REPERES - IREM. N° 132 octobre 2023

VARIATIONS SUR DES INTERVENTIONS ORALES DES ENSEIGNANT.E.S RELIANT LE TRAVAIL DES ELEVES EN CLASSE ET LE SAVOIR EN JEU

Monique CHAPPET-PARIES
Aline ROBERT
IREM de Paris

Résumé : Dans cet article, nous étudions certaines interventions orales, en classe, des enseignant.e.s de mathématiques du secondaire. Nous nous sommes restreintes aux interactions où le professeur s'appuie sur ce qui vient des élèves (dit, écrit, fait) et le relie aux mathématiques visées (connaissances ou activités), en particulier pendant un cours. Nous précisons plusieurs catégories de ces extraits de discours (appelées proximités), en référence notamment aux activités possibles des élèves et aux contextes. Nous illustrons l'étude avec des exemples variés tirés de deux cours : l'introduction du théorème de Thalès en troisième et la présentation de la formalisation du sens de variation des fonctions en seconde. Dans les deux cas une analyse mathématique des notions à enseigner croisée avec les programmes et les difficultés connues des élèves (« relief ») est présentée. Elle permet de justifier et d'interpréter les interactions retenues, voire de prévoir les limites éventuelles de ce type d'accompagnement. Nous discutons en conclusion de ce que les enseignant.e.s peuvent faire de ce type de descriptions.

En classe, et en toute généralité, les interventions orales des enseignant.e.s peuvent être soit prévues, notamment pour les développements mathématiques, soit improvisées, plus ou moins liées à ce qui passe dans la classe. Parmi elles, nous nous intéressons ici à celles où nous repérons un lien entre ce qui vient des élèves (dit, écrit, fait) et les mathématiques visées (connaissances [1], activités [2]). Ces dernières interventions, parmi d'autres commentaires, peuvent être produites à tous les moments des séances, résolutions d'exercices, ou moments d'exposition des connaissances (cours), ou corrections, individuellement ou collectivement. Elles peuvent être portées par des aides ou des explicitations, qui ne relèvent cependant pas toutes de ce que nous étudions. Il s'agit ainsi de n'analyser que les éléments du discours de l'enseignant [3] à la classe, qui font, à notre avis, ce lien. On évoquera des proximités ou des commentaires porteurs de proximités. La question

1 Le mot est à prendre au sens large, connaissances relatives à un savoir à enseigner, aussi bien définition, théorème ou propriété qu'exemple, procédure ou méthode… On utilise savoir, ou notions pour évoquer des mathématiques enseignées, sans toutefois faire de distinction entre tous ces termes.
2 La notion est précisée plus loin.
3 A partir de cet endroit du texte, nous utilisons le mot « enseignant » pour qualifier à la fois enseignant et enseignante sauf si on connait et respecte l'identité de la personne en jeu.

posée est celle de leur contribution spécifique potentielle à la compréhension et aux apprentissages des élèves, comme un élément pouvant s'ajouter aux autres leviers à la disposition de l'enseignant (Robert & *al.*, 2012).

Nous justifions cette centration particulière de l'étude par l'adoption et l'adaptation à nos questions de l'hypothèse de Vygotski (1984/1997) mettant en jeu la Zone Proximale de Développement des élèves (ZPD). Sont concernés en particulier des moments où les élèves seuls n'arrivent pas encore à réaliser complètement une tâche mathématique, même avec réflexion, ou à formuler une nouvelle connaissance même après une activité d'introduction, mais sans en être très loin. Ce peut être parce qu'ils n'ont pas pensé aux connaissances déjà présentées à mettre en œuvre, ou ne savent pas les utiliser, ou que ça reste trop vague, confus, par exemple, ou encore que ce qui est attendu est trop éloigné de ce qu'ils peuvent produire. L'enseignant apporte par son discours à la classe, mettant en relation travail des élèves et mathématiques visées, des éléments que les élèves peuvent reconnaître, reprendre ou comprendre en partie, notamment grâce aux commentaires ajoutés. Autrement dit, comme les élèves ne sont pas très « loin » de la résolution ou de la compréhension visées, qui sont préparées par leur travail, cela rend « appropriables » ces interventions de l'enseignant : c'est l'hypothèse adoptée ; elles sont suffisamment proches à la fois de ce qui est visé et de ce que les élèves savent, ont fait ou peuvent faire, du moins collectivement, pour qu'ils puissent en tirer parti. C'est cette double proximité, portée par le discours de l'enseignant, entre du nouveau mathématique et ce qui est déjà-là côté élèves, plus ou moins explicité, qui est en jeu (cf. Vandebrouck & Robert, 2023 à paraître). Le caractère collectif des interventions, basées sur tout ce qui vient des différents élèves, et ainsi partagé, peut jouer aussi pour favoriser l'intériorisation ultérieure individuelle attendue. Nous « opérationnalisons » ainsi le postulat de Vygotski qu'un apprentissage des élèves pourra suivre ce moment de partage des activités des élèves avec l'enseignant et la classe, évidemment compte tenu aussi de ce qui suivra. Ce modèle sert de référence à nos recherches.

Cela s'inscrit en complément des autres hypothèses admises sur les apprentissages, qu'elles soient didactiques ou plus générales. Ce peut être la nécessité d'un travail autonome des élèves contribuant à donner du sens à leurs acquisitions (suite à Piaget) ou la référence à la conceptualisation[4] pour modéliser l'apprentissage (suite à Vergnaud, 2002).

D'autres recherches sur les interventions orales des enseignants de mathématiques s'appuyant sur le travail des élèves et faisant le lien avec les savoirs (ou connaissances), concernent les moments de correction des erreurs des élèves, voire plus largement l'évaluation formative (Pilet, Alard & Horoks 2019). C'est un autre point de vue, proche de celui qui est présenté ici, qui est cependant développé davantage dans les phases de résolution d'exercices, souvent plus directement lié aux apprentissages individuels, et ciblé sur les itinéraires personnels.

Les recherches didactiques à l'origine de la présentation faite ici ont été réalisées à partir d'analyses des déroulements de séances en classe au collège et au lycée. Elles sont centrées sur les interventions orales de l'enseignant telles que précisées ci-dessus. Les données sont la plupart du temps des transcriptions de séances filmées par les enseignants eux-mêmes

4 Nous associons l'apprentissage des élèves pour une notion donnée au processus de conceptualisation défini par Vergnaud. Ce processus conduit à la disponibilité des connaissances en jeu sur la notion, c'est-à-dire leur utilisation à bon escient même si ce n'était pas indiqué, ou au moins à leur utilisation correcte lorsque c'est indiqué et en même temps à leur réorganisation dans l'ensemble des acquis des élèves.

5 Merci encore aux enseignants qui nous ont envoyé leurs vidéos.

[5]. Nous avons d'abord étudié les moments de cours (Allard & al., 2016, Bridoux & *al.*, 2016, Chappet-Paries & *al.* 2017a, 2017b, Robert & *al.* 2021) puis nous avons élargi aux résolutions d'exercices (Chappet-Paries & *al.* 2023). L'étude révèle des diversités dans la nature de ces interventions orales, selon les contenus mais aussi selon les enseignants et les classes, aussi bien en cours que pendant les exercices. Il en résulte à nos yeux, et cela justifie la démarche, des conséquences potentiellement différentes sur les activités développées par les élèves, et donc sur leurs apprentissages (cf. ci-dessus).

Dans tous les cas, nous nous inspirons, pour apprécier ce type d'interventions, d'une étude préalable des éléments mathématiques visés dans l'enseignement étudié, que nous appelons le relief sur le savoir en jeu (Robert, 2010, Robert & al. 2012). Il s'agit d'une analyse croisant des aspects mathématiques spécifiques de la notion à enseigner, les programmes à considérer dans l'étude en jeu et les difficultés déjà connues des élèves. Ces dernières peuvent être décrites dans des recherches ou faire partie du bagage professionnel commun. Cela permet de caractériser les mathématiques à enseigner en précisant le découpage qu'en font les programmes et en y intégrant les aspects cognitifs déjà repérés. Ce relief est relatif à un niveau scolaire donné et à une période donnée : selon les programmes en particulier, une notion peut être présentée comme une extension de ce qui précède, ou au moins être introduite à l'occasion d'un problème que les élèves peuvent aborder, si ce n'est résoudre. Cela va être partiellement le cas pour le théorème de Thalès en troisième, traité ci-dessous. La notion peut aussi s'avérer éloignée de ce que les élèves connaissent déjà : c'est ce qui se passe pour la formalisation algébrique de la croissance des fonctions, en seconde, traitée en deuxième illustration. Cette caractéristique des notions enseignées a des conséquences non seulement sur les difficultés correspondantes des élèves, mais encore sur les introductions envisageables et aussi sur les accompagnements prodigués par les enseignants en classe.

Dans ce texte nous donnons des exemples de nos analyses des interventions orales de l'enseignant en classe susceptibles de porter une proximité. Les extraits choisis pour ce faire sont tirés de séquences assez récentes, comportant un moment de cours (exposition des connaissances) ; ils correspondent à différentes activités des élèves, dont celles, difficiles à observer, de participer à un cours. Tous les éléments de discours à la classe, commentaires, questions, réponses, etc. porteurs d'un lien entre travail des élèves et savoir mathématique visé, peuvent être concernés. Un des principaux outils que nous mettons au travail pour préciser ce qui se joue est une classification de ces proximités en relation avec la nature de ce lien, précisée ci-dessous (en I 2)). Soulignons que nous ne nous sommes pas donné les moyens de vérifier que les élèves ont ou non profité de l'intervention.

Dans la partie I nous précisons d'abord ce que nous retenons comme éléments de discours à étudier, puis, à partir d'exemples simplifiés, nous présentons nos classifications et reprenons rapidement les résultats de nos recherches sur la question. Nous illustrons ce type d'études dans les parties II et III par des exemples tirés de déroulements de séances portant respectivement sur l'introduction du théorème de Thalès en troisième en II, et sur l'introduction de la définition formalisée de la croissance des fonctions en seconde en III. Après avoir présenté le relief sur la notion en jeu, nous montrons à chaque fois un certain nombre de (candidats) proximités, en illustrant leurs relations avec les tâches et les contextes, et en dégageant leurs variabilités. Nous concluons sur ce que les enseignants pourraient faire de ces outils.

1. — A la recherche d'une « plus-value » cognitive du discours oral en classe : une classification des proximités.

1. 1. *Des précisions sur ce qui est mis à l'étude*

Le discours oral de l'enseignant en classe de mathématiques est « mixte » au sens de Laborde (1982) avec différents types de langage, familier, formalisé, vernaculaire, avec des fonctions variées. Il contient des éléments mathématiques et d'autres sur les mathématiques (métamathématique, ou méta), voire plus généraux (Chappet-Pariès, 2004). De plus ce discours a cette spécificité déjà citée d'être à la fois préparé et en partie improvisé, spontané. Ce dernier aspect est associé à l'adaptation en contexte, immédiate, à ce qui se passe en classe, selon les moments du travail, les élèves, les contenus, et les professeurs et c'est ce qui est en jeu ici.

Le travail effectif des élèves se produit au cours des activités passées et actuelles des élèves, mettant en jeu leurs connaissances, acquises ou en partie « déjà-là ». Rappelons que, pour nous [6], les activités sont associées aux actions visibles des élèves, dires, faires, écrits, mais aussi à leurs pensées et réflexions (moins accessibles). Soulignons qu'il reste toujours une marge d'incertitude sur ce « déjà-là », qui peut différer selon les élèves, ou être seulement supposé par l'enseignant, par exemple parce que cela a été « vu » précédemment, voire répété. Ainsi, se pose la question de disposer d'indices permettant d'identifier et d'apprécier ce lien, même s'il n'est pas entièrement explicité, entre les mathématiques ou les activités visées et le travail des élèves. Il est utile pour cela que les chercheur.e.s disposent d'une étude préalable de la notion en jeu, voire de la classe, qui les autorise à interpréter ce qui est dit dans le contexte. Par exemple, dans un problème d'optimisation, les élèves ont d'abord modélisé par une fonction l'aire d'un champ rectangulaire de dimensions variables et de périmètre donné ; en réponse à la question de l'enseignant : *n'oubliez pas la question qu'on se pose*, un élève dit : *le plus grand champ possible* et l'enseignant ajoute, de manière plus générale, en réintroduisant la fonction modélisant le problème : *Voilà trouver le plus grand champ possible en surface. Donc savoir si cette fonction elle a une valeur maximale*, intervention brève qui porte un lien entre ce que dit l'élève et une notion dont on sait qu'elle a été définie antérieurement dans le cours étudié ici avec le vocabulaire associé.

La plupart du temps ces prises de parole interviennent dans des commentaires « méta » [7], plus ou moins développés, sur les mathématiques en jeu et/ou ce qui est en train de se faire dans la classe. Nous avions déjà étudié ce discours méta, montré sa diversité et son intérêt éventuel et introduit une distinction entre les commentaires de niveaux de généralité différents du plus général au très particulier (Robert & Tenaud, 1988, Robert & Robinet, 1996) : ici ce sont les relations au savoir qui seront distinguées.

Ces interventions de l'enseignant peuvent être aussi des ajouts à une réponse d'élève, comme des précisions de vocabulaire par exemple ou prendre la forme de questions posées par le professeur, qui orientent la réflexion (ce qui en soi peut constituer un rapprochement), ou encore de réponses aux questions des élèves. Elles ont lieu pendant des interactions, mais peuvent être un peu éloignées du travail des élèves qui sert d'appui (on parlera de proximités différées).

Quelquefois enfin ce peuvent être les élèves qui produisent des proximités : répondant à

6 En référence au cadre de la Théorie de l'Activité dans laquelle s'inscrivent nos recherches.

7 Nous ne spécifierons plus « méta » dans ce qui suit.

une question d'élève sur l'utilisation du signe + dans un tableau de signes, un autre élève indique : « *tu mets plus quand c'est plus grand que zéro, moins quand c'est plus petit* » (Chappet-Paries & al. 2017a), p.65).

Soulignons enfin que nous n'avons pas d'indications suffisantes pour affirmer que les (des) élèves ont entendu les interventions en jeu et en ont « profité ».

1. 2. *Différents types de proximités : notre catégorisation.*

Nous pensons que différents processus de conceptualisation (apprentissages) peuvent être induits par un appui explicité sur un travail des élèves. Certains commentaires débouchent sur une généralisation, lorsque l'appui se fait à partir d'activités en contexte, ou d'un savoir déjà-là. D'autres, au contraire, portent la mise en lumière de l'application d'une connaissance générale vers une utilisation en contexte. Cela accompagne, à nos yeux, différentes activités complémentaires nécessaires qui interviennent toutes en mathématiques, entre savoir contextualisé et décontextualisé. De ce fait l'explicitation portée par la proximité peut contribuer à provoquer des prises de conscience diverses et utiles des élèves à partir de ce qu'ils ont fait. Cela peut renforcer les progrès sur la mise en fonctionnement des connaissances avec les adaptations en jeu, lorsque c'est une décontextualisation qui est commentée, par exemple ; cela peut aussi favoriser la prise de sens ou la disponibilité des connaissances, ou encore préparer l'exposé d'une nouvelle connaissance, lorsque c'est le passage d'un travail en contexte à un savoir qui est repris. Enfin ce serait l'organisation des connaissances entre elles et la coordination de leurs différents aspects qui pourrait être en jeu dans les commentaires sans changement de niveau de généralité, restant en contexte ou restant décontextualisés.

Nous avons donc attribué des noms différents aux proximités repérées, évoquant le sens de la dynamique entre particulier et général qui peut être portée par l'intervention. Nous donnons pour illustrer ce propos des exemples inspirés de séances réelles, mais simplifiés. En effet pour repérer des candidats proximités, les apprécier comme telles, il faut les situer précisément dans le contexte, avec ce qui précède dans la classe et le relief sur la notion, ce dont nous nous passons ici. C'est ce que nous ferons en revanche dans les « vrais » exemples traités ensuite.

1. 2. a. Les *proximités ascendantes* interviennent au cours d'une généralisation, explicitée, à partir du travail des élèves, notamment vers quelque chose de nouveau (activité, connaissance). Nous pouvons en repérer pendant les activités préparatoires, pendant un cours ou une séance d'exercices.

Un exemple : introduire la propriété :

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a}\sqrt{b}$$

Dans un exercice de géométrie, en seconde[8], les élèves sont amenés à calculer la longueur d'un segment [AB] par deux méthodes différentes (en utilisant le théorème de Pythagore et le théorème de Thalès). Ils trouvent respectivement AB = $2\sqrt{5}$ et AB = $\sqrt{20}$. Ils en déduisent donc que

$$\sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5} = \sqrt{4} \times \sqrt{5}.$$

L'enseignant peut alors expliciter la propriété visée entre la racine du produit et le produit des racines et en suggérer une généralisation, avec un discours du type : « *Vous avez constaté que* $\sqrt{4 \times 5} = \sqrt{4} \times \sqrt{5}$ *à partir du*

8 C'est dans cette classe que se fait ce cours dans les programmes actuels.

calcul d'une longueur fait de deux manières, et en remplaçant 20 *par* 4 × 5 *et* 2 *par racine de* 4. **Autrement dit vous avez constaté que la racine du produit de 4 par 5 est égale au produit de racine de 4 par racine de 5**, *racine de* 4 *fois racine de* 5 *; on peut se demander s'il y a une propriété générale* des racines carrées d'un produit *dont cette égalité serait un cas particulier (*proximité ascendante*).*

Eh bien la réponse est oui : a et b étant deux réels positifs, **avec *a* et *b* au lieu de 4 et 5**, *on peut établir que la racine du produit* **de *a* par *b*** *est égale au produit de l*a **racine de *a* par la racine de *b*** *:* $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ *. Et on va le démontrer… »*

Ce discours dépend bien entendu de la tâche proposée aux élèves, et de ce qu'ils ont fait : l'enseignant a ainsi fait chercher une égalité qui est un cas particulier de la propriété visée, en espérant avoir deux démarches et deux expressions de la réponse et il a gagné. Mais à partir de la résolution de l'exercice, l'enseignant a aussi énoncé une formulation de cette égalité susceptible d'être généralisée : cela lui a permis de préciser que c'est (déjà) un cas particulier d'une propriété générale, faisant ainsi un lien explicité entre ce que les élèves ont travaillé en contexte et le savoir visé.

Il aurait pu simplement dire, sans proximité (en supprimant les extraits de phrases mises en gras ci-dessus) « *Vous avez constaté que* $\sqrt{4 \times 5} = \sqrt{4} \times \sqrt{5}$ *. De manière générale a et b étant deux réels positifs, on peut établir que la racine du produit est égale au produit des racines* $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ *. Et on va le démontrer… »* Nous pensons qu'alors les élèves n'auraient pas tous fait le lien entre un constat à partir de l'égalité mettant en jeu 4 et 5, non explicité ni formulé, et la formule finale. Ces élèves pourraient ne pas réaliser ce qu'il faut remarquer dans l'égalité numérique et qui sera à généraliser. Cette généralisation avec *a* et *b* est présentée dans une formulation condensée, peut-être difficile — de quel produit s'agit-il ? L'enseignant aurait aussi pu demander aux élèves, pour pallier cette difficulté, de formuler eux-mêmes une généralisation, de nouveau au risque de les différencier.

1. 2. b. Les *proximités descendantes* interviennent au cours de la contextualisation dans le travail des élèves de quelque chose de général, déjà présenté, voire déjà connu (savoir, activité).

Un exemple d'utilisation du cours sur les racines carrées

Dans un exercice, après le cours sur les racines carrées, les élèves ont à simplifier l'écriture de $\sqrt{72}$. C'est une tâche classique où on attend, en guise de simplification, une expression de la forme $a\sqrt{b}$ avec *b* « minimum ». On est dans une classe où les élèves hésitent. L'enseignant leur rappelle qu'une des propriétés établies en cours consiste à transformer la racine d'un produit en produit des racines. Il demande alors à quel produit on peut penser. Certains élèves décomposent 72 en 2 × 36 ou en 3 × 24, ou en 8 × 9, et sont encouragés à mettre en fonctionnement la propriété en question. L'enseignant reprend les résultats obtenus, $6\sqrt{2}$, $3\sqrt{8}$, $2\sqrt{2}\sqrt{9}$. Il fait d'abord vérifier que ces nombres sont bien égaux, par exemple en remplaçant $\sqrt{4}$ par 2 et $\sqrt{9}$ par 3. Puis il reprend : « *dans cet exercice vous avez utilisé deux propriétés vues en cours. D'abord la propriété sur la racine d'un produit, à partir d'une décomposition de 72, en remplaçant $\sqrt{72}$ par le produit des racines des facteurs obtenus. Et toutes les décompositions que vous avez trouvées étaient bonnes pour y arriver ! Ensuite vous avez aussi calculé la racine carrée d'un carré, en remplaçant $\sqrt{36}$ par 6, ou alors $\sqrt{4}$ par 2, ou alors $\sqrt{9}$ par 3, etc. Cela vous a permis de simplifier, c'est-à-dire d'obtenir l'expression $6\sqrt{2}$ dans laquelle vous ne pouvez plus décomposer l'entier 2 dont on prend la racine.* »

Il aurait pu dire simplement : « *dans cet exercice vous avez utilisé deux propriétés vues en cours, dont la propriété sur la racine d'un produit. Cela vous a bien permis de simplifier* ». La proximité descendante ajoutée a permis d'expliciter les éléments généraux du cours que les élèves ont effectivement mis (ou pouvaient mettre) en fonctionnement, en indiquant les nombres en jeu. La supprimer pourrait priver au moins certains élèves de l'identification précise de ce qui a été substitué dans les formules du cours.

1. 2. c. Nous réservons le label de *proximités horizontales* à celles repérées lorsqu'il y a, au cours du travail des élèves, une qualification nouvelle d'un aspect déjà connu de la connaissance en jeu ou mise en lien avec une activité déjà faite. L'enseignant peut notamment signaler ou ajouter un changement de point de vue, ou de registre ou de cadre ou de formulation ou de vocabulaire, mais sans changement de niveau de généralité et sans incursion dans du nouveau. Par exemple c'est le cas quand un enseignant remplace la réponse d'élève « *chercher un champ de surface maximum* » par « *ce qu'on peut traduire, avec ce que vous venez d'établir, par chercher le maximum de la fonction donnant l'aire du champ* », dans un contexte où tous ces éléments ont déjà été travaillés, en seconde.

Cela dit, quelquefois un commentaire joue sur plusieurs aspects à la fois. Par exemple, une proximité peut d'une part porter le rappel, dans une situation précise, d'une connaissance déjà présentée (descendante), et en même temps suggérer la généralisation des activités ayant utilisé en contexte cette connaissance (ascendante). De plus, selon les connaissances des élèves, un même commentaire peut évoquer quelque chose de connu ou ne rien rappeler, pouvant constituer ainsi ou non une proximité.

Les différences de contenus, de scénario et de gestion de la classe induisent des différences dans les occasions et les types des proximités produites par l'enseignant, ce sur quoi nous revenons ci-dessous.

2. — Des proximités en phase avec le projet de l'enseignant : le théorème de Thalès en troisième, une activité d'introduction et le cours

Les séances de troisième, « le tipi »[9], filmées en 2020, dont nous allons commenter des extraits, se déroulent dans un établissement classé REP (en temps de covid, tout le monde

9 C'est nous qui donnons ce nom à la séance.

a son masque !). Les citations, tirées de la transcription, sont en italique. L'objectif de la séquence est l'introduction et la présentation du théorème de Thalès, selon le programme en vigueur (le scénario est indiqué ci-dessous). Nous commençons par indiquer des éléments de relief sur la notion à enseigner.

2. 1. *Le programme, les mathématiques en jeu et les difficultés des élèves : éléments de relief*

Le programme actuel (2016, compléments en 2018 et 2020), tel qu'adopté par notre enseignant, est assez différent des précédents et nous nous y restreindrons ici [10], sans le discuter.

En effet les triangles semblables sont présentés en quatrième, avec la définition (angles égaux) et la propriété caractéristique de proportionnalité des côtés homologues, non démontrée en général Quelquefois on inverse définition et propriété. Le théorème de Thalès s'applique seulement dans une configuration particulière (triangles semblables déterminés par deux parallèles coupant deux droites sécantes) — avec les deux versions « triangles emboîtés » et « papillon » — et ne fait que traduire la proportionnalité des longueurs des côtés homologues.

Le théorème de Thalès, et sa réciproque, non étudiée ici, s'expriment ainsi comme une caractérisation, en termes de rapports de longueurs, du parallélisme de deux droites dans ces configurations particulières. Une application importante (savoir-faire) est le calcul de la longueur d'un côté d'un triangle à partir de trois autres longueurs de côtés (bien choisis), et aussi la possibilité de savoir si deux droites sont parallèles lorsqu'on connait les longueurs de 4 côtés bien choisis des triangles en jeu.

Ajoutons que ces longueurs sont données soit numériquement soit algébriquement (variables positives). Une raison d'être du théorème pourrait être cette traduction d'une propriété géométrique en une propriété algébrique (et réciproquement), donnant lieu à des calculs liés à la proportionnalité. Les objectifs de l'étude peuvent être à la fois l'acquisition du théorème (et de sa réciproque), avec sa mise en fonctionnement correcte, et sa disponibilité, c'est-à-dire la possibilité de recourir au théorème à bon escient même si ce n'est pas indiqué, y compris dans des situations dites « concrètes ».

Pour introduire le théorème on peut s'appuyer sur le fait que les triangles semblables et la proportionnalité associée ont déjà été étudiés, au moins partiellement, par les élèves (en quatrième). Ainsi les ingrédients en jeu sont connus, même s'ils sont admis, mais on peut noter aussi qu'ils ne sont pas rappelés directement dans les nouveaux énoncés (les mots semblables et proportionnels ne figurent pas en général). Le théorème constitue ainsi une extension spécifique de ce qui est déjà connu, dans la mesure où les triangles en jeu doivent former une configuration particulière, qui n'a pas été nécessairement déjà étudiée. On peut penser à faire porter l'introduction sur ces figures nouvelles.

Du côté des élèves, plusieurs difficultés accompagnent l'acquisition du théorème (direct). Il y a d'abord une difficulté géométrique (bien renseignée dans Horoks, 2008) : c'est l'identification des couples de côtés à associer pour écrire correctement les rapports de longueurs qui sont égaux. On peut, par exemple, à partir de la version de la configuration concernée, repérer les côtés dont les extrémités sont sur la même droite ou demi-droite et/ou ceux qui sont parallèles, et les associer, ou encore recon-

10 Contrairement à ce qui est présenté dans l'étude très compète sur l'enseignement de ce théorème au collège du groupe de géométrie de l'IREM de Paris (2020).

naître l'agrandissement ou la réduction entre les deux triangles pour préciser la correspondance. Le repérage est ainsi souvent fait par les enseignants ou dans les manuels, directement, sans revenir aux triangles, à partir de l'alignement des points en jeu.

Il peut y avoir une autre difficulté géométrique bien connue à distinguer les deux types de configurations et à choisir celle qu'on va utiliser.

L'autre grande source de difficultés est le travail algébrique à faire sur les rapports, une fois écrits. Le traitement de la proportionnalité, exprimée sous une forme élaborée, faisant intervenir directement des fractions, peut la cacher pour certains élèves. Quand le lien n'est pas fait entre l'égalité des fractions à écrire et le tableau « brut » donnant les longueurs des côtés homologues, les élèves peuvent ne pas reconnaitre qu'il s'agit bien de calculer (par exemple) une quatrième proportionnelle. De plus il faut choisir une méthode pour trouver cette quatrième proportionnelle (coefficient de proportionnalité au cas où le tableau est écrit ou, plus souvent recommandé, « un produit en croix »). Se pose aussi la question plus banale d'un choix parmi les deux égalités pour repérer celle qui est utilisable. Le calcul de certaines longueurs, que l'on doit obtenir à partir de données intermédiaires pour appliquer le théorème, peut être une source d'adaptations délicates, y compris lorsque leur expression mélange inconnue et nombres (du type $x + 4$).

Enfin la formulation usuelle de l'énoncé du théorème est souvent compliquée, et de ce fait plus ou moins difficile à mémoriser et même à appliquer (cf. Hache, 2017).

Ainsi, au sein du programme envisagé ci-dessus, le relief sur le théorème introduit en troisième, indique qu'on a affaire à une notion partiellement extension d'une autre notion connue, mais restreinte à deux figures particulières, peut-être nouvelles. Si on fait chercher aux élèves ces figures, la notion peut devenir aussi une réponse à un problème (RAP). Quoi qu'il en soit, il est important de faire travailler particulièrement la reconnaissance des configurations et la correspondance des côtés, l'écriture de la double égalité en relation avec la proportionnalité, puis la résolution numérico-algébrique à effectuer, avec les adaptations possibles, et de tenir compte des questions de formulation.

2. 2. *Le scénario adopté : une grande cohérence, dans le « respect » du relief*

L'enseignant s'appuie ici sur des connaissances déjà travaillées antérieurement (plus ou moins) : triangles semblables et proportionnalité, qu'il fait reprendre. Puis il propose une question ouverte qui amène les élèves à produire les configurations spécifiques du théorème et présente le cours. Des exercices suivent. Notre reconstitution du scénario a été validée par l'enseignant (Chappet-Paries & al. 2022).

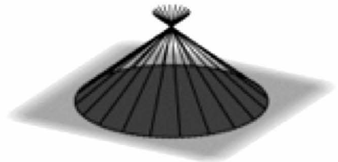
Il veut ainsi d'abord faire réviser les triangles semblables. Pour cela il propose un exercice, qu'il a adapté d'une ressource pédagogique de l'académie de Caen [11] (en annexe), en ajoutant le totem et la première question pour repartir du théorème de Pythagore. Les élèves doivent mettre en œuvre, dans la deuxième question, les triangles semblables pour calculer la longueur du côté d'un triangle (sans le théorème de Thalès !) – la troisième question, ajoutée aussi, amène à utiliser le théorème de Thalès.

Voici, page suivante, l'énoncé précis par lequel l'enseignant fait démarrer les élèves (analyse de la tâche en annexe).

11 https://mathsciences.discip.ac-caen.fr/IMG/pdf/scenario_tipi.pdf

<u>Exercice du Tipi :</u>

L'habitation traditionnelle des Indiens des plaines d'Amérique du Nord est le tipi. Un tipi est constitué de longues tiges de bois appuyées les unes aux autres, d'une enveloppe extérieure faite de peaux d'animaux et d'une porte toujours orientée vers l'Est.



Pour la reconstitution d'un village amérindien, on cherche à construire un tipi où chaque perche en bois mesure 9 mètres et dépasse de 1,5 mètres. Le diamètre du cercle tracé au sol mesure 12 mètres.

1) Le but de ce tipi est d'abriter un totem de 4 mètre de haut.
<u>Le tipi est-il assez haut pour acceuillir ce totem ?</u>
2) Les concepteurs souhaitent placer une plateforme circulaire au sommet du tipi.
<u>Quel sera le diamètre de la plateforme ?</u>
3) On y pense que maintenant... Les ailes du totem sont à une hauteur de 3,5 mètres et ont une envergure de 2,2 mètres.
<u>Est-ce que le totem peut rentrer dans le tipi sans dépasser des parois ?</u>

Cet exercice est résolu en trois temps très séparés. Il permet d'abord, grâce à la différence entre les deux premières questions, de dégager l'idée que le théorème de Pythagore, utile dans la première question, ne s'applique pas à toutes les situations où on doit calculer des longueurs. Le nouveau théorème qui va être introduit sera une autre possibilité (motivation, ajoutée à la ressource initiale).

Avant de terminer la deuxième question qui met en jeu des triangles semblables, l'enseignant intercale une révision de cours sur ces triangles, appuyée sur une fiche projetée au tableau qu'il commente : s'y trouvent la définition (angles égaux) et la propriété caractéristique (proportionnalité des longueurs des côtés). La résolution de la deuxième question permet ainsi de mobiliser et de renforcer ces connaissances anciennes.

La troisième question met en œuvre le théorème de Thalès. Elle ne sera cependant travaillée que plus tard, après la recherche d'une « conjecture », en fait une question ouverte, faisant le lien entre droites parallèles, sécantes et triangles semblables (en configurations de Thalès) : comment obtenir deux triangles semblables en traçant quatre droites ? Les élèves cherchent et l'enseignant corrige avec un affichage sur Geogebra de la relation entre la proportionnalité des côtés correspondants et le parallélisme de deux des droites, coupant les deux autres sécantes. C'est l'occasion de présenter le théorème comme une réponse (perceptive) à un problème et de faire visualiser la correspondance des côtés en jeu.

Suit le travail sur la fiche de cours sur le théorème de Thalès, projetée au tableau et distribuée, s'appuyant sur ce qui précède. Puis les élèves ont à utiliser le théorème dans un exercice d'application immédiate avant de reprendre la troisième question du tipi et de continuer sur d'autres exercices.

On constate ainsi que beaucoup d'aspects signalés comme importants dans le relief, dont les difficultés prévisibles des élèves, sont repris ou pris en compte ici, ce qui rend peut-être plus facile le passage à l'exposition des connaissances. Mais comment le travail en classe se passe-t-il ? Comment se fait (ou non) cet appui que nous traquons entre connu ou fait d'une part et visé d'autre part ? C'est ce que nous allons illustrer dans ce qui suit, en prenant plusieurs exemples.

2. 3. *Les déroulements*

Nous avons choisi, au fil des déroulements, des exemples d'interventions porteuses de proximités variées. Ce ne sont en fait que des « candidats proximités », repérés par les chercheuses par la présence d'un lien plus ou moins explicite entre ce qui vient des élèves (ou supposé tel) et ce qui est visé. Nous ne pouvons être sûres que (tous) les élèves les perçoivent comme telles, entendent et reconnaissent le lien. Nous qualifierons cependant dorénavant directement de proximités les interventions choisies. Nous dégageons ce qui est en jeu à chaque fois.

Pendant l'exercice de révision

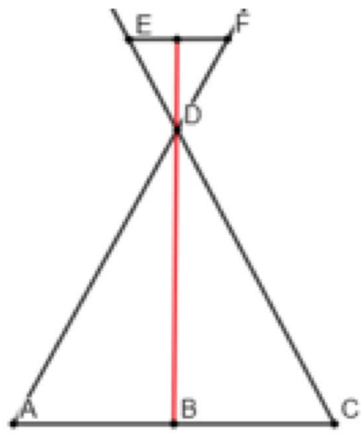
a) *Dès le début de l'exercice sur le tipi, un discours porteur d'une proximité ascendante entre l'activité de modélisation en cours et des activités à venir analogues*

L'énoncé de l'exercice montre un schéma de tipi en « 3D », qu'il s'agit donc de modéliser. L'enseignant propose aux élèves de « *se mettre dans une situation plus favorable* » pour calculer grâce au théorème de Pythagore, connu, la hauteur du tipi et ajoute ce commentaire qui relie les premiers essais des élèves, pendant 5 à 6 minutes, à l'activité visée :

« Est-ce que vous sentez que je suis en train de vous faire basculer dans autre chose qu'un dessin ? Ça c'est une opération qu'on vous fait rarement faire c'est passer d'un truc réel, vous allez chercher vous aller filtrer ce qui est réellement nécessaire à cet exercice. C'est ce travail qu'on appelle modélisation, passer d'une situation un peu réelle à une situation qui est entièrement mathématique. »

Ce rapprochement entre le travail fait en contexte et un type de situation peut faire écho à une raison d'être de ce genre de tâches, à une prise de sens plus générale, qui peut jouer dans une mobilisation à venir.

b) *Utiliser Pythagore et exprimer une longueur comme différence de deux autres au sein d'un calcul : pas d'appui sur le travail des élèves*



Comme nous l'avons déjà évoqué dans l'étude du relief, une des difficultés des élèves est d'exprimer une longueur comme une expression algébrique du type « $x + 4$ », somme d'une variable et d'un nombre et à l'utiliser dans un calcul. Cela correspond à un travail (implicite) dans $\mathbf{R}(x)$ en sachant que $\mathbf{R}$ est « plongé » dans cet ensemble. Mais ici nous constatons qu'un calcul numérique de longueurs en introduisant un intermédiaire (faire la différence de longueurs données) est déjà difficile.

Pour appliquer le théorème de Pythagore et calculer la hauteur DB demandée, les élèves ont ainsi d'abord à calculer la longueur DC. Pour cela ils doivent effectuer le calcul 9 – 1,5 compte tenu des données de l'énoncé. En observant le travail des élèves l'enseignant remarque un « blocage » chez nombre d'entre eux : « *Il y a une longueur que vous cherchez tous à obtenir.* »

Il trace un segment au tableau sur lequel il indique les points : « *Voici* D, *voici* C, *voici* E. *Comment trouver* DC *?… Je vais prendre* EC *en entier auquel je retranche* ED. EC *vaut* 9 – 1,5 *;* DC *fait ?* » les élèves répondent ensemble « *7,5* ».

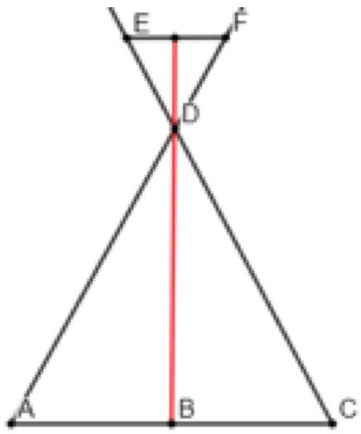
Une élève demande au professeur de valider son raisonnement alors qu'elle a effectué le même calcul. Ici, rien de va de soi ! Il n'y a pas de proximité possible puisque les élèves n'ont rien proposé oralement. Le professeur rappelle donc directement comment calculer la longueur d'un segment lorsque les points en jeu sont alignés.

c) *Pythagore n'est pas la réponse à tout : simple affirmation ou commentaire après une activité ?*

Pour résoudre la seconde question, les élèves (au moins certains) vont essayer d'appliquer encore le théorème de Pythagore. Le professeur va leur illustrer, preuve à l'appui (en démontrant que le triangle choisi n'est pas rectangle) que Pythagore n'est pas la réponse à tout et qu'ils ont donc besoin d'une autre connaissance. Cette explicitation s'avère ainsi utile pour certains élèves. Nous donnons ci-dessous des extraits de ce moment particulier.

Le professeur prend en charge la première partie du raisonnement sans appui sur le travail des élèves

Après la lecture à haute voix de la deuxième question de l'exercice, les élèves travaillent seuls pendant que le professeur observe leurs productions individuelles. Il précise la forme de la plateforme (disque) et montre sur la figure utilisée qu'on cherche EF.



Un élève propose, comme attendu, d'utiliser le théorème de Pythagore dans le triangle EDF. L'enseignant rétorque : « *Vous réinventez Pythagore dans* DEF *mais la question, où est le triangle rectangle ? Est-ce que j'ai un angle droit ? Je réponds non* ». Le professeur dit alors que s'il était rectangle le triangle DAC le serait aussi : « *J'ai les moyens de savoir si ce triangle est rectangle ou pa*s ? » les élèves répondent : « *Pythagore* » et il reprend *« la réciproque de Pythagore.* »

Un élève dicte le calcul correct à faire. Le triangle en jeu n'est pas rectangle, on ne peut pas appliquer Pythagore. Ici pas de proximités. L'enseignant, faute de temps peut-être, et/ou pour ne pas lasser ou perdre les élèves, semble vouloir accélérer la résolution pour arriver à ce qui est visé, c'est-à-dire la révision des triangles semblables et la proportionnalité des côtés.

Une proximité entre des connaissances acquises, une nouvelle connaissance, seulement citée (Thalès), et une connaissance déjà-là (triangles semblables)

Il s'agit maintenant de calculer cette longueur EF à l'aide du théorème (déjà exposé en quatrième) portant sur les triangles semblables et donnant la proportionnalité des longueurs des côtés respectifs. Voici la proximité énoncée par le professeur :

Point bilan : « *Que vous compreniez que Pythagore n'est pas votre seule arme … Je trouve la hauteur avec Pythagore, par contre pour trouver la longueur* EF, *Pythagore ça ne fonctionne pas. On passe par ce qu'on appelle le théorème de Thalès* (cité par un élève, encore inconnu des autres élèves). *Vous l'avez déjà entendu. Vous avez déjà travaillé l'année dernière les triangles semblables...* » L'enseignant explicite le besoin, éprouvé par les élèves, d'un calcul qui ne relève pas du théorème de Pythagore mais de quelque chose d'autre qu'ils ont déjà étudié et qu'il rappelle.

Le choix de tâche qui avait pour objectif de motiver l'introduction du nouveau savoir (le théorème de Thalès) s'est avéré efficace. Il donne lieu à une proximité ascendante, reliant l'échec du choix d'utiliser Pythagore et le besoin d'une connaissance autre, en fait en partie déjà là, mais pas encore mobilisée et ainsi préparée.

Pendant le cours suivant l'exercice

a) *Un commentaire de l'enseignant porteur d'une proximité (ascendante) sur les configurations en jeu dans le théorème et leur reconnaissance*

Pendant le cours qui suit les activités des élèves sur les deux premières questions du tipi, l'enseignant présente d'abord au tableau les configurations concernées par le théorème, que les élèves recopient, et conclut : *« il n'y a pas besoin de longueurs… Il faut que votre œil remarque systématiquement ces configurations. Je parle de configuration, c'est-à-dire, c'est un modèle géométrique, deux droites qui se coupent, deux droites parallèles… Et quand vous vous trouvez face à ce genre de figure, votre cerveau doit dire : ah il y a peut-être Thalès dans le jeu … »*

L'enseignant développe une description générale (modèle), en termes de droites, de configurations en jeu, qui reprend exactement, en la décontextualisant, l'activité préliminaire des élèves sur la conjecture (question ouverte) proposée à la classe et résolue collectivement : comment obtenir deux triangles semblables en traçant quatre droites, avec une règle, en faisant quatre traits...

La précision « il n'y a pas besoin de longueurs » ne reprend pas cette activité en revanche. Est-elle entendue ?

b) *Un commentaire porteur d'une proximité (horizontale) sur ce qui est en jeu dans la connaissance nouvelle*

Un peu plus loin dans le cours, l'enseignant précise, avant de rentrer dans le détail de l'exploitation de la proportionnalité des côtés, que si le théorème de Pythagore fait un lien entre un angle droit, un triangle rectangle, des droites perpendiculaires et une égalité numérique (aires) : « *Thalès c'est quelque chose d'aussi fort. Il va lier la proportionnalité qui vit dans un monde de tableaux et dans un monde de nombres à des droites parallèles et des droites sécantes, en géométrie ; voilà pourquoi ces deux théorèmes sont si impor-*

tants. Ils ont clairement établi des liens entre des propriétés géométriques et des opérations numériques. Maintenant le cœur de Thalès ça va être d'exploiter la proportionnalité… C'est vraiment l'ingrédient clef, notamment la quatrième proportionnelle qu'on a revue tout à l'heure ensemble. »

L'enseignant explicite de manière générale ce que représente le nouveau théorème dans le « paysage » mathématique des élèves, avec un vocabulaire courant, après avoir fait travailler les élèves sur les triangles semblables et leur avoir rappelé qu'on va exploiter la proportionnalité.

Pendant le premier exercice d'application

Un commentaire porteur d'une proximité descendante entre le cours qui vient d'être présenté et son application

Juste après l'exposé du théorème, les élèves travaillent sur un exercice d'application immédiate : il s'agit d'une configuration « papillon », les longueurs des côtés non parallèles sont données et on demande de calculer les longueurs des côtés parallèles. Les noms des points sont modifiés par rapport aux figures du cours.

Les droites (CD) et (HT) sont parallèles.

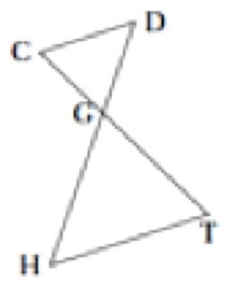
GD = 25 mm,

GH = 45 mm,

CG = 20 mm,

HT = 27 mm.

Calculer CD et GT



Après 12 minutes de travail individuel, les élèves ne démarrent pas tous, malgré l'indication d'utiliser le théorème de Thalès, déjà donnée au bout de 5 minutes. Le professeur, qui a circulé dans la classe, intervient : « *Je veux votre attention, là je l'exige. Je vous demande de bien comprendre que Thalès c'est exploiter de la proportionnalité grâce à du parallélisme…* (il le redit) *Dès que j'ai des droites sécantes et des parallèles j'obtiendrai de la proportionnalité je fais un tableau et j'arriverai comme on va le voir à déterminer les mesures qui manquent. Ça permet de calculer des longueurs sans avoir à tracer la figure ni à mesurer. C'est extrêmement puissant. Je vais pouvoir dire ce côté-là mesure tant. Et j'en suis certain, j'ai pas (sic) besoin je vous fais une prédiction qui est sûre à* 100%. *C'est là la puissance de Thalès. Je vais prédire des longueurs par le calcul.* »

L'enseignant introduit ainsi une proximité descendante entre la recherche des élèves (pour un calcul de longueurs) et le théorème déjà présenté, qui est à contextualiser. Ensuite le travail reprend et les élèves réussissent à finir, un d'entre eux allant au tableau pour corriger.

L'étude présentée ici est partielle, d'autres exemples de proximités, y compris différées dans des points de bilan, sont donnés dans Chappet-Paries & Robert (2022). Nous avons cependant illustré de manière variée la façon dont l'enseignant accompagne les élèves dans différents moments des séances en faisant des liens, appropriés à la conjoncture, entre ce qui vient des élèves et ce qu'il vise. Cela donne des exemples précis d'une gestion de classe qui prend beaucoup en compte ce qui vient des élèves (sans minorer les contenus), et qui peut inspirer une réflexion sur ce qui constitue, à nos yeux, un levier, parmi d'autres, pour faciliter les apprentissages.

Ainsi nous avons montré des proximités ascendantes et horizontales accompagnant l'introduction de nouvelles activités ou d'un nouveau savoir. Notre hypothèse, présentée au début de l'article, est que ces éléments de discours peuvent faciliter la compréhension des élèves à partir d'une activité faite en contexte : est en jeu ce qui peut être partagé dans l'explicitation de l'enseignant sur ce qui a servi et pourra être généralisé. Cela peut aussi contribuer à préciser ce qui est généralisé (et à retenir) dans tout ce qui a été fait en contexte. Les proximités descendantes peuvent éclairer une utilisation du nouveau savoir en contexte en en explicitant les modalités d'application ou, par exemple, en détaillant ce qui est à substituer dans une formule générale. Tout ce qui est explicité pourrait sinon échapper aux élèves ou rester trop vague. Nous avons aussi noté le choix de ne pas toujours développer de proximités, peut-être en relation avec le temps et les objectifs prioritaires.

3. — Une notion qui se prête mal à des proximités ascendantes « jusqu'au bout » : l'introduction de la définition formalisée des variations des fonctions

La classe de seconde où les séances ont été filmées dans les années 2015, est assez hétérogène d'après l'enseignant, avec des élèves qui suivent bien et d'autres plus en difficulté. L'établissement n'est pas classé REP. L'objectif visé par l'enseignant ce jour-là est l'exposition des connaissances sur le sens de variation des fonctions, jusqu'à la formalisation algébrique. Les élèves travaillent d'abord, le matin, en deux demi-classes sur une activité d'introduction, présentée plus loin, et l'après-midi l'enseignant fait le cours correspondant (Robert & Rogalski 2020, Robert & Vandebrouck 2023).

3. 1. *Le relief sur la notion*

Les études didactiques de certaines notions à enseigner indiquent qu'il y a une distance importante entre elles et ce que les élèves savent déjà. Cela a des conséquences sur la nature des rapprochements que l'enseignant peut faire entre le travail des élèves et la notion visée – il est possible qu'il faille surtout accompagner l'exposé de la notion d'interventions descendantes. Ce sont des notions difficiles, souvent exprimées avec un Formalisme Généralisateur et Unificateur (FUG) qui ne peut pas être ré-imaginé par les élèves seuls, à partir de leurs connaissances déjà présentes (cela se vérifiera). Autrement dit, les exercices d'introduction envisageables ne suffisent pas à faire concevoir aux élèves le formalisme en jeu : il y a un « saut » conceptuel. Pour ces notions, le cours a alors une place spécifique, il reste un peu « artificiel », formel, puisque l'expression à adopter n'a pas pu être préparée suffisamment en contexte avec les élèves. De ce fait, il s'agit de faciliter au maximum l'introduction du nouveau formalisme, en allant jusqu'au bout de ce qui peut être intuitif ou visuel ou numérique ou dynamique, en sachant qu'on ne peut pas cependant atteindre ce qu'on vise en s'appuyant seulement sur ce qui vient des élèves. Une fois l'introduction faite par l'enseignant en cours, il s'agit de l'accompagner au maximum, avec des proximités descendantes, en explicitant le « gain » réalisé, en reprenant des situations antérieures avec le nouveau formalisme et en explorant des situations nouvelles.

Précisons sur l'exemple du cours de seconde sur la formalisation algébrique des variations des fonctions – c'est le programme de 2009 qui est en vigueur (Robert & *al*, p 10-13, 2020). On étudie le sens de variation des fonctions – c'est-à-dire qu'on introduit les définitions des fonctions croissantes, décroissantes sur un intervalle et les tableaux de variation. Les élèves ont rencontré les généralités sur les fonctions l'année précédente, les notions d'image et d'antécédent, de courbes représentatives, mais les notions de domaines de définition et de variations sont nouvelles. Ils ont aussi travaillé, depuis plusieurs années [12], sur des courbes quelconques, modélisant éventuellement des phénomènes ou associées à des grandeurs. Ils ont appris à reconnaître et interpréter qu'une courbe « monte » (descend, est constante, a un maximum…), en référence à l'augmentation (la diminution, la constance, le maximum) de la grandeur représentée en ordonnée (valeurs de la fonction).

La formalisation algébrique de la croissance représente ce que nous appelons une notion FUG : elle donne une traduction formelle, algébrique, du sens de variation d'une fonction sur un intervalle, de manière nouvelle, avec un symbolisme logique encore peu connu des élèves ; elle unifie cette notion pour toutes les fonctions déjà rencontrées, elle permet la généralisation à d'autres fonctions, à introduire. De plus elle relie les approches numérique, graphique et algébrique de la croissance. Il s'agit d'opérationnaliser quelque chose qui est facilement perçu de manière dynamique, mais qui n'est pas directement traduisible dans le formalisme mathématique, statique. La visée est ainsi de faire passer les élèves à une traduction formalisée ponctuelle et statique – pour tous (a,b), *si* $a < b$ *alors* $f(a) \leq f(b)$ – avec la quantification universelle pour réinjecter le caractère global. Dans quelle mesure peut-on s'appuyer sur une perception visuelle globale, déjà là chez les élèves : « la courbe monte », ou sur une description ponctuelle, numérique et dynamique : « quand x augmente, y ou $f(x)$ [13] augmente » ? Dans le premier cas, sont non distingués, la dépendance et la covariation sont implicites, dans le deuxième cas il y a une dissymétrie entre x et y, la covariation apparaît mais on est encore loin du compte, notamment en termes de logique.

Vu à la fois la difficulté intrinsèque de la traduction formelle générale de la croissance et le peu d'utilisation possible pour les fonctions connues [14], il est difficile de trouver un « bon » problème d'introduction. Il faudrait non seulement que les élèves aient besoin de la formalisation algébrique pour le résoudre, au lieu de s'appuyer sur la seule courbe ou les seules valeurs numériques mais encore qu'ils aient les moyens de formaliser, ce qui est très loin de ce qu'ils savent. De ce fait, on peut penser que les tâches introductives proposées par l'enseignant nécessiteront sans nul doute d'être prolongées par des interventions complémentaires pour présenter la définition formalisée des variations de la fonction, avec des proximités descendantes pour que les élèves s'y retrouvent ensuite.

3. 2. *Le scénario*

Une activité d'introduction (optimisation de surface [15] agricole), est menée en demi-groupes (TP) le matin, dont voici l'énoncé :

> Le long d'une rivière dont les bords sont rectilignes, il a été décidé de délimiter des champs destinés à l'agriculture. Ces champs seront tous de forme rectangulaire, l'un des côtés du rectangle étant le bord de la rivière, ce qui permettra facilement l'arrosage des cultures. Pour délimiter son champ, chaque famille d'agriculteurs reçoit une clôture de longueur égale à 750 mètres, ainsi que tout le matériel pour installer solidement la clôture. Chaque famille peut donc choisir les dimensions de son champ, pourvu qu'il respecte les contraintes indiquées et soit entouré par les mètres de clôture.
>
> Les champs ainsi délimités auront-ils tous la même surface ?
>
> Si la réponse à la question précédente est négative, existe-t-il une façon d'installer la clôture qui délimite un champ de surface maximale ?

12 Y compris hors mathématiques.

13 On note f la fonction dont on parle.

14 Compte tenu des connaissances algébriques des élèves dans les programmes actuels.

15 Nous gardons ce terme utilisé par l'enseignant associé à la fois au champ et à son aire.

L'après-midi, en cours, l'enseignant reprend d'abord le travail sur la fonction du second degré que les élèves ont trouvée le matin, modélisant l'aire de la surface de champ à entourer par un grillage de longueur donnée et dont l'optimisation est cherchée. Puis il introduit les premières définitions associées au sens de variation, à partir de l'étude numérique et graphique de cette fonction particulière, sur tableur et grapheur. Il termine par l'introduction de la définition formelle.

Nous allons donner des exemples tirés de toute la séance d'‘exposition des connaissances, car les différents moments nous semblent emblématiques de diverses possibilités pour l'enseignant en termes d'accompagnement

3. 3. *Des proximités descendantes pendant la première partie du cours (reprise du travail en demi-classes)*

Il s'agit d'exprimer la longueur du côté inconnu *x* comme la différence entre la longueur de la clôture et la somme des longueurs des autres côtés, ce qui amènera à l'expression de l'aire : $x(750 - 2x)$

On trouve des commentaires accompagnant la reprise du travail des élèves ayant modélisé la situation. Ils sont porteurs de proximités descendantes et horizontales entre les activités du matin et le savoir déjà-là utilisé ici, les fonctions.

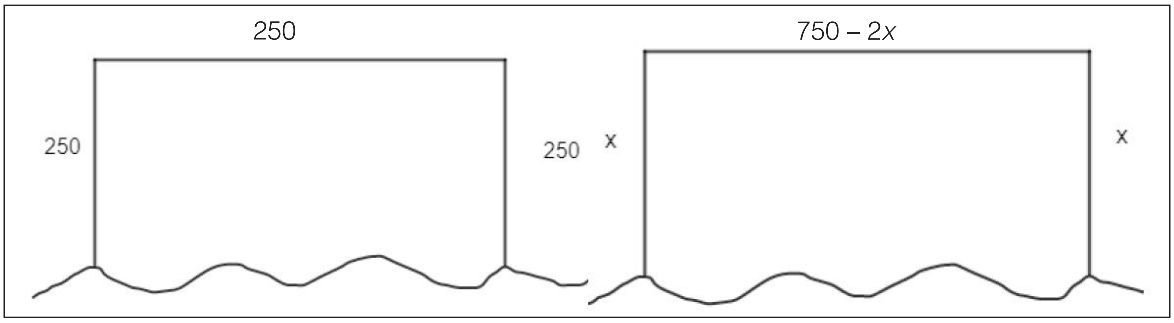
D'abord l'enseignant reprend un élève qui répond *« x »* à la question sur ce qui a été fait pour modéliser : il ajoute l'explicitation du changement de registre (proximité horizontale) : « *Autrement dit on est passé d'un calcul numérique à un calcul algébrique […] On appelait x les longueurs en mètres…. Et donc on est arrivé à* $750 - 2x$. » Plus loin il explicitera de nouveau le changement de registre numérique/algébrique fait en contexte le matin : « … *ce que vous avez fait ce matin avec des nombres c'est exactement la même chose qu'on a fait ici avec des lettres* ».

Puis suit une question qui porte une proximité descendante : un élève ayant répondu à une question de l'enseignant que *x* appartient aux réels, l'enseignant demande : « […] *la question est de savoir si x est un réel quelconque. Autrement dit est-ce que x peut prendre toutes les valeurs réelles ? Est-ce que je peux remplacer x par n'importe quel nombre ?* »

Et un élève répond que *x* doit être supérieur à 0 parce que c'est une longueur.

La question s'appuyant sur une première réponse incomplète (*x* réel) oriente la réflexion des élèves et induit (éventuellement !) la réponse, associée à une connaissance bien connue. Nous y voyons une proximité éventuelle.

Ensuite l'enseignant reprend et précise deux affirmations successives des élèves sur les



valeurs de x à prendre en compte dans le problème (« *c'est un réel et c'est une longueur* » disent les élèves) – avec des proximités horizontales : « *Parce que c'est une longueur et une longueur c'est un réel effectivement qui est a priori strictement positif. Donc déjà x ne peut pas être négatif.* »

Le professeur s'appuie alors de nouveau sur la situation du matin pour faire trouver aux élèves l'inégalité $x < 375$: un élève trouve tout de suite, sans explication, « *x inférieur à* 375 » ; l'enseignant explicite pourquoi (proximité descendante), en refaisant le calcul, et reprend encore au passage la réponse d'un élève qui indique, sans plus de précision, qu'on divise 750 par 2 « *vu qu'il y a deux x* ». Dans les deux cas, l'enseignant mutualise ce que dit un élève et le complète avec un petit raisonnement mathématique (mise en œuvre d'une connaissance déjà-là).

L'enseignant refait de la même façon le calcul algébrique de $f(x)$: il s'appuie sur des réponses isolées d'élèves et tisse un discours complet, reprenant à la fois ces réponses et ce que les élèves ont fait le matin, en l'explicitant, pour arriver à $f(x) = x(750 - 2x)$. On peut évoquer des proximités descendantes ou horizontales, collectives : elles sont appuyées sur ce qu'ont fait ou dit quelques élèves, concernant une tâche que les élèves sont censés savoir faire ou une connaissance qu'ils sont supposés avoir, et elles explicitent pour tous les élèves le lien avec ce qui est visé (application d'une connaissance, activité…). Elles sont plus ou moins différées, au sens où ce qui est repris des élèves n'est pas toujours énoncé juste avant la proximité.

L'enseignant reprend ainsi en détail le raisonnement qui a abouti à la fonction (proximité à la fois horizontale, portant sur l'action qu'ont faite les élèves le matin pas à pas, et descendante sur l'expression de l'aire d'un rectangle) : « *Donc une fois qu'on a un côté qui s'appelle x, qui est mesuré par x, on a l'autre côté, la surface d'un rectangle, vous vous rappelez, c'est, on dit parfois longueur fois largeur, donc* $750 - 2x$ *fois x ou x fois* $750 - 2x$. *Donc ça donne bien cette expression-là* ».

Enfin l'enseignant précise et distingue variable et fonction dans le cas étudié, intervention qui porte encore une proximité descendante : « *alors maintenant on va faire varier la longueur de ce côté-là. Donc x c'est la variable, et f(x) la surface donc c'est le résultat du calcul.* »

Et il poursuit un peu plus loin, en explicitant le gain obtenu par l'expression de cette fonction qui modélise l'aire du champ étudié, avec le changement de cadre correspondant, en s'appuyant là encore sur l'activité menée le matin (dans les deux groupes l'expression de la fonction a été obtenue et mutualisée). On peut y voir une proximité à la fois ascendante, en termes d'activités et descendante en termes de savoir : « *Alors maintenant quel est le problème ? Qu'est-ce qu'on va faire maintenant de cette fonction ? Maintenant qu'on a passé le cap du numérique à l'algébrique avec l'idée que grâce à ça on va avoir accès à toutes les surfaces possibles : puisque x représente toutes les longueurs possibles pour ce côté-là (*il montre le tableau*), on va avoir toutes les surfaces possibles* (il montre la formule de la surface*).*

3. 4. *Des proximités ascendantes accompagnant l'émergence collective des premières définitions de la croissance des fonctions, numérique et graphique*

Cela se fait par l'intermédiaire de la recherche du maximum auquel on revient. La partie suivante du cours va consister ainsi à faire décrire aux élèves le comportement numérique de cette fonction sur son intervalle de définition grâce à l'affichage de ses valeurs sur un tableur puis son comportement graphique grâce à l'affichage de la courbe sur Géogebra. Les deux procédés sont suggérés par les élèves, invités à trouver s'il existe un plus grand champ possible en surface, ce que l'enseignant traduit immédiatement en « *savoir si la fonction a une valeur maximale* » (cf ci-dessus).

Les élèves décrivent d'abord ce qu'ils lisent sur le tableur avec les seuls mots « augmente » et « diminue ». L'enseignant reprend en regroupant les dires des élèves et en les complétant par l'indication nécessaire sur les intervalles en jeu mais sans encore changer le vocabulaire (proximité horizontale) : *« Donc on a d'abord des valeurs qui sont en augmentation et puis après, alors ici c'est* à 190 *que ça a l'air de changer, et après c'est en diminution à partir de* 200 *jusqu'à la fin* ».

Le professeur fait ensuite préciser ce constat, toujours avec ce vocabulaire intermédiaire, en introduisant cependant le mot intervalle, notion déjà vue : à la place de ce que disent les élèves « *entre* 0 *et* 190 » – proximité horizontale donc. Cela se fait dans une suite de questions/réponses/reprises rapides.

L'enseignant conduit de cette manière les élèves à remarquer qu'on n'a pas le maximum de manière précise (*pas de résultat exact*, *approximation* disent les élèves). Une première motivation est dégagée à partir de ces réponses d'élèves : essayer d'avoir un résultat plus précis (faire « *de l'algébrique pur* » comme l'a demandé une élève précédemment).

Les élèves décrivent ensuite la courbe projetée au tableau et sont questionnés sur le rapport entre les deux descriptions (courbe et tableur). L'enseignant extrapole à partir des formulations ambigües des élèves en introduisant l'objet du cours comme généralisation de ce qui vient d'être constaté : « *et on va essayer de donner une définition générale qui décrira ce qu'on appelle les variations des fonctions. Quand on a parlé de diminution, d'augmentation c'est ce qu'on appelle plus généralement les variations de fonctions, c'est le chapitre sur lequel on va enchainer tout de suite* » (proximité ascendante).

L'enseignant termine cette première partie du cours, qui s'appuie sur des interventions diffuses dans la classe, en les complétant (proximités ascendantes). Il explicite l'analogie entre les constats numérique et graphique dans un bilan intermédiaire porteur d'une proximité ascendante : *Alors donc vous êtes d'accord que la courbe qui est là et le tableau qu'on a vu tout à l'heure disent un peu la même chose quand même ce que J. a essayé de dire. Quand x va de* 0 *à, alors à peu près* 190*, on a une courbe qui monte* (geste), *et puis après on a une courbe qui descend* (geste) : *dans le tableau on avait des valeurs de la fonction qui augmentaient et après des valeurs qui diminuaient* ».

L'enseignant réussit à faire produire collectivement des formalisations « intermédiaires » en termes de valeurs qui augmentent ou de courbe qui monte. Il fait pointer et reprend au passage l'insuffisance de cette étude pour avoir précisément le maximum ou l'intervalle où la fonction croît.

Cependant pour des élèves n'ayant pas du tout mis en relation les deux constats numérique et graphique, peut-être parmi ceux qui ne sont jamais intervenus, certaines de ces interventions pourraient relever d'un effet Jourdain, c'est-à-dire d'une surestimation par l'enseignant de ce qu'ils pensent. Ces élèves n'associeraient pas à leur activité le savoir en jeu, ici la traduction d'un même comportement de la fonction dans les deux registres.

3. 5. *Aller plus loin, vers la formalisation algébrique ?*

La dernière partie du cours est consacrée à la formalisation algébrique des variations d'une fonction *f* justifiée par le besoin de préciser ce qui n'est jusqu'ici qu'approché et parce que : « *on va vous demander d'être capable un jour de prévoir les variations d'une fonction avant d'avoir vu sa courbe et sans forcément avoir fait un tableau de valeurs* ». Ce dernier commentaire n'est peut-être pas entendu de tous les élèves, cela n'a été suggéré que par un d'entre eux, mais c'est une justification compréhensible à partir de ce qui a été fait, qui peut porter une raison d'être au formalisme cherché (proximité ascendante). En revanche l'idée de comparer (statiquement) deux valeurs de *f(x)* pour deux valeurs ordonnées de *x* et de le faire pour tous les couples de l'intervalle ne nous semble pas imaginable par les élèves mais compréhensible *a posteriori*, et à éclairer par des proximités descendantes après sa présentation aux élèves.

L'enseignant essaie d'abord de suivre la même démarche que précédemment pour appuyer la formalisation algébrique sur quelque chose qui viendrait des élèves, voire d'un élève, mais cela s'avère impossible. Ainsi, pendant quelque 10 minutes, le professeur essaye vainement de faire trouver aux élèves une expression algébrique de la croissance, en leur faisant chercher une « traduction » de « *quand x augmente $f(x)$ aussi* ». Rien ne vient. La formulation visée est sans doute trop éloignée de celle que pourraient produire les élèves. Il doit donc la donner lui-même.

Finalement il indique :

« Qu'est-ce que ça veut dire x augmente ? Ça veut dire que quand je prends des valeurs de x de plus en plus grandes, […] *si je dis je prends des valeurs de x de plus en plus grandes, il faut que j'en prenne au moins* (**il montre deux doigts levés**, et c'est ce qui déclenche la réponse, ainsi soufflée*) ?*

Un élève répond « *deux* ». Il reprend *: « Deux sachant qu'il y en a une qui sera plus petite que l'autre.* »

L'enseignant fait écrire x_1 et x_2, avec $x_1 < x_2$ et il arrive à faire dire à un élève qu'alors $f(x_1)$ est inférieur à $f(x_2)$. Il demande alors si ça suffit pour traduire la croissance, ajoute la nécessité de se placer sur un intervalle et reprend : … si *on choisit deux réels quelconques qui sont ordonnés, x_1 plus petit que x_2 … alors $f(x_1)$ sera plus petit aussi que $f(x_2)$ »* (pas de proximité !)

Devant l'admiration des élèves sur l'art des mathématiciens (!), il revient à ce qui a été fait avant, sur les courbes : il est devant la courbe représentant *f*, projetée au tableau, il a une règle en main et explique en montrant sur la courbe : *« Je prends un x_1 ici, je prends un x_2 qui est plus grand là. Pour x on va trouver $f(x)$, voyez (*il le montre avec la règle*). Alors qui est le plus grand $f(x_1)$ ou $f(x_2)$? » Un élève répond « $f(x_2)$ »*. Et il conclut en ayant obtenu (avec cette proximité descendante) l'assentiment des élèves sur la valeur générale de cette traduction algébrique et son lien avec ce qui précède. On peut se demander si la suite des questions/réponses précédentes, même sans avancée, n'a pas quand même préparé les élèves d'une certaine manière à la définition, les forçant à y réfléchir. Cependant il est manifeste que certains élèves décrochent, l'enseignant le reconnait lui-même (« *c'est pas facile, faites un effort »).*

Cette étude illustre à la fois la manière dont l'enseignant s'appuie pendant son cours sur ce qui vient des élèves, et l'impossibilité de le faire lorsque ce qui est en jeu est trop loin des acquis déjà-là (c'est du moins notre interprétation) … Plus précisément, on a explicité comment ce professeur, souvent grâce à des questions ciblées aux élèves dont il mutualise les réponses, reprend et complète ces interventions en les intégrant à la présentation d'activités ou de connaissances. Ces dernières peuvent être « anciennes », c'est le cas au début de la séance, sur fonctions notamment, avec des proximités surtout descendantes, ou liées à des savoirs à venir, c'est le cas pour les descriptions intermédiaires des variations, numériques et graphiques, avec des proximités surtout ascendantes. Lorsque c'est la formalisation algébrique qui est en jeu, l'enseignant doit renoncer à cet appui et procède autrement, en questionnant les élèves tout de suite après la présentation de la définition qu'il a donnée pour pouvoir mettre en jeu des proximités descendantes.

Nous avons en fait étudié deux cours sur le même sujet (Chappet-Paries & *al.* 2017b), Robert & al. 2021), dont celui présenté ici. Aucun des deux établissements concernés n'était particulier. Nous avons constaté de grandes différences, à la fois dans les « activités d'introduction » proposées [16], plus ou moins porteuses de liens possibles avec la formalisation visée, dans la manière d'exploiter ces activités et dans l'essai d'amener les élèves le plus près possible de la définition. Ainsi, dans l'autre cours, l'enseignant s'appuie peu sur l'activité préliminaire, qui prépare d'ailleurs d'assez loin la formalisation finale, qu'il introduit sans aucun commentaire – cela amène un élève, sans doute inquiet, à demander si « ce » serait au contrôle… Les deux enseignants ont ainsi fait des choix différents, qu'il ne s'agit pas pour nous de critiquer, ils ont leurs raisons, mais de caractériser pour ouvrir une réflexion outillée.

16 En termes de tâches.

Conclusion et discussion : que faire de ce type d'analyse ?

Une petite synthèse et des éléments de discussion

Les occasions de proximités à différents moments de l'enseignement sont associées à un choix simultané d'une tâche (au sens large) – recherche d'un exercice, écoute d'un cours – et d'un déroulement. Nous nous sommes limitées aux interventions qui relient, plus ou moins explicitement, ce qui vient des élèves et les mathématiques en jeu. De plus, nous avons proposé une catégorisation basée sur les différences de dynamiques portées par le discours, du contextualisé au décontextualisé ou réciproquement ou sans changement de niveau de généralité.

Nous avons illustré sur des exemples la variété des proximités produites en classe, en lien avec la tâche, le contexte et le relief sur la notion en jeu.

La production de proximités ou leur appréciation ne peuvent se faire en effet de manière isolée. Cela dépend du moment et du contexte, du contenu abordé avec ses spécificités, du scénario en jeu et de la manière dont ce qu'on étudie s'insère dans le reste, des élèves, et même de l'enseignant. Les proximités ont la particularité de relier précisément, souvent de manière spontanée voire improvisée ce qu'on entend dans la classe et ce qui est visé, dans le *hic et nunc*. Autrement dit, les proximités ont un caractère conjoncturel, variable d'une séance à l'autre même si le savoir en jeu est, lui, fixé. On pourrait dire qu'une proximité est rarement reproductible telle quelle…

Notre intérêt pour ces éléments du discours très locaux, vient de notre hypothèse de l'efficacité possible d'une prise en compte maximale mais raisonnée, voire contrôlée, des élèves, conditionnée par un travail « dans leur ZPD ». Cela justifie les descriptions précédentes qui précisent des fonctions différentes qu'on peut accorder à ces proximités, selon la manière dont elles relient contexte et savoir.

L'intérêt de cette hypothèse est renforcé par la stabilité des pratiques individuelles mise en évidence par ailleurs (Robert, 2007). Elle amène à se demander si chaque enseignant ne développe pas toujours le même type de proximités, ce qui en faciliterait l'écoute par les élèves tout en réduisant, éventuellement, et peut-être sans que l'enseignant en ait tout à fait conscience tout seul [17], l'étendue des liens développés.

Un certain nombre de questions se posent. On peut se demander si les différences entre élèves n'entrainent pas des effets potentiellement variés, les uns entendant mieux et bénéficiant davantage que d'autres des rapprochements, notamment en relation avec leurs connaissances « déjà-là ». Cela pourrait différencier les élèves qui interviennent et sont repris, d'autres élèves plus « spectateurs ». Pourrait-on évoquer un cercle vicieux ? Cependant pour tous les élèves, il reste à transformer ces connaissances en germe dans le discours de l'enseignant, constituant une Zone Proximale de développement collective pourrait-on dire, en connaissances individuelles, d'abord proches (dans leur propre ZPD) puis intériorisées.

On peut aussi se questionner sur la manière d'apprécier effectivement ces effets, d'évaluer la portée des proximités sur le développement des activités.

17 Cf. les phénomènes de naturalisation qui concernent le fait que des difficultés de certains élèves finissent par échapper à des enseignants « trop » familiers avec l'usage mathématique attendu (cf. Lenfant, 2002).

Les interrogations sur les liens entre ce qui vient des élèves et le discours de l'enseignant peuvent être déplacées vers les vidéos sur Internet destinées aux élèves. Une comparaison entre un cours en présentiel et une telle vidéo (capsule) a été faite dans (Chappet-Paries & *al.* 2017a), sur les résolutions d'inéquations et les tableaux de signes en seconde. L'étude a permis en particulier d'illustrer le rôle des proximités pour lever, en présentiel, des implicites que des élèves relèvent en classe, sur le moment. Rien de tel dans la capsule. On a aussi pu constater la quasi-absence de proximités ascendantes dans la capsule, même si l'enseignant, fort de son expérience et de sa connaissance des élèves, a pu développer quelques proximités descendantes « virtuelles ». Ce constat a aussi été fait sur des vidéos pour faire réviser aux élèves de $3^{ème}$ le théorème de Thalès (capsules mises sur You Tube, Chappet-Paries & al. 2023b) : il y a là une autre forme d'oral à destination des élèves.

Conséquences ?

Tous les enseignants produisent en classe des proximités spontanément, et sans avoir besoin d'établir ou de se procurer le relief sur les notions qu'ils enseignent : ils en ont assez vite une idée de par leur expérience. Cette connaissance issue de leur vécu peut être cependant enrichie par la lecture de certains travaux sur le sujet. Notre étude nous semble pouvoir contribuer, de même, à outiller d'une certaine manière la vigilance des enseignants vis-à-vis de ce qu'ils peuvent repérer chez les élèves, en termes de travail et de connaissances, pour s'appuyer dessus et rebondir (ou faire rebondir) de manière variée.

Cela nourrit l'intérêt d'une reconnaissance permanente du travail et de l'engagement des élèves, en relation avec l'état de leurs connaissances, acquises et visées. Surtout, plus spécifiquement, chercher à s'appuyer systématiquement sur ce qui vient des élèves en s'inspirant de notre catégorisation est, nous semble-t-il, porteur d'une attention qui est ainsi précisée, orientée. Il s'agit de se demander comment le faire et à quel moment – y a-t-il lieu de (faire) rebondir sur du décontextualisé en germe dans le travail, ou de faire (faire) au contraire le lien avec ce qui a été utilisé, ou encore d'établir des relations entre éléments analogues ? Certes il n'y a évidemment pas une seule « bonne » réponse à ces choix, qui sont contraints par le contexte, et un enseignant n'a pas toujours le temps de faire tout ce dont il aurait envie. On ne peut pas non plus toujours interpréter à temps des réponses d'élèves et les reprendre. Cependant le fait de prendre conscience des alternatives nous semble susceptible d'enrichir, par l'introduction de ce questionnement systématique, le spectre des échanges en classe associés à diverses dynamiques de conceptualisation. Ce questionnement toutefois met en jeu non seulement le déroulement actuel de la séance mais encore le choix des contenus, les progressions, les élèves. On pourrait alors évoquer une certaine marge de manœuvre concernant la production de proximités, même si elles dépendent à chaque fois de la classe.

Cela peut amener à faire réfléchir, en formation d'enseignants, avec un travail explicite à partir de séances en classe, à ce type d'interventions orales : avec leurs difficultés, avec le fait qu'on ne peut pas reprendre tout ce qui vient des élèves et qu'il faut choisir, et avec l'importance d'un pilotage en amont des séances. Des comparaisons entre des séances menées différemment sur le même sujet peuvent être très formatrices pour ce faire.

Perspectives

Nous n'avons pas distingué ce que Pilet & *al.* (2015) appellent la profondeur de la proximité : c'est-à-dire la manière précise dont la connaissance y est évoquée – dans le premier exemple ce peut être par son seul nom (théorème de Thalès), ou par un simple rappel de la formule (égalités correspondantes), ou encore avec une justification de l'utilisation… Pour être interprétés les liens correspondants demanderaient en effet une plus grande connaissance de l'histoire de la classe que celle que nous avons. Mais une telle étude permettrait sans doute d'approfondir la compréhension de leur portée et peut-être de donner des indicateurs à mettre en jeu dans l'évaluation des effets des proximités.

Une autre perspective est liée à des études plus précises des différences entre élèves, que ce soit au niveau langagier ou plus généralement au niveau de ce qui est développé par les élèves. Là encore, la portée des proximités sur chaque élève est en jeu.

Références

Allard C., Asius L., Bridoux S., Chappet-Paries M., Pilorge F., Robert A. (2016). Quand le professeur de mathématiques est sur You Tube… Quelques réflexions sur les moments d'exposition des connaissances et les capsules pour des classes inversées. *Cahiers du laboratoire de didactique André Revuz 16,* Irem de Paris.

Bridoux S., Hache C., Grenier-Boley N., Robert A. (2016). Les moments d'exposition des connaissances en mathématiques, analyses et exemples. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives* 21, 187-233.

Chappet-Pariès M. (2004). Comparaison de pratiques d'enseignants de mathématiques- relation entre discours des professeurs et activités potentielles des élèves. *Recherches en Didactique des Mathématiques 24 2/3,* 251-284.

Chappet-Pariès M., Pilorge F., Robert A. (2017a). Pour étudier le dispositif de classe inversée. Analyses des moments d''exposition des connaissances en classe et de capsules vidéos. *Petit x* 105, 37-72.

Chappet-Pariès M., Pilorge F., Robert A. (2017b). Un scénario de formation de formateurs : les activités d'introduction, les moments d'exposition des connaissances et les capsules pour la classe inversée, s'appuyant sur le thème « sens de variation des fonctions » en seconde. *Document pour la formation des enseignants, du laboratoire André Revuz,* 16. Irem de Paris.

Chappet-Pariès M., Robert A. (2022). Introduire le théorème de Thalès en troisième. Quel appui sur le travail des élèves ? *Cahiers du laboratoire de didactique André Revuz 22,* Irem de Paris.

Chappet-Pariès M., Robert A. (2023). S'appuyer sur le travail des élèves pour intervenir oralement pendant les recherches d'exercices en classe dans le secondaire : des diversités ? *Petit x* 118, 47-74.

Chappet-Pariès M., Robert A. (2023b). Analyser des ressources pour les élèves sur Internet *Document pour la formation des enseignants, du laboratoire André Revuz,* 22. Irem de Paris.

Groupe géométrie de l'IREM de Paris (2020). Enseigner la géométrie au cycle 4, comparer des triangles pour démontrer. *Brochure IREM 100*, IREM de Paris.

Hache C. (Ed.) (2016). Formuler, reformuler. Groupe Leo de l'Irem de Paris, *document en ligne.*

Horoks J. (2008). Les triangles semblables en classe de seconde : de l'enseignement aux apprentissages. *Recherches en Didactique des Mathématiques 28*/3, 379–416.

Laborde C. (1982). *Deux codes en interaction dans l'enseignement des mathématiques : langue naturelle et écriture symbolique.* Thèse d'Etat. Sciences. Didactique des mathématiques : Université Grenoble I.

Lenfant A. (2002). *De la position de l'étudiant à la position d'enseignant : l'évo-*

lution du rapport à l'algèbre de professeurs stagiaires. Thèse de doctorat en didactique des mathématiques, Université Paris-Diderot.

Pilet J., Allard C., Horoks J. (2019). Une entrée par l'évaluation des apprentissages pour analyser les interactions entre l'enseignant ou l'enseignante et les élèves dans les moments de mise en commun. *Éducation et francophonie* 47(3), 121–139. https://doi.org/10.7202/1066516ar

Robert A. (2007). Stabilité des pratiques des enseignants de mathématiques (second degré) : une hypothèse des inférences en formation. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 27/3, 271-312.

Robert A. (2010). La formation des maîtres, une préoccupation constante d'André Revuz. Un point de vue actuel de chercheur en didactique. In Colmez, de Hosson, Pichaud, Robert. *Hommage à André Revuz: L'engagement universitaire, l'héritage didactique,* p128-140. Paris : Université Paris 7.

Robert A., Penninckx J., Lattuati M. (2012). *Une caméra au fond de la classe, (se) former au métier d'enseignant de mathématiques du second degré à partir d'analyses de vidéos de séances de classe.* Besançon : Presses universitaires de Franche-Comté.

Robert A., Robinet J. (1996). Prise en compte du méta en didactique des Mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 16/2, 145-176.

Robert A., Rogalski J. (2020). D'un problème d'optimisation d'une surface agricole au cours sur le sens de variation en seconde : une étude de cas. *Cahiers du laboratoire de didactique André Revuz*22. Irem de Paris.

Robert A., Tenaud I. (1988). Une expérience d'enseignement de la géométrie en Terminale C. *Recherches en Didactique Des Mathématiques 9/*1, 31–70.

Robert A., Vandebrouck F. (2023). Proximités discursives entre le discours de l'enseignant et les activités des élèves pendant les cours : l'exemple de l'introduction de la définition formalisée du sens de variation des fonctions. *Revue québecoise de didactique des mathématiques* 1 (2), 106- 143.

Vergnaud G. (2002). La conceptualisation, clef de voûte des rapports entre pratique et théorie ; Analyse de pratiques et professionnalité des enseignants. *http://eduscol.education.fr/cid46598/la-conceptualisation-clef-de-voute-des-rapports-entre-pratique-ettheorie.html*

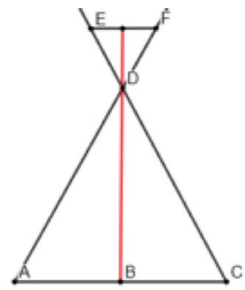
Vygotski L. (1984/1997). *Pensée et langage.* Paris : La dispute.

ANNEXE

Analyse de la tâche du Tipi

Il s'agit tout d'abord de modéliser la situation ce qui amène à construire un triangle comme ci-dessous, à nommer les différents points de la figure et à reconnaître les mesures des côtés ainsi définis. AD = 9 – 1,5 = 7,5 ; AC = 12 ; AB = 6.

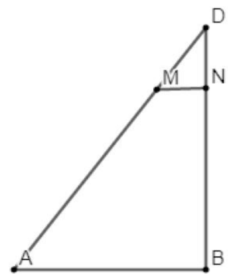
La première question se ramène à calculer la hauteur DB du triangle ADC. Dans le triangle ABD rectangle en B, le théorème de Pythagore permet de calculer AB qui est égal à 4,5 (exprimée en m). (Une adaptation du théorème est nécessaire car on ne calcule pas ici l'hypoténuse).



La deuxième question revient à calculer la mesure du segment [ED]. Les triangles ACD et DEF sont isocèles en D, leurs angles sont donc respectivement égaux. Ils sont semblables et leurs côtés homologues sont proportionnels :

$$\frac{EF}{AC} = \frac{ED}{DC}$$, ce qui donne EF = 2,4 (exprimée en m).

La résolution de la troisième question (voir sur le schéma ci-contre) demande d'admettre que les ailes du tipi sont parallèles à la base c'est-à-dire que la droite (MN) est parallèle à la droite (AB) et que la mesure de la longueur du segment [MN] placée à une hauteur de 3,5 m est supérieure à 2,2 m.



La mesure de la longueur DN est égale à 4,5 – 3,5 = 1 m. Le théorème de Thalès appliqué au triangle DAB permet de conclure que $\frac{DN}{DB} = \frac{MN}{AB} =$ (choix des rapports égaux) ; MN = $\frac{4}{3} \approx 1{,}33$ et que l'envergure des ailes étant de 2,4 m, 2 × 1,33 étant supérieur à 2,4, le totem peut entrer dans le tipi.

Enoncé de l'académie de Caen

L'habitation traditionnelle des Indiens des plaines d'Amérique du Nord est le tipi. Un tipi est constitué de longues tiges de bois appuyées les unes aux autres, d'une enveloppe extérieure faite de peaux d'animaux et d'une porte toujours orientée vers l'Est. Chaque perche en bois mesure 21 pieds et dépasse de 3 pieds. Le rayon du cercle tracé au sol mesure 7,5 pieds. Le grand chef indien veut coiffer le cercle formé par le haut des perches de son tipi d'un chapeau de plumes. Problématique : Quel doit être le diamètre de son chapeau ?