

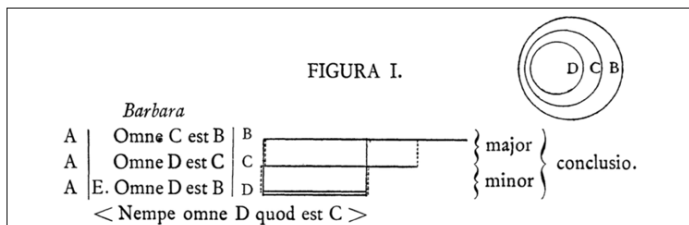


FIGURE 8— Le syllogisme Barbara chez Leibniz (Couturat, 1903, p. 294)

figure dans les *Lettres à une Princesse d'Allemagne* de Leonhard Euler de 1768 sans mentionner Leibniz. De sorte qu'en 1816-1817, Gergonne écrit dans son *Essai de dialectique rationnelle*, après avoir exposé les prémisses de la logique aristotélicienne : « tout ce qui précède deviendra d'une évidence manifeste si, à la manière d'Euler on prend la peine de tracer des cercles » (Gergonne, 1816-1817, p. 200). Les cercles sont aussi appelés aujourd'hui « diagrammes d'Euler ».

Ce n'est qu'après son retour d'Italie, vers 1690, que Leibniz reprend la logique dans un manuscrit latin sans titre, connu comme son « Essai logique ». Le texte est édité par Couturat en 1903, mais il ne sera traduit en français qu'en 1998 (Berlioz & al., 1998). Il se présente sous la forme synthétique des *Éléments* d'Euclide, comme une suite de définitions, d'axiomes, de postulats et de propositions portant sur des « choses », nommées par des lettres *A*, *B*, *C*, etc.

La première relation entre les choses est « l'identité », qui fait l'objet des deux premières définitions (Berlioz & al., 1998, p. 48) :

« Déf. 1. Des identiques ou des coïncidents peuvent être substitués l'un à l'autre partout sans altérer la vérité. Par exemple triangle et trilatère. [...] »

$A \propto B$ signifie que *A* et *B* sont identiques, par exemple, nous dirons de la droite [segment] *XY* et la droite *YX* : $XY \propto YX$ (Fig. 9 gauche).

Déf. 2. Des différents sont des non-identiques, c'est à-dire que pour eux il arrive quelque fois que la substitution ne fonctionne pas. Ainsi, cercle et triangle [...].

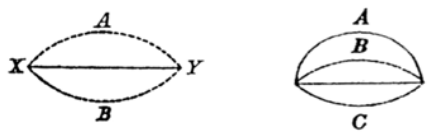


FIGURE 9— Les graphismes pour la notion de « coïncident » et la proposition 3

$A \neq B$ signifie que A et B sont différents, comme les droites XY et RS ».

Les définitions sont exemplifiées à l'aide de la géométrie, ici triangle (trois angles), trilatère (trois côtés). La figure de deux segments identiques va être utilisée dans tout le manuscrit pour représenter l'identité. Les « choses » ne sont pas géométriques, mais la géométrie sert de mode de représentation, comme dans la physique galiléenne par exemple. Comme celles d'Euclide, les démonstrations sont des discours déductifs, mais les graphismes leur servent de support visuel, par exemple pour la proposition 3 : « Si $A \propto B$ et $B \propto C$, on aura $A \propto C$ » (Fig. 9, droite).

La seconde relation entre les choses est « la composition », qui fait l'objet des définitions 3 et 4 (Berlio & al, 1998, p. 49) :

Déf. 3 « Poser que A est dans L , ou L contient A , c'est la même chose que poser que L coïncide avec une pluralité à laquelle A est joint.

Déf. 4. Et on appellera composants relativement à L , L lui-même étant le composé ou constitué, tout ce qui ensemble est tel que tout ce qu'il contient est en L .

$B \oplus N \propto L$ signifie que B est dans L , c'est-à-dire que L contient B ; et que B et N ensemble constituent ou composent L , il s'en va de même pour une pluralité ».

Le premier axiome est « $B \oplus N \propto N \oplus B$, c'est-à-dire que la transposition ne change rien » et le second axiome « $A \oplus A \propto A$, si on n'ajoute rien de nouveau, on n'obtient rien de nouveau ». Le postulat 1 énonce que, « quelque chose étant donnée, on peut se donner quelque chose de différent d'elle ». Le postulat 2 énonce que, une pluralité donnée, comme par exemple A et B , peut se composer en un L , c'est-à-dire que $L \propto A \oplus B$ (Berlio & al. p. 50).

La proposition 9, par exemple, énonce que si $A \propto B$, on aura $A \oplus C \propto B \oplus C$. Elle est démontrée à partir de la définition 1, elle est visualisée par un graphisme géométrique (Fig. 10) et elle est illustrée par le cas où A est triangle, B trilatère, C équilatère.

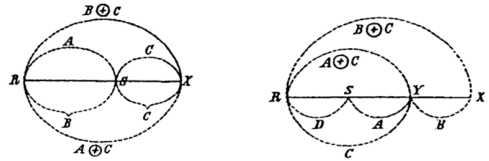


FIGURE 10— Les graphismes des propositions 9 et 22

Les trois dernières propositions sont différentes des précédentes car il s'agit de « trouver » une chose et elles sont suivies d'une « solution ». La proposition 22 demande, étant donnés A et B qui ne sont pas l'un dans l'autre, de trouver un troisième autre C tels que $A \oplus C$ soit dans $B \oplus C$. Leibniz écrit la solution suivante (Berlio & al., p. 56) :

« Solution. Posons (par le postulat 1) un D quelconque tel qu'il ne soit pas dans A et (par le postulat 2) faisons que $A \oplus D \propto C$, on aura ce qui est cherché. En effet,

$A \oplus C \propto A \oplus A \oplus D \propto A \oplus D$ (par le postulat 2).

De même, $B \oplus C \propto B \oplus A \oplus D$.

Or, $A \oplus D$ est dans $B \oplus A \oplus D$ (par la définition 3).

Donc $A \oplus C$ est dans $B \oplus C$. Ce qu'il fallait obtenir (Fig. 10 gauche) ».

Leibniz exemplifie la solution en prenant A équilatère, B parallélogramme, D équiangle, C équilatère équiangle régulier. Mais il remarque que la construction prescrite ne réussit pas dans tous les cas, par exemple avec A trilatère et B quadrilatère, car on ne peut pas trouver une notion qui soit en même temps dans A et dans B . Il explique alors (Berlio & al., 1998, p. 56-57) :

« Je réponds que notre construction générale est fondée sur le postulat 2 qui dit que l'on peut composer n'importe quoi [...] Mais si l'on veut appliquer ce calcul général des compositions quelconques à une manière spéciale de composer, par exemple si l'on veut que trilatère et cercle ou quadrilatère ne composent pas seulement un agrégat mais que, en même temps, chacune de ces notions soit dans un même sujet, il faut voir si elles sont compatibles. Ainsi on peut bien poser ensemble des droites immobiles séparées pour composer un agrégat mais non pour composer un continu. »

Ainsi, pour une proposition où il s'agit de « trouver », la « construction générale » de la logique ne peut pas s'appliquer à une science particulière, comme la géométrie. Il faudrait tenir compte d'attributs spécifiques à la science particulière avant d'énoncer le postulat 2. Comme nous l'avons vu, une semblable nécessité était indiquée par Aristote, pour qui la découverte d'une démonstration demande de connaître les attributs de la science particulière.

4. — Logique algébrique de Boole et logique formelle de De Morgan (1847)

En 1847, les mathématiciens anglais George Boole et Auguste de Morgan publient séparément deux livres de logique. Le premier, né en 1806 d'un père colonel, entre en 1823 au Trinity College de Cambridge, où il est élève de George Peacock, puis il devient en 1828 professeur de mathématiques à University College à Londres. Le second, né en 1815 dans une famille modeste à Lincoln, est nommé en 1831 enseignant de mathématiques dans une école de Liverpool. De Morgan publie en 1836 un *Traité sur le calcul des fonctions*, tandis que Boole rédige en 1839 un article sur le calcul des variations. Une correspondance commence entre eux à l'initiative de Boole, à propos du *Traité* de 1836. En 1844, paraît un article de De Morgan « Sur l'algèbre triple

» et un article de Boole sur « La méthode générale en analyse », qui vaut à son auteur une médaille de la Royal Society.

Boole : l'extension de l'algèbre symbolique au calcul logique

Dans la première moitié du 19^e siècle, des mathématiciens anglais, dans ce qu'on appelle l'École algébrique anglaise, développent une conception symbolique de l'algèbre, où les lois opératoires sont garantes de leur nécessité formelle. Peacock, dans son *Treatise of Algebra* de 1830, présente l'algèbre symbolique comme le « langage du raisonnement symbolique », « la dernière étape d'un processus dont l'Arithmétique constitue la première et l'Algèbre arithmétique la deuxième » (Durand-Richard, 2002).

Dès la première phrase de l'introduction de *L'analyse mathématique de la logique* de 1847, Boole situe son propos comme une extension de l'algèbre symbolique : « Ceux qui sont au courant de l'état présent de la théorie de l'algèbre symbolique savent que la validité des démarches de l'analyse ne dépend pas de l'interprétation des symboles utilisés mais seulement des lois de leur combinaison » (Boole, 1847, p. 3). Ainsi, un même calcul analytique peut, selon un « schéma interprétatif », représenter la solution d'un problème arithmétique, géométrique, dynamique ou optique. Il considère qu'un « véritable calcul » est une « méthode » qui repose, d'une part, sur l'emploi de symboles dont les lois de combinaison sont connues et dont, d'autre part, les résultats admettent une « interprétation consistante » (Boole, 1847, p. 4).

Boole commence par introduire les concepts de « classe », « individu » et « sélection » en insistant sur le lien entre la logique et la théorie du langage (Boole, 1847, p. 4) :

« Ce qui rend la logique possible, c'est l'existence en nos esprits de notions générales, notre faculté de concevoir une classe et de désigner les individus qui en sont membres par un même nom. La théorie de la logique est ainsi intimement liée à celle du langage. [...] Supposons le concept d'une classe : nous sommes à même, à partir de n'importe quelle collection concevable d'objets, de séparer mentalement ceux qui lui appartiennent et de les envisager à part de tout le reste ».

Il explique qu'il est possible de répéter une telle « sélection » ou d'opérer une autre sélection. Dans ce cas, le groupe des « individus » appartient à deux classes. De même pour trois, etc.

Il expose ensuite les différents symboles et les « premiers principes » (Boole, 1847, p 15-18). Le symbole 1 ou unité représente la « classe universelle » qui englobe toutes les

classes d'objets. Les lettres X, Y, Z , etc. représentent les « individus » appartenant aux classes X, Y, Z , etc. Les symboles x, y, z , etc. distinguent dans un domaine tous les X qu'il contient, tous les Y etc. Ils sont appelés les « symboles de sélection ». Les symboles sont liés par deux relations : la négation et le produit. La classe des non- X est représentée par $1 - x$. Le produit xy représente la sélection de la classe Y et la sélection dans cette classe Y de tous les individus de la classe X qui y sont contenus, le résultat est la classe dont les membres sont à la fois des X et des Y .

Boole énonce trois lois de combinaison qui permettent une « arithmétisation » de la logique, comme Descartes avait arithmétisé la géométrie. Chacune des trois lois est expliquée par Boole puis elle est « exprimée mathématiquement » :

1° Le résultat d'une sélection est indépendant du groupement qu'on fait du domaine :

The class X	x	
The class not-X	$1 - x$	
All Xs are Ys	$x = y$	
All Ys are Xs		
All Xs are Ys	$x(1 - y) = 0$	
No Xs are Ys	$xy = 0$	
All Ys are Xs	$y = vx$	$vx = \text{Some Xs}$
Some Xs are Ys		$v(1 - x) = 0.$
No Ys are Xs	$y = v(1 - x)$	$v(1 - x) = \text{some not-Xs}$
Some not-Xs are Ys		$vx = 0.$
Some Xs are Ys	$v = xy$	$v = \text{some Xs or some Ys}$
	or $vx = vy$	$vx = \text{some Xs}, vy = \text{some Ys}$
	or $vx(1 - y) = 0$	$v(1 - x) = 0, v(1 - y) = 0.$
Some Xs are not Ys	$v = x(1 - y)$	$v = \text{some Xs, or some not-Ys}$
	or $vx = v(1 - y)$	$vx = \text{some Xs}, v(1 - y) = \text{some not-Ys}$
	or $vxy = 0$	$v(1 - x) = 0, vy = 0.$

FIGURE 11– Table des propositions (Boole, 1847, p. 25)

$$(1) \quad x(u + v) = xu + xv,$$

$u + v$ représentant le domaine non divisé et u et v , les parties « composantes ». La somme correspond donc pour nous à une union disjointe.

2° L'ordre d'effectuation de deux sélections successives est indifférent :

$$(2) \quad xy = yx,$$

Le produit correspond donc pour nous à une intersection, dont Boole qu'il est « commutatif » et « distributif ».

3° Le résultat d'une sélection effectuée deux fois (ou n'importe quel autre nombre de fois) est le résultat de cette sélection effectuée une seule fois :

$$(3) \quad xx = x \text{ ou } x^2 = x \text{ ou } x^n = x.$$

Boole explique que ces trois lois sont suffisantes comme base du calcul, il montre comment écrire les quatre prémisses *A, E, I, O* d'Aristote sous forme d'équations et il construit une table de propositions (Fig. 11).

Boole remarque que les prémisses des syllogismes étant exprimées par des équations, l'élimination d'un symbole commun conduit à une troisième équation qui exprime la conclusion. Il le montre pour le syllogisme Barbara dans la partie consacrée aux syllogismes (Fig. 12).

All Ys are Xs,	$y(1-x) = 0,$	or $(1-x)y = 0,$
All Zs are Ys,	$z(1-y) = 0,$	or $zy - z = 0.$
Eliminating y by (13) we have		
$z(1-x) = 0,$		
$\therefore$ All Zs are Xs.		

FIGURE 12— Le syllogisme de Barbara
(Boole, 1847, p. 35)

En même temps que son approche symbolique de la logique, Boole prend soin de distinguer deux usages des symboles : en référence au progrès d'une science (comme dans la méthode analytique) ou en référence à l'intellect (comme

dans la logique). Dans le second usage, il faut encore distinguer deux cas. Dans le premier cas, les symboles sont utilisés en connaissant leur signification et en comprenant ce qui rend leur utilisation légitime : on fournit alors à la raison « une discipline intellectuelle d'un haut niveau ». Dans le deuxième cas, ce sont des symboles sans signification, dont l'usage n'est admis que par autorité : il n'y a alors « aucune discipline mentale d'aucune sorte ». Il ajoute que (Boole, 1847, p. 10) :

« Ce serait, peut-être, la meilleure assurance contre les dangers d'une confiance irraisonnée dans les symboles [...], que chaque sujet de mathématiques appliquées dût être traité dans l'esprit des méthodes connues au moment de leur l'application ; et aussi dans la forme la plus achevée de ces méthodes ».

Pour que les symboles aient une signification, il leur faut une « interprétation consistante », celle qu'ils ont eu dans l'histoire lors de leur introduction ou dans leur pratique actuelle.

Boole explique « qu'il ne faut plus associer Logique et Métaphysique, mais logique et mathématiques », engageant ainsi une discussion qui se poursuivra au moins jusqu'à la fin du siècle. Il justifie cette affirmation en associant la logique à l'analyse (Boole, 1847, p. 13) :

« Si quelqu'un après ce qui a été dit, entretient un doute sur ce point, je dois le renvoyer à la preuve qui sera accordée dans l'essai suivant. Il y verra la logique reposer comme la géométrie sur les vérités axiomatiques, et ses théorèmes construits sur cette doctrine générale des symboles, qui constitue le fondement de l'analyse reconnue. [...] L'application de cette conclusion à la question dont nous sommes saisis est claire et décisive. La discipline mentale qui est accordée par l'étude de la logique, comme une science exacte, est, dans l'espèce, la même comme celle offerte par l'étude de l'analy-

se ».

De Morgan : une logique formelle sans interprétation

Dans la préface de la *Logique formelle ou le calcul de l'inférence nécessaire et probable*, De Morgan introduit un système qui est une large extension de la logique : « Le système donné dans ce travail s'étend au-delà de ce qui est généralement reçu, dans plusieurs directions [...]. Sous la forme de la proportion, la copule [lien] est abstraite ainsi que les termes : ou est considérée comme obéissant seulement aux conditions qui sont nécessaires pour inférer » (De Morgan, 1847, p. 1). Pour faire comprendre le point de vue adopté, il précise :

« La vérité logique dépend de la structure de la phrase et non des sujets particuliers évoqués. Ainsi,

Au lieu de	Écrire
Tous les hommes mourront	Chaque Y est X .
Tous les hommes sont des êtres rationnels.	Chaque Y est Z .
Donc certains êtres rationnels mourront.	Donc certains Z sont des X .

Que les prémisses soient vraies ou fausses, ce n'est pas une question de logique, mais de morale, de philosophie, d'histoire ou [...] : la question de la logique est, est-ce que la conclusion s'ensuit certainement si les prémisses sont vraies ? » (De Morgan, 1847, p. 1).

Morgan introduit des symboles pour désigner les différentes copules et le « contraire » d'un « nom » X est écrit x . Il écrit les quatre prémisses d'Aristote à l'aide de ses symboles (Fig. 13 haut). Il définit ainsi un syllogisme : « un syllogisme est l'inférence de la relation entre deux noms à partir de la relation de chacun de ces noms avec un troisième. » (De Morgan, 1847, p. 76). Puis il montre comment s'écrivent les syllogismes à l'aide de ses symboles, par exemple le syllogisme Barbara (Fig. 13 bas).

$X)Y$ means 'Every X is Y ' $X:Y$ — 'Some X s are not Y s'	$X.Y$ means 'No X is Y ' XY — 'Some X s are Y s'
$A_i X)Y = X.y = y)x$ $O_i X:Y = Xy = y:x$ $E_i X.Y = X)y = Y)x$ $I_i XY = X:y = Y:x$	$A' x)y = x.Y = Y)x$ $O' x:y = xY = Y:X$ $E' x.y = x)y = y)X$ $I' xy = x:Y = y:X$
$A_i A_i A_i X)Y + Y)Z = X)Z$	

FIGURE 13— L'écriture des prémisses et du syllogisme Barbara (De Morgan, 1847, p. 60-61, p. 90)

De Morgan introduit un point de vue philosophique dans son ouvrage, en distinguant l'inférence formelle de l'inférence « idéale » (De Morgan, 1847, p. 44) :

« La conclusion que nous déduisons des prémisses est toujours présente avec elles ; les vérités sont des concomitants et non des conséquences. Quand nous disons qu'une assertion s'ensuit d'une autre, nous parlons de manière purement idéale et décrivons une imperfection de notre propre esprit [...] ».

Formellement, par exemple, un triangle est une figure avec trois cotés et, en même temps, une figure dont la somme des angles internes est égale à deux angles droits et, ainsi, pour toutes les propriétés du triangle. De Morgan résume ceci en écrivant : « la conséquence, objectivement parlant, est dans, et avec et à partir des prémisses ».

Morgan connaît la Logique de Port-Royal, mais son point de vue sur la démonstration formelle ne s'accorde pas avec les conceptions de ses deux auteurs. En effet, il pose d'emblée la simultanéité d'une démonstration et de sa contradiction en écrivant : « la démonstration est de deux sortes : car toute proposition a une contradiction ; et de ces deux, l'une doit être vraie et l'autre doit être fausse. Nous pouvons alors soit prouver qu'une proposition est vraie, soit que sa contradiction est fausse ». Il remarque ensuite (De Morgan, 1847, p. 23-

24) :

« Mais comment prouver qu'une proposition est fausse, sinon en prouvant qu'une contradiction est vraie ? En prouvant qu'une conséquence nécessaire de la proposition est fausse. [Etc.] Mais il peut arriver qu'une conséquence nécessaire ainsi obtenue soit visiblement et évidemment par elle-même fausse, et dans ce cas aucune autre preuve de la fausseté n'est nécessaire. »

Il prend pour exemple la « structure logique » d'une preuve d'Euclide, celle que tout triangle équilatéral est équilatéral, où la dernière étape de la preuve recourt à l'évidence.

De Morgan réagit à la parution de l'ouvrage de Boole dans une lettre à ce dernier, du dimanche 28 novembre 1847 (Smith, 1982, p. 25) :

« Je vous remercie beaucoup pour votre présentation, que j'ai lue avec grande admiration. J'ai demandé à mon éditeur de vous envoyer une copie de ma logique qui est parue mercredi. Il y a de remarquables similarités entre nous. [...] [Mes expressions sont] loin d'avoir l'élégance des vôtres ; mais votre système est adapté aux identités, dans la mienne une identité est deux propositions. »

Dans la lettre, De Morgan s'efforce de montrer que les expressions logiques des deux ouvrages se ramènent les unes aux autres, mais il relève bien leurs différences essentielles : celles de Boole concernent un calcul sur des choses et les siennes des inférences entre des propositions.

Boole n'a jamais réussi à s'inscrire à Cambridge comme étudiant et il peine à trouver un poste de professeur dans une université. De Morgan, qui a des appuis locaux, a soutenu en 1846 la candidature de Boole à l'Université de Cork,

dont la carrière se déroulera ainsi en Irlande.

5. — Trois héritiers de la logique booléenne : Frege, Venn et Ladd (1879-1881)

Plusieurs héritiers de Boole améliorent ou étendent son calcul, comme le philosophe et logicien Charles Sanders Peirce (Peirce, 1870). Dans « Sur la logique des mathématiques », celui-ci introduit deux symboles Π et Σ pour les quantificateurs, universel et existentiel, et il explique comment la logique peut débarrasser les mathématiques de l'appel à l'expérience ou à l'intuition (Peirce, 1867, p. 402) :

« L'objet de ce texte est de montrer qu'il y a certaines propositions générales à partir desquelles les vérités des mathématiques s'ensuivent de façon syllogistique, et que ces propositions peuvent être prises comme définitions des objets du mathématicien sans impliquer aucune hypothèse en référence à l'expérience ou à l'intuition. Le fait qu'il existe réellement de tels objets dans l'expérience ou l'intuition pure ne fait pas en soi partie des mathématiques pures. Portons d'abord notre attention au calcul logique de Boole [...]. »

Dans les années 1879-1881, trois héritiers de Boole introduisent de nouveaux graphismes et expriment des conceptions fort différentes les unes des autres : Frege, Venn et Ladd.

L'idéographie du mathématicien Frege (1879)

Gottlob Frege est un mathématicien qui a soutenu en 1873 une thèse en géométrie projective. En 1879, dans la Préface de *Idéographie, un langage formulaire de la pensée pure construit à partir de celui de l'arithmétique*, il écrit que la logique pure ne s'intéresse pas aux choses : « La démonstration la plus solide est manifestement celle qui est purement

logique, qui, abstraction faite de la caractéristique particulière des choses, se fonde seulement sur les lois sur lesquelles toute connaissance repose » (Frege, 1999, p. 5). Alors que l'idéographie doit « d'abord servir à examiner de la manière la plus sûre la force concluante d'une chaîne de déductions et à dénoncer chaque hypothèse qui veut s'insinuer de façon inaperçue, afin que finalement sa provenance puisse en être recherchée » (Frege, 1999, p. 6). Il ne faut pas lui demander de servir à l'autres buts : l'idéographie est à la langue ce que le microscope est à l'œil.

Il introduit deux idéogrammes l'un sous l'autre, le premier pour signifier que A est un jugement et le second pour indiquer une conditionnalité entre deux jugements A et B (Fig. 14 gauche). Il explique l'avantage de l'idéographie (Frege, 1971, p. 77) :

« Elle tire profit de la double dimension du plan d'écriture, elle dispose à la suite, l'un sous l'autre, les contenus de jugement, tandis que chacun d'eux se déploie de gauche à droite. Ainsi, chaque contenu est nettement séparé des autres et on perçoit cependant aisément leurs rapports logiques. Chez Boole, on aurait une seule ligne, bien souvent démesurément longue ».

Des idéogrammes pour « il y a », « aucun », « quelques », etc. permettent de représenter les propriétés d'une propriété X d'une variable a . Un « creux » sur la barre horizontale avec une lettre a et un petit trait vertical placé sous la barre permettent de représenter différents cas, selon que « tout a possède la propriété X », « il y a des choses qui n'ont pas la propriété X », « quelque soit a , $X(a)$ est toujours à nier » (Fig. 14 droite de haut en bas).

La proposition « Si quelque chose possède la propriété X , alors cela a aussi la propriété P », dite « loi de causalité », est représentée par

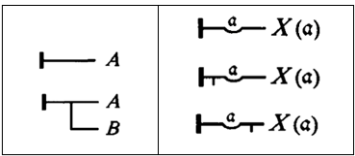


FIGURE 14– Idéogrammes pour des jugements et des propositions (Frege, 1999, p. 16, 19, 22-23)

un idéogramme où les deux propriétés considérées figurent l'une sous l'autre (Fig. 15 gauche), et l'ajout d'un petit trait donne la représentation de « Ce qui a la propriété Ψ n'a pas la propriété P » (Fig. 15 droite).



FIGURE 15– Idéogrammes pour deux propositions (Frege, 1999, p. 38)

Dans « Que la science justifie un recours à une idéographie » de 1882, Frege remplace les concepts de « sujet » et « verbe » par ceux de « argument » et « fonction » (Fig. 16) et écrit que cela « fera ses preuves à la longue » en logique (Frege, 1999, p. 9). Il ouvre en effet ainsi la voie à une logique des variables et des prédicats.

Puisque son idéographie permet de suppléer aux insuffisances des discours démonstratifs, Frege estime qu'elle devrait s'appliquer avec succès aux mathématiques, faisant ainsi des mathématiques une partie appliquée de la logique (Frege, 1991, p. 8) :

« J'attends une application pleine de succès de mon idéographie partout où l'on doit particulièrement tenir à la force concluante de la démonstration, comme dans le fondement du calcul différentiel et intégral. Il me paraît même plus facile d'étendre le domaine de ce langage formulaire à la géométrie. Il faudrait

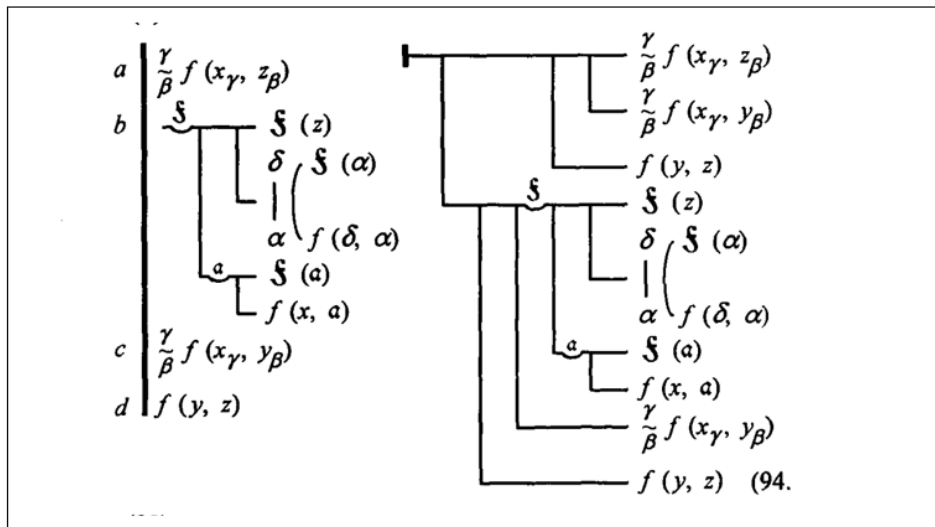


FIGURE 16– L’introduction d’une logique fonctionnelle chez Frege (Frege, 1999, p. 90)

seulement ajouter encore quelques signes pour les rapports intuitifs qui y apparaissent. [...] Le passage à la cinématique pure, puis à la mécanique et à la physique pourrait suivre ici ».

La logique symbolique de Venn (1881)

Après avoir obtenu un diplôme en mathématiques en 1857 à Cambridge, John Venn y revient en 1862 pour enseigner les « sciences morales ». Dans *Symbolic Logic* de 1881, il utilise les symboles de Boole, mais il explique à son lecteur qu’il peut se borner à « consulter » les travaux de quelques « mathématiciens philosophes ». En effet, pour lui, la logique symbolique et les mathématiques sont deux sciences disjointes, « deux branches d’un langage de symboles, qui possèdent des lois de combinaison communes, quoique très peu » (Venn, 1881, p. xvi).

Son ouvrage porte sur les syllogismes, auxquels il associe des « diagrammes » pour « mettre sous les yeux, d’un seul coup d’œil, toute la portée des propositions collectivement » (Venn, 1881, p. 123). Il prend soin de bien distinguer les « cercles d’Euler », qu’il connaît par Gergonne, de ses propres diagrammes. Pour cela,

il prend l’exemple du syllogisme :

Aucun Y est Z
Tout X est Y
Aucun X est Z

Avec les « cercles d’Euler », les cercles sont tracés au fur et à mesure de la lecture des deux prémisses. Ici on trace d’abord deux cercles disjoints y et z correspondant à la prémisses « Aucun Y est Z », puis le cercle x est inscrit dans le cercle y, pour conclure qu’effectivement « Aucun X est Z » (Fig. 17 gauche).

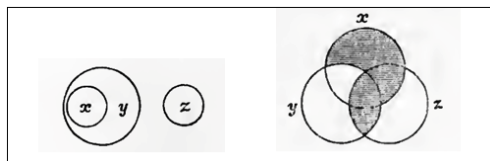


FIGURE 17– Cercles d’Euler et diagramme de Venn

Au contraire, avec les diagrammes, les cercles sont toujours tracés d’emblée dans une position générale puis les zones correspondantes aux prémisses sont ôtées une à une. Ici, nous enlevons (ou hachurons) d’abord toute la partie du cercle y qui est dans le cercle z. Puis nous

enlevons (hachurons) la partie de x qui n'est pas dans y . Nous pouvons alors constater que toute la partie du cercle x restante (non hachurée) n'est pas dans le reste du cercle I (Fig. 17 droite).

Les diagrammes constituent une « aide visuelle » : « une principale source d'aide que les diagrammes peuvent offrir mérite d'être mentionnée ici. C'est cette sorte d'aide visuelle qui constitue leur fonction particulière » (Venn, 1881, p. 128). Pour une situation où « chaque x est soit y ou z ; chaque y est soit z ou w ; chaque z est soit w ou x ; et chaque w est soit x ou y », quatre termes interviennent, et non plus seulement trois. La représentation à l'aide de cercles est impossible et il faut utiliser des ellipses (Venn, 1881, p. 129) :

« On voit bien que le premier énoncé ôte tout x qui n'est ni y ni z , et de même avec les autres ; de sorte que les quatre classes abolies sont
 $x \bar{y} \bar{z}, y \bar{z} \bar{w}, z \bar{w} \bar{x}, w \bar{x} \bar{y}$.

Ombrez-les dans notre diagramme, et cela se présente ainsi » (Fig. 18).

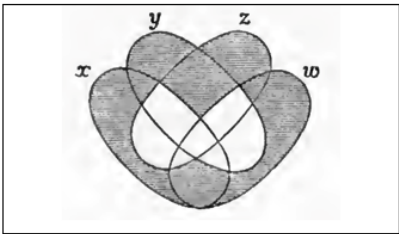


FIGURE 18– Diagramme pour quatre termes

Venn énonce ensuite plusieurs problèmes où plus de quatre termes sont à visualiser. Même si la représentation à l'aide d'un diagramme s'avère souvent difficile, de l'aveu même de Venn, elle joue un rôle de vérification.

La Table de Ladd

Après un diplôme de mathématiques, l'Amé-

ricaine Christine Ladd enseigne les mathématiques dans le secondaire pendant neuf ans. Grâce à l'aide du mathématicien James Sylvester, elle est acceptée à la Johns Hopkins University en 1878 sous le nom de « C. Ladd ». Après que l'université ait découvert qu'une jeune femme se cachait sous ce nom, elle est révoquée. Elle pourra y rester grâce à l'appui de Sylvester, mais elle ne suivra que les cours de Sylvester, puis ceux de Peirce. Elle écrit sous la direction de ce dernier une thèse intitulée « On the Algebra of Logic » en 1881, qui paraît dans les *Studies in Logic*, éditées en 1883 par Peirce. La thèse sera reconnue par l'Université en 1926, elle a alors 78 ans.

Ladd se présente comme une continuatrice des travaux sur l'algèbre de la logique de Boole, de Peirce et de Schröder. Elle les analyse pour comparer les symboles, les analogies entre formules et les symétries des écritures symboliques. Dans la dernière partie de sa thèse, intitulée « Sur la constitution de l'univers », elle considère deux termes primitifs a et b , leurs négations

$$\bar{a} \text{ et } \bar{b},$$

et leurs quatre combinaisons

$$\bar{a} \bar{b}, a \bar{b}, \bar{a} b \text{ et } a b.$$

Elle représente les constitutions possibles vis-à-vis de ces quatre combinaisons, à l'aide d'une table contenant 4 colonnes et 16 lignes (Ladd, 1883, p. 61-62). Les 4 colonnes correspondent aux quatre combinaisons possibles, et les 16 lignes correspondent aux 16 constitutions possibles d'un univers à l'aide de ces quatre combinaisons. Pour chacun des 16 cas possibles, le signe 1 indique la présence de la combinaison sous laquelle il se trouve, et 0 son absence (Fig. 19 gauche). Chaque cas correspond ainsi à un nombre en écriture binaire, par exemple, la ligne numérotée 9 (1001), correspondant au cas où les deux combinaisons

$$\bar{a} \bar{b} \text{ et } a b$$

$\bar{a} \bar{b}$ 8	$a \bar{b}$ 4	$\bar{a} b$ 2	$a b$ 1	
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	2
0	0	1	1	3
0	1	0	0	4
0	1	0	1	5
0	1	1	0	6
0	1	1	1	7
1	0	0	0	8
1	0	0	1	9
1	0	1	0	10
1	0	1	1	11
1	1	0	0	12
1	1	0	1	13
1	1	1	0	14
1	1	1	1	15

0	1	0	1	a
0	0	1	1	b
				Symboles Usuels
0	0	0	0	0
0	0	0	1	$a \wedge b$
0	0	1	0	
0	0	1	1	b
0	1	0	0	
0	1	0	1	a
0	1	1	0	
0	1	1	1	$a \vee b$
1	0	0	0	
1	0	0	1	$a \Leftrightarrow b$
1	0	1	0	
1	0	1	1	$a \Rightarrow b$
1	1	0	0	
1	1	0	1	
1	1	1	0	
1	1	1	1	1

FIGURE 19– Table de Ladd pour a et b

sont présentes et les deux autres absentes. Cette table constitue une visualisation des univers possibles, y compris un univers vide en ligne numérotée 0.

Ladd prend l'exemple où a est *animal* et b est *blanc* (noir dans le texte de Ladd). Elle remarque qu'alors la ligne 5 (0101) de la table est celle d'un univers composé d'animaux blancs et d'animaux qui ne sont pas blancs, donc l'univers de tous les animaux a (Ladd, 1883, p. 62). De même, la ligne 3 correspond à b .

Si nous écrivons au sommet de la table les deux cas a et b , nous obtenons une table de vérité pour a et b (Fig. 19 droite). Par exemple, la ligne 11 (1011), contient toutes les combinaisons sauf celle avec des animaux qui ne

sont pas blancs, donc elle correspond à un univers où tous les animaux sont blancs, donc à « a implique b » (avec notre terminologie). Nous pouvons compléter pour d'autres symboles logiques usuels. Ladd construit donc une table de vérité qui précède celles de Ludwig Wittgenstein et Emil Post.

Frege et Ladd se présentent comme des continuateurs du calcul logique de Boole et ils proposent de nouveaux graphismes qui utilisent les deux directions d'une page. En revanche, Venn se situe dans la continuité de la logique des syllogismes et il étend le graphisme des cercles d'Euler-Leibniz. Leurs trois graphismes permettent une visualisation de la logique qui la rend plus accessible, à un moment où elle se complexifie. Frege voit les mathématiques comme une partie de la logique (un domaine

d'application) et il ouvre ainsi la voie au « logicisme » de Couturat et de Bertrand Russell. Tandis que pour Venn, les mathématiques et la logique sont deux domaines indépendants. De son côté, Ladd entame une réflexion sur les symboles de la théorie logique, que Peirce amplifiera en une « philosophie de la notation » (Peirce, 1885).

Notre historique s'arrête là, mais l'histoire continue. La logique a été perfectionnée sous la forme d'un « symbolisme » au tournant du siècle, celui du *Formulaire* de Peano (1895-1908) puis celui des *Principia Mathematica* de Whitehead et Russell en 1910. Nous ne mentionnerons ici que deux théories de la logique contemporaine : la théorie des modèles et la théorie de la démonstration.

La théorie des modèles débute avec un article de 1870, où Peirce explique que l'algèbre logique de Boole a une « beauté tellement singulière », qu'il a voulu l'étendre en un système de notation pour la logique des relations (Peirce, 1870, p. 317). Cette théorie s'intéresse aux « choses », « aux mêmes objets mathématiques que le mathématicien classique : entiers naturels, nombres réels, groupes corps etc » (Lascar, 1998, p. 238, p. 237). La théorie de la démonstration est le sujet de la thèse de 1934-1935 de Gerhard Gentzen, qui se donne pour but l'analyse des preuves mathématiques telles qu'elles se produisent dans la pratique. Il considère que les preuves réelles ne sont pas basées sur des axiomes, comme dans la théorie axiomatique de Hilbert. Mais elles se caractérisent par le fait que les hypothèses sont analysées en partie et que la conclusion est également analysée en partie, jusqu'à ce que ces deux analyses se rencontrent et qu'une preuve puisse être synthétisée (von Plato, 2018).

Conclusion

De la logique des syllogismes d'Aristote à la logique algébrique de Boole, nous avons vu que des auteurs prennent appui sur les démonstrations mathématiques de leur époque : les démonstrations de la proposition euclidienne pour Aristote, celles de la méthode cartésienne pour Arnauld et Nicole, celles de la méthode analytique pour Leibniz et celles de l'algèbre symbolique pour Boole. Lors de chacune de ces quatre étapes, la logique a été revisitée par la prise en compte de nouvelles démonstrations issues des mathématiques. Ainsi, les logiques ne s'intéressent pas seulement au langage mathématique, comme il est parfois soutenu, mais plus profondément au « moteur » mathématique. Elles ne s'intéressent pas tant aux paysages traversés, qu'aux « rouages » démonstratifs.

Quels rôles et quelles différences entre langage et symbolisme mathématiques et logiques ?

Le langage mathématique utilise un large vocabulaire de mots pour désigner les « choses » mathématiques (nombres, figures, équations, fonctions, matrices, etc), leurs « propriétés » et les « relations » entre elles (égalité, équivalence, etc). Les choses et leurs relations font l'objet de « propositions », c'est-à-dire de connaissances obtenues par des « démonstrations ». Les démonstrations utilisent les conjonctions « donc », « puisque », etc. et les mots désignant les « opérations » sur les choses dans différents types de « constructions », de « calculs », de « méthodes algébriques », de « méthodes analytiques » ou de « méthodes vectorielles ». Le symbolisme introduit au 16^e siècle désigne les choses, connues ou inconnues, les opérations arithmétiques, puis les opérations du calcul différentiel et intégral aux 17^e et 18^e siècles. Il permet de visualiser d'un coup d'œil un résultat ou un calcul assez long.

En revanche, les langages et les symbolismes logiques ont pour but de faire voir les « rouages » démonstratifs. Chez Aristote, le langage logique est réduit à des lettres désignant des termes et à quelques mots. Ceci a l'avantage de faire voir l'articulation entre les termes, mieux que celle entre des assertions dans une démonstration euclidienne. La dénomination de « figure » pour les syllogismes peut donc être prise à la lettre, car ce sont des schémas visuels. La figure Barbara « Si A est affirmé de tout B et B de tout C , alors (nécessairement) A est affirmé de tout C » s'obtient en écrivant par trois fois la même suite de trois mots « est affirmé de ». La disposition en colonne chez Arnauld et chez Boole permet de mieux voir le schéma. Boole dispose en parallèle le calcul symbolique qui rend compte de l'exactitude algébrique du syllogisme (Fig. 12). Tandis que De Morgan écrit le syllogisme en ligne (Fig. 13).

Avec Leibniz, l'inventeur des symboles du calcul différentiel et intégral, l'aspect visuel de la logique est primordial. Nous avons vu qu'il choisit d'utiliser des figures géométriques, aussi bien en 1686, pour représenter des syllogismes, qu'en 1690 pour représenter des relations de composition et décomposition.

L'idée générale d'utiliser les deux dimensions de la feuille pour visualiser les « jugements » et leurs relations est explicite chez Frege, qui montre l'efficacité de ses idéogrammes. En 1913, dans un article dont le titre traduit en français est « Un essai pour améliorer notre raisonnement en sécurité et en liberté », Peirce explique l'avantage d'utiliser l'espace de la feuille (Peirce, 1913) :

« Le raisonnement dépend des signes graphiques. Par « graphique », j'entends capable d'être écrit ou dessiné, de manière à être disposé spatialement [...]. Je ne crois pas que l'on puisse approfondir un sujet de discussion

important et considérablement vaste sans utiliser l'espace comme un champ dans lequel organiser des processus mentaux et des images d'objets ».

De ce point de vue, la logique d'Aristote à Peirce est une entreprise d'écriture schématique ou diagrammatique des raisonnements et des démonstrations mathématiques. Ses symboles ne sont pas seulement des abréviations du langage, comme souvent en mathématiques, mais des outils (des organons) pour voir et donner à voir l'organisation de la pensée mathématique. Enseignés comme abréviations, ils risquent de ne devenir que cela. De plus, réduire la logique à un vocabulaire semble aussi peu pertinent que cela ne l'est pour les mathématiques.

Pourquoi et comment concevoir un enseignement du langage logique « en situation » ?

Pour Boole, la logique ne se réduit pas à des symboles, comme il l'indique en distinguant deux usages des symboles. Il y a, d'une part, un usage en connaissant leur signification et en comprenant ce qui rend leur utilisation légitime et, d'autre part, un usage sans connaissance de leur signification, quand ils ne sont « admis que par autorité ». Nous pouvons écrire la même chose du « vocabulaire logique » qui réduirait la logique à des mots.

Les symboles logiques doivent avoir d'emblée une signification mathématique, car, utilisés hors de leur « interprétation consistante », à l'occasion d'un « apprentissage de vocabulaire », ils courent là aussi le risque de devenir de simples abréviations du langage courant. Du côté des apprenants, il est donc nécessaire qu'ils connaissent suffisamment de mathématiques pour accéder aux significations des symboles et du langage logique et pour apprécier le bénéfice de leur usage.

Lisons ce qu'écrit Henri Poincaré, qui ne s'oppose pas à la logique mais au logicisme, dans *Science et méthode* (Poincaré, 1906, p. 140-141) :

« Quand le logicien aura décomposé chaque démonstration en une foule d'opérations élémentaires, toutes correctes, il ne possédera pas encore la réalité tout entière ; ce je ne sais quoi qui fait l'unité de la démonstration lui échappera complètement. [...] Prenons par exemple l'idée de fonction continue. Ce n'est d'abord qu'une image sensible, un trait tracé à la craie sur le tableau noir. Peu à peu elle s'épure ; on s'en sert pour construire un système compliqué d'inégalités, qui reproduit toutes les lignes de l'image primitive ».

Poincaré vise un « système compliqué d'inégalités » qui pourrait être :

$$(\forall \varepsilon) (\forall x) (\exists \eta) (\forall y) [(|x - y| < \eta) \Rightarrow (|f(x) - f(y)| < \varepsilon)]$$

Il ne conçoit pas qu'un professeur parte d'une telle définition : « Et pourtant, si le professeur ne rappelait l'image primitive [...], comment l'élève devinerait-il par quel caprice toutes ces inégalités se sont échafaudées de cette façon les unes sur les autres ? La définition serait logiquement correcte, mais elle ne lui montrerait pas la réalité véritable » (Poincaré, 1906, p. 141).

Pourtant, dans les années 1970, cette définition a servi lors de l'introduction de la notion de fonction continue. Mais connaître par cœur la formule plus haut ne permet pas de montrer qu'une fonction donnée est discontinue, elle ne permet pas d'inventer le contre-exemple. En même temps les symboles de quantification ont été considérés comme des abréviations pour les enseignants et leurs élèves. Ils finissent par être bannis de l'enseignement, comme un certain nombre de symbolismes ensemblistes.

En conclusion, ce que peut nous apprendre l'histoire de la logique peut se décliner en deux temps.

Elle nous apprend, comme pour tous les symboles mathématiques, l'intérêt de :

1) Expliciter auprès des élèves les rôles et les significations des signes : les symboles ne sont pas simplement des notations ils ont une intelligence propre, capable de relier (*inter*) ce qui a été choisi (*legere*).

2) Attirer l'attention des élèves lors de l'introduction de symboles : à leur caractère arbitraire ; à leur prononciation ; au passage d'une signification à une autre pour un même symbole.

Elle nous apprend, comme dans toutes les mathématiques certes, mais d'une manière spécifique, l'intérêt d'un apprentissage de la visualisation :

3) Inciter les élèves à regarder les choses mathématiques, figures et formules, mais aussi ici les démonstrations (les répétitions et les agencements de schémas symboliques ou langagiers) ;

4) Laisser le temps aux élèves de reconnaître ces schémas et de savoir les utiliser en pleine connaissance (explicite) ;

5) Utiliser des schémas utiles pour représenter des raisonnements ;

6) Encourager les élèves à représenter graphiquement sur des feuilles de papier, « en sécurité » et « en liberté », leurs idées et leurs raisonnements.

Cela signifie qu'un apprentissage de la logique doit, comme dans l'histoire, suivre celui des mathématiques. Comme cela a souvent été exprimé, avant et après Galilée, le meilleur

exprimé, avant et après Galilée, le meilleur terrain pour apprendre à raisonner est celui des mathématiques. La logique renforce cet apprentissage en nous montrant comment nous sommes passés des tours et détours des raisonnements au chemin démonstratif.

Références bibliographiques

Arnould, Antoine, Nicole, Pierre (1662), *La logique ou l'art de penser*, Paris, Savreux.

Barbin, Évelyne (1995), Saisir l'irrationnel : dire, montrer, faire toucher, *Bulletin de l'APMEP*, 400, p. 775-796.

Barbin, Évelyne (2006), *La révolution scientifique du 17^e siècle*, réédition en format poche en 2019, Paris, Ellipses.

Barbin, Évelyne (2019), On French Heritage of Cartesian Geometry in *Elements* from Arnould, Lamy and Lacroix, in Bjarnadottir, K., Furinghetti, F., Karp, A., Prytz, J., Schubring, G., (éds.), *Proceedings of the Fourth International Conference on the History of Mathematics Education*, Utrecht, University of Utrecht, p. 11-30.

Barbin, Évelyne, Menghini, Marta, Moktefi, Amirouche (2013), Les dernières batailles d'Euclide : sur l'usage des *Éléments* pour l'enseignement de la géométrie au XIX^e siècle, in Barbin, É., Moyon, M., (éds.), *Les ouvrages de mathématiques entre recherche, enseignement et culture*, Limoges, PULIM, p. 57-68.

Boole, George (1847), *The mathematical analysis of Logic*, Cambridge, Macmillan, Barclay & Macmillan

Berlio, Dominique, Drapeau Contim Filipe (1998), Un essai logique de Leibniz, « Le calcul des ingrédients », *Revue d'histoire des*

sciences, 51/1, p. 35-64.

Couturat, Louis (1903), *Opusculs et fragments inédits de Leibniz*, Paris, Félix Alcan.

Euclide (1990), *Les Éléments*, trad. B. Vitrac, vol. 1, Paris, PUF.

Diderot, Denis, D'Alembert, Jean Le Rond (1765), *Encyclopédie ou Discours raisonné des sciences, des arts et des métiers*, tome 1, Paris, Briasson, David, Le Breton, Durand.

Descartes, René (1949), *Œuvres et lettres*, Paris, La Pléiade.

Descartes, René (1970), *Règles pour la direction de l'esprit*, trad. Sirven, Paris, Vrin.

Descartes, René (1987), *Discours de la méthode*, Paris, Fayard.

Durand-Richard, Marie-José (2002), L'école algébrique anglaise (1812-1854) : apports et prolongements, *Bulletin de l'APMEP*, 442, p. 613-629.

Frege, Gottlob (1971), *Écrits logiques et philosophiques*, trad. C. Imbert, Paris, Points Essais.

Frege, Gottlob (1999), *Idéographie*, trad. C. Besson, Paris, Vrin.

Galilée (1992), *Discours concernant deux sciences nouvelles*, trad. M. Clavelin, Paris, Fayard.

Gergonne, Joseph Diez (1816-1817), Essai de dialectique rationnelle, *Annales de mathématiques pures et appliquées*, tome 7, p. 189-228.

Ladd, Christine (1883), On the Algebra of

Logic, in *Members of John Hopkins University, Studies in Logic*, Boston, Little, Brown and Company, p. 17-71.

Lascar, Daniel (1998), Perspective historique sur les rapports entre la théorie des modèles et l'algèbre, *Revue d'histoire des mathématiques*, 4, p. 237-260.

Morgan, De, Auguste (1847), *Logique formelle ou le calcul de l'inférence nécessaire et probable*, London, Taylor and Walton.

Peirce, Charles Sanders (1867), Upon the logic of mathematics, *Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences*, vol. 7, p. 402-412.

Peirce, Charles Sanders (1870), Description of a notation for the logic of relatives, resulting from an amplification of the conceptions of Boole's calculus of logic, *Memoirs of the American Academy*, 9, p. 317-378.

Peirce, Charles Sanders (1885), On the algebra of logic: A contribution to the philosophy of notation, *The American Journal of Mathematics*, vol. 7, 2, p. 180-202.

Peirce, Charles Sanders (1913), An Essay toward Improving Our Reasoning in Security and in Uberty, in *Charles S. Peirce papers*, 1839-1914, manuscript (682) 44, p. 1-53.

Peyrard, (1804), *Les éléments de géométrie d'Euclide*, Paris, Louis.

Poincaré, Raymond (1906), *Science et méthode*, Paris, Flammarion.

Pasini, Enrico (1997), Arcanum Aris Inveniendi, in *Otte, M., Panza, M. (éds), Analysis and Synthesis in Mathematics: History and Philosophy*, Dordercht, Kluwer, p. 35-46.

Smith, Gordon, (1982), *The Boole-DeMorgan Correspondence*, 1842-1864, Clarendon Press, Oxford.

von Plato, Jan (2018), The development of proof theory, *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, <https://plato.stanford.edu/cgi-bin/encyclopedia/archinfo.cgi?entry=proof-theory-development>.