LA MODELISATION A PARTIR D'UNE SITUATION EXTRA - MATHEMATIQUE :

De la formation des enseignants à la mise en œuvre, dans le cadre du dispositif Lesson Study adapté au contexte français

Sonia YVAIN-PREBISKI
IREM Paris, IREM de Montpellier
Blandine MASSELIN
IREM de Rouen

Résumé : Dans cet article, nous présentons une recherche émergente liée à un dispositif de formation continue pour les enseignants de mathématiques du primaire et du secondaire en France : le dispositif Lesson Study adapté au contexte de formation des enseignants français (LSa). Nous nous appuyons sur une communication que nous avons donnée lors du colloque ICTMA20 « International Community of Teachers of Mathematical Modelling and Applications » en septembre 2022. L'objectif de cette recherche est d'étudier comment la nécessité de mathématiser une situation extra-mathématique pour la rendre accessible par un traitement mathématique est considérée et traitée en classe (si elle l'est) par des enseignants du primaire et du secondaire. Après avoir introduit le contexte du dispositif LSa, nous détaillons notre méthodologie de recherche basée sur les formes de mathématisation horizontale. Nous montrons comment elle a été utilisée pour analyser comment les enseignants préparent, structurent et finalement mettent en œuvre la situation « Aire de baignade ». Les résultats préliminaires de notre étude, que nous présentons ici, semblent confirmer la nécessité de former spécifiquement les enseignants à la modélisation mathématique.

Introduction

Nous présentons une recherche émergente liée à un dispositif de formation continue des enseignants du primaire et du secondaire en France : le dispositif Lesson Study adapté au contexte de formation français (LSa). *Nous introduisons brièvement le contexte du dispositif LSa, et renvoyons le lecteur à l'article écrit par Masselin & Hartmann (2020) qui en précise le principe.* Cette recherche s'inscrit dans un projet de recherche de diffusion de ce dispositif. Ce projet plus large porté par une équipe du LDAR de l'Université Paris-Cité comporte trois axes de recherche principaux, dont l'un concerne l'enseignement et l'apprentissage de la modélisation. L'une des particularités du dispositif LSa est d'offrir aux enseignants la possibilité de travailler sur la conception et la mise en œuvre d'un problème lié à une situation issue de la vie quotidienne dans une classe, c'est-à-dire ancrée dans une certaine réalité. Selon le cadre de l'OCDE 2022, il est important de former les élèves à *passer du monde réel au domai-*

ne des mathématiques et à donner au problème du monde réel une structure, des représentations et une spécificité mathématiques. Ils raisonnent sur les contraintes et les hypothèses du problème et leur donnent un sens[1]. Dans notre recherche, dans le cadre théorique de la Realistic Mathematics Education (Freudenthal, 1991), nous postulons que la mise en œuvre en classe d'une situation ancrée dans une certaine réalité nécessite d'abord de la rendre accessible à un traitement mathématique, ce qui rejoint une activité mathématique préconisée par l'OCDE 2022, à savoir *simplifier une situation ou un problème afin de le rendre accessible à l'analyse mathématique*[2].

Nos questions de recherche concernent, d'une part, l'étude de la mathématisation impliquée dans le processus de modélisation des situations proposées et, d'autre part, l'analyse des effets de la prise en compte (ou non) par les enseignants de la nécessité d'impliquer activement les élèves dans le travail pour leur permettre de traiter mathématiquement le problème. Plus spécifiquement, nous présentons une étude de cas à travers laquelle nous cherchons à répondre à la question de recherche principale suivante : Comment la nécessité de mathématiser une situation extra-mathématique pour la rendre accessible par un traitement mathématique, est-elle considérée et traitée en classe (si tant est qu'elle le soit) par les enseignants de mathématiques du primaire et du secondaire ? Notre objectif est d'analyser comment les enseignants préparent, structurent et finalement mettent en œuvre la situation « Aire de baignade » (figure 1) qui est la suivante :

L'aire de baignade

Les moniteurs d'une colonie de vacances souhaitent amener 120 enfants se baigner tous ensemble dans un lac. Pour délimiter une aire de baignade, ils disposent d'une ligne d'eau de longueur 25 m. La loi impose que le nombre de baigneurs ne doit pas dépasser 3 personnes pour 2 m^2.

Pourront-ils respecter la loi ?

Figure 1. Énoncé « Aire de baignade », Cahier de LS, Site[3] *de l'Irem de Rouen*

L'énoncé de la situation est volontairement peu explicite sur certains aspects pour être proposé en Lesson Study adaptée (cf. section 2) à un collectif d'enseignants. C'est ce que Masselin & al. (2022) désignent par un *germe de situation*. Masselin & Artigue (accepté) en précisent les étapes d'élaboration par les formateurs. Le germe de situation laisse volontairement à charge des collectifs d'enseignants des choix à opérer pour son enseignement comme imposer ou non une zone de baignade rectangulaire, par exemple en ajoutant une photographie dans leur énoncé. De même, les collectifs pourront décider de modifier, supprimer ou conserver son titre ou encore jouer sur des valeurs de variables didactiques comme la longueur de la ligne d'eau ou le texte de la loi. Pour plus de détails concernant l'élaboration de ce germe de situation et ce qui justifie certains choix de formateurs, nous renvoyons le lecteur aux actes de CERME13 (Masselin & Artigue, en cours).

Dans cet article, nous présentons le contexte du dispositif LSa, l'ancrage théorique de notre recherche et la méthodologie prévue, ainsi que les premiers résultats de notre étude de cas.

1 « *translate from a real-world setting to the domain of mathematics and provide the realworld problem with mathematical structure, representations and specificity. They reason about and make sense of constraints and assumptions in the problem.*" (OCDE 2022)

2 « *simplifying a situation or problem in order to make it amenable to mathematical analysis* » (OCDE 2022)

3 https://irem.univ-rouen.fr/cahiers-de-ls

1. — Le contexte des Lesson Study

La Lesson Study (LS) est un processus de développement professionnel collaboratif et réflexif basé sur la pratique des enseignants et axé sur l'apprentissage des élèves (Stigler & Hiebert, 1999). En LS, un collectif d'enseignants se réunit pour étudier un problème d'apprentissage de leurs élèves. Il consulte diverses ressources puis planifie une leçon, l'observe en direct et l'analyse collectivement, en se centrant sur l'apprentissage des élèves (Fujii, 2016). La recherche a montré que la LS permet le développement professionnel des enseignants du point de vue des connaissances (Ni Shuilleabhain & Clivaz, 2017), ou encore des croyances des enseignants (Lewis et al., 2019). Inspiré des LS japonaises (Lewis & Hurd, 2019, Takahashi, 2006), le dispositif LSa, terrain d'expérimentation de notre étude, est déployé en Normandie depuis 2016 par le groupe « activités » de l'IREM de Rouen et des chercheurs en didactique des mathématiques. Il est structuré en trois boucles (Voir annexe 1). Pour plus de détails, le lecteur pourra se référer à Masselin & al, (2022). Dans cet article, nous faisons le choix de ne détailler que la seconde boucle. Elle correspond à la formation d'un groupe d'enseignants. Elle est basée sur une situation suggérée par les formateurs au collectif d'enseignants et se déroule en trois étapes (Voir figure 2).

L'étape 1, le jour 1, consiste en la préparation collective d'une séance par les enseignants à partir de la situation proposée. Les enseignants résolvent d'abord le problème individuellement et une solution est partagée collectivement. Le groupe procède ensuite à une analyse *a priori* de la situation à l'aide d'une grille d'amorce d'analyse *a priori* fournie, en recherchant notamment les procédures et les difficultés potentielles rencontrées par les élèves. Lors de la mise en commun des éléments de cette grille, des extraits vidéo issus de la première boucle sont présentés pour enrichir les échanges. Le groupe prépare ensuite une feuille de route, (un énoncé, un scénario et une grille d'intervention de l'enseignant) tout en anticipant le travail du tableau. À la fin de cette journée, le groupe est invité à poursuivre le travail initié sur une plateforme à distance pour finaliser la préparation de la séance.

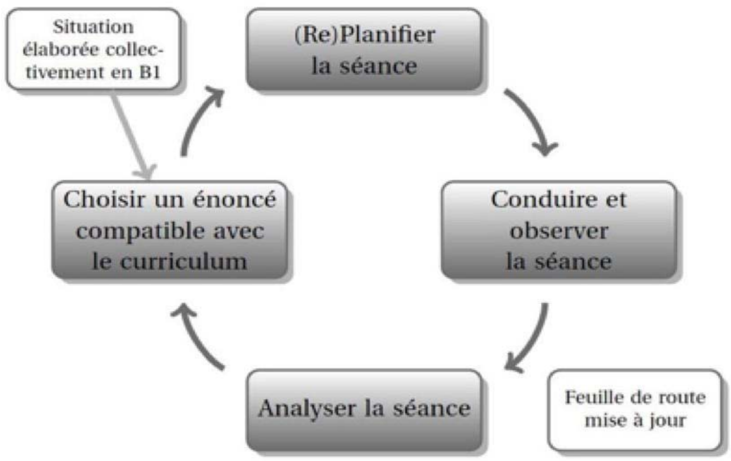


Figure 2. Boucle 2 du dispositif LSa (Masselin & al, 2022)

Le deuxième jour, le matin, l'enseignant dit « expérimentateur », met en œuvre la séance collective dans une classe devant le reste du collectif qui observe la leçon. L'après-midi, le collectif procède à une analyse *a posteriori* de la séance à partir des observations réalisées, tout en recherchant des alternatives, et le chercheur présent fait une synthèse en fin de journée. La feuille de route est mise à jour collectivement, et les enseignants sont invités à tester la situation dans leurs classes, tout en ayant la possibilité de modifier l'énoncé ou le scénario.

Notre article rend compte d'une étude du travail de deux collectifs d'enseignants en LSa au niveau Cycle 3 avec comme germe de situation « l'aire de baignade ».

2. — Considérations théoriques et questions de recherche

En France, dès l'école primaire, les enseignants sont invités à proposer des situations réelles, ou du moins ancrées dans une certaine réalité. Or, ces situations conduisent les élèves à utiliser une démarche différente de celle utilisée pour la résolution de problèmes intra-mathématiques, dans la mesure où ces situations doivent d'abord être rendues accessibles à un traitement mathématique. Nous suivons Treffers (1978) qui distingue deux types de mathématisation en jeu dans une activité de modélisation en mathématique : la mathématisation horizontale qui « *part du monde de la vie pour arriver au monde des symboles* » et la mathématisation verticale qui « *se déplace à l'intérieur de ce monde des symboles* ». Dans le cadre de la Realistics Mathematics Education (RME), Freudenthal (1991) reprend cette distinction :

> « *Treffers, in his thesis of 1978, distinguished horizontal and vertical mathematising not sharply but with due reservations: Horizontal mathematising, which makes a problem field accessible to mathematical treatment (mathematical in the narrow formal sense) versus vertical mathematising, which effects the more or less sophisticated mathematical processing.* » (Freudenthal, 1991, p. 40)

Par exemple, dans ce cadre, « *schématiser, formuler et visualiser un problème de différentes manières* » relève de la mathématisation horizontale et « *représenter une relation dans une formule* » relève de la mathématisation verticale.

Pour mieux cerner le rôle de la mathématisation dans un processus de modélisation, nous nous sommes également appuyées sur l'ouvrage « La mathématisation du réel » d'Israël (1996). Nous présentons ici seulement ce que nous en avons retenu (voir Yvain, 2017 pour plus de détails) :

— Un modèle mathématique est « *un fragment de mathématique appliqué à un fragment de réalité, […] non seulement un seul modèle peut décrire différentes situations réelles, mais le même fragment de réalité peut être représenté à l'aide de modèles différents.* » (Israël, 1996, p. 11).

— La modélisation mathématique est une démarche de construction d'un modèle en langage mathématique permettant de mettre en relation les éléments choisis d'un fragment de réalité avec la question à étudier.

— « *Pour traduire en langage mathématique un phénomène, il faut déterminer une ou plusieurs variables décrivant l'état du phénomène à un instant donné […] il faut faire des hypothèses concernant la loi selon laquelle ces variables changent pour aboutir à une loi mathématique donnant l'allure du phénomène.* » (Op.cit., p.24)

Ainsi en croisant les travaux d'Israël et ceux de Freudenthal, nous avons défini des

Mathématisation horizontale	Mathématisation verticale
— Choisir un fragment de réalité sur lequel on se questionne en vue de répondre à la question posée — Identifier et choisir les aspects du fragment de réalité (éléments de contexte, grandeurs) susceptibles de relever d'un traitement mathématique — Mettre en relation les aspects retenus en vue de la construction d'un modèle mathématique — Associer une valeur numérique à un objet d'étude, lien avec la mesure	— La traduction mathématique de la mise en relation des aspects pertinents choisis — Le traitement mathématique à partir de cette traduction

Tableau 1. Formes de la MH et MV dans notre recherche

formes de la mathématisation horizontale (MH) et de la mathématisation verticale (MV) pour notre étude, présentées dans le tableau 1 (Yvain-Prébiski, 2018). En appui sur ces définitions et sur des éléments d'une première étude épistémologique des pratiques de modélisation des chercheurs (Yvain, 2017), nous avons élaboré un cycle de modélisation mettant en évidence les rapports dialectiques entre l'aspect horizontal et vertical de la mathématisation (Voir figure 3).

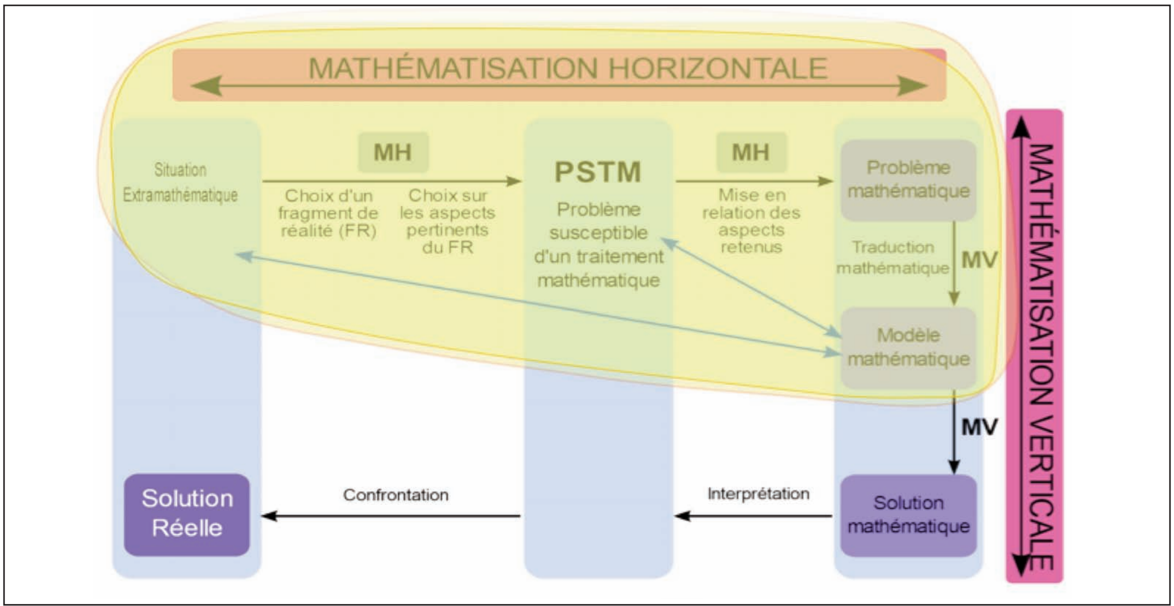


Figure 3. Cycle de modélisation mathématique prenant en compte l'aspect horizontal et vertical de la mathématisation (Yvain-Prébiski, 2018)

Les doubles flèches à partir de modèle mathématique vers « la situation réelle » et vers « le problème susceptible d'un traitement mathématique » mettent en évidence l'interconnexion entre la mathématisation horizontale et la mathématisation verticale dans une activité de modélisation mathématique. Elles montrent que le choix du modèle de départ peut être un modèle mathématique connu qui permet au chercheur (ou l'apprenti chercheur) d'envisager un travail de mathématisation verticale en vue de l'éclairer sur le problème quitte à affiner ou rejeter le modèle choisi en reconsidérant les choix retenus (Yvain-Prébiski 2018).

La mathématisation horizontale est constitutive de l'activité de modélisation à partir d'une situation extra-mathématique. Cette mathématisation est-elle prise en compte par les enseignants ? Quels sont les effets de cette prise en compte (ou non) par les différents enseignants impliqués dans le dispositif LSa, de la nécessité d'impliquer activement les élèves dans le travail leur permettant de passer d'une situation ancrée dans le réel, à un problème mathématique ?

3. — Éléments d'analyse *a priori* de « l'aire de baignade » au regard de la mathématisation

Comme précisé précédemment, la situation proposée aux collectifs d'enseignants est un germe de situation. Chaque collectif va l'étudier et proposer éventuellement des modifications dans la perspective de la mettre en œuvre à un certain niveau d'enseignement.

Fragments de réalité	Choix/hypothèses simplificatrices
Le lac	– Il est aussi grand que l'on veut. – On fixe sa forme. – On considère qu'il a un bord rectiligne (celui en contact avec la berge). – On considère qu'il a une anse semi-circulaire.
La ligne d'eau	– Elle est flexible. – On néglige la manière dont elle sera fixée. – On ne la dispose par le long de la délimitation du lac avec la berge. – On l'assimile à un matériau souple pouvant se courber (et non une succession d'entretoises rigides).
Le texte de loi	– On considère que les enfants vont se baigner tous en même temps. – On ne prend pas en compte comme personnes dans l'eau que les enfants (pas les moniteurs ou potentiellement d'autres personnes).
La zone de baignade	– On fixe sa forme. – Elle est fermée. – Considérer « aire de baignade » dans le texte comme zone de baignade. – On considère que les baigneurs se répartissent uniformément dans la zone de baignade.

Tableau 2. Des choix possibles

Pour traiter mathématiquement cette situation, il est nécessaire de faire des choix, des hypothèses simplificatrices : ce travail relève de la mathématisation horizontale. On peut s'interroger sur différents fragments de réalité comme le lac, la ligne d'eau, le texte de loi, la zone de baignade. Le tableau 2 (page précédente) propose des choix possibles (non exhaustifs) au regard du fragment de réalité étudié.

Selon le fragment de réalité considéré en première approche et les choix actés, nous illustrons dans la suite par deux exemples, le fait que le traitement mathématique qui relève de la mathématisation verticale peut être différent.

Problème 1 : *Peut-on construire une zone de baignade semi-circulaire dont le demi-périmètre est de* 25 *m pour respecter le texte de loi (*3 *personnes pour* 2 *m*^{2}*) sachant que* 120 *personnes se baignent en même temps ?*

Ce problème émane des choix suivants : le lac est aussi grand que l'on veut et a un bord rectiligne avec la berge, la ligne d'eau est flexible, tous les enfants se baignent en même temps, le texte de loi ne concerne pas les adultes et la zone de baignade est semi-circulaire.

Problème 2 : *Quelle forme donner à la zone baignade pour pouvoir respecter le texte de loi (*3 *personnes pour* 2 *m*^{2}*) sachant que* 120 *personnes se baignent en même temps ?*

Ici il est acté que : le lac est aussi grand qu'on veut et a un de bord rectiligne avec la berge, la ligne d'eau est flexible, le texte de loi ne concerne pas les adultes et la zone de baignade est de forme libre.

Cela illustre le fait que pour traiter mathématiquement la situation de l'aire de baignade telle qu'elle est formulée, d'une part il est nécessaire de faire des choix et d'autre part que selon les choix décidés le problème mathématique est différent. Nous faisons l'hypothèse que pour les enseignants ces choix vont rester implicites, tout au moins lors de la première exploration de la situation. En appui sur des résultats de recherches antérieures (Yvain-Prébiski & Chesnais 2019), cette non prise en compte du travail de mathématisation horizontale peut générer des difficultés chez les enseignants dans l'accompagnement du travail des élèves.

4. — Méthodologie

4.1 *Les deux collectifs étudiés*

Nous avons mené une étude impliquant deux collectifs (voir tableau 3 de la page suivante). Le collectif 1 est un groupe mixte d'enseignants (quatre enseignants du primaire et deux du secondaire) et le collectif 2 est composé de sept formateurs d'enseignants du primaire tous volontaires. La leçon du collectif 1 a eu lieu en classe de 6ème et celle du collectif 2 avec des élèves de niveau CM1-CM2.

4.2 *Collecte de données issues des temps de formation*

Concernant les deux collectifs, nos données sont issues de différents temps de formation réalisés en présentiel ou à distance. Le type de données collectées est précisé dans les tableaux suivants (voir tableaux 4a et 4b, pages suivantes).

Les temps 3.1 (collectif 1) et 2.2 (collectif 2) d'analyse *a posteriori* de la leçon de recherche s'appuient sur les productions des différents groupes d'élèves et le partage par les observateurs d'éléments de leur grille d'observateur réalisée en classe. Le temps 4.1 concerne uniquement le collectif d'enseignants (collectif 1) et non le collectif 2 car ceux-ci sont des formateurs du premier degré, Référents Mathématiques

	Collectif 1	**Collectif 2**
Recrutement	Désignés	Volontaires
Professeur de collège expérimentés	2	0
Professeur des écoles expérimentés	4	1
Formateurs de professeurs des écoles (RMC)		6
Facilitateurs	2	2
Chercheurs	2	2
Type de Lesson Study	Liaison école-collège (cycle 3)	Formation de facilitateurs (Plan mathématique Villani Torossian)
Niveau de classe intégré en Lesson Study	$6^{ème}$	CM_1-CM_2

Tableau 3. Description des collectifs 1 et 2

Temps 1.1 (Avant la formation, à distance) Questionnaire 1 (analyse *a priori*, grille d'amorce d'analyse *a priori*)	**Temps 2.**1 (Pendant la formation, en présentiel) Mise en commun de la résolution individuelle de la situation au tableau (voir le diaporama en annexe 2) Compte-rendu sur mise en commun de la grille d'amorce d'analyse *a priori* (échanges) Feuille de route V_1 de préparation collective de la leçon de recherche dont grille d'intervention de l'enseignant
Temps 3.1 (Pendant la formation, en présentiel) Feuille de route V_2 : éléments d'analyse *a posteriori* de la leçon de recherche dont ajouts d'interventions de l'enseignant	**Temps 4.**1 (Après la formation) Retours sur expérimentations individuelles

Tableau 4a. Types de données recueillies aux temps de formation, collectif 1

Temps 1.2 (Pendant la formation, en présentiel) Mise en commun de résolution individuelle de la situation (photo du tableau en annexe 3) Synthèse des grilles d'amorce d'analyse *a priori* Feuille de route V_1 de préparation collective de la leçon de recherche dont grille d'intervention de l'enseignant	**Temps 2.**2 (Pendant la formation, en présentiel) Feuille de route V_2 : éléments d'analyse *a posteriori* de la leçon de recherche dont ajouts d'interventions de l'enseignant

Tableau 4b. Types de données recueillies aux temps de formation, collectif 2

de Circonscription, majoritairement sans classe d'élèves. Excepté le temps 4.1, les deux collectifs ont réalisé un travail similaire en LSa sur l'aire de baignade. Pour notre étude, nous nous focalisons sur les éléments du corpus correspondants aux temps 2.1, 3.1, 1.2 et 2.2.

Nous faisons l'hypothèse que lors des temps 2.1 et 3.1, les productions d'élèves analysées par les collectifs, nous donnent accès à des difficultés exprimées par les enseignants.

Le lecteur pourra trouver en annexe 2 et 3 le tableau regroupant les solutions au problème trouvées par le collectif 2 (Temps 1.2). Comme envisagé dans notre analyse *a priori*, les choix adossés au différents traitements mathématiques proposés sont restés implicites (par exemple le bord rectiligne ou encore la ligne d'eau flexible).

L'annexe 4 présente un extrait de la grille d'amorce d'analyse *a priori* élaborée par le collectif 1 (Temps 2.1). On peut voir que pour le collectif, il est implicite que la situation de l'aire de baignade est un problème d'optimisation.

Pour le collectif 2, les choix de scénario, leur déroulement, les productions des élèves et l'analyse *a posteriori* qui a suivi sont précisés dans un cahier de Lesson Study « Aire de baignade ». Il est accessible sur le site[4] de l'IREM de Rouen. Le lecteur pourra trouver en annexe 5 la structure des deux scénarii envisagés dans leurs grandes lignes. Cette annexe contient également les notes de l'observateur global de la séance du collectif 1, car elle donne un aperçu de comment l'enseignant expérimentateur a amené la classe à considérer des éléments de mathématisation horizontale et verticale.

4 https://irem.univ-rouen.fr/cahiers-de-ls
(à paraître prochainement)

4.3 *Les trois étapes de notre méthodologie*

Notre méthodologie est structurée en trois étapes articulées autour de la seconde boucle (cf. figure 2).

1ère étape : Analyse initiale *a priori* de la situation

— Analyse de la résolution initiale de la situation par les enseignants

— Analyse de la grille d'amorce d'analyse *a priori (focus sur dimension vie quotidienne-difficultés et erreurs possibles)*

2ème étape : Analyse de la préparation collective de séance

— Analyse du scénario prévu

— Analyse des interventions de l'enseignant anticipées avant la leçon

3ème étape : Analyse des alternatives post leçon

— Analyse des modifications de scénario

— Analyse des nouvelles interventions conçues après la leçon

4.4 *Méthode d'analyse*

En nous basant sur les formes de mathématisation horizontale présentées précédemment, nous avons défini six indicateurs pour répondre à notre principale question de recherche[5] (voir le tableau 5 de la page suivante) que nous avons utilisés pour analyser notre corpus de données.

5 Comment la nécessité de mathématiser une situation extra-mathématique pour la rendre accessible au traitement mathématique est-elle considérée et traitée en classe (si tant est qu'elle le soit) par les enseignants du primaire et du secondaire ?

Indicateur 1 (FR)	Question sur le choix du ou des fragment(s) de la réalité
Indicateur 2 (G)	Question sur le choix de l'identification des grandeurs pertinentes et/ou de leurs valeurs.
Indicateur 3 (Rel)	Question sur la relation entre les grandeurs identifiées.
Indicateur 4 (Mes)	Question sur la nécessité de disposer de données numériques (associer une valeur numérique à un objet d'étude)
Indicateur 5 (MV)	Question sur le travail mathématique, au sens de la mathématisation verticale.
Indicateur 6 (Autre)	Autre question non liée à un travail de mathématisation, par exemple des questions d'organisation de la classe.

Tableau 5. Indicateurs pour les analyses

5. — Premiers résultats

Dans cette section, nous présentons les résultats quantitatifs puis qualitatifs de la triangulation de nos données. L'annexe 6 illustre l'emploi des indicateurs (Tableau 5) pour analyser les grilles d'interventions de l'enseignant réalisées par les collectifs 1 et 2 lors de la préparation collective de la séance.

5.1 *Résultats quantitatifs*

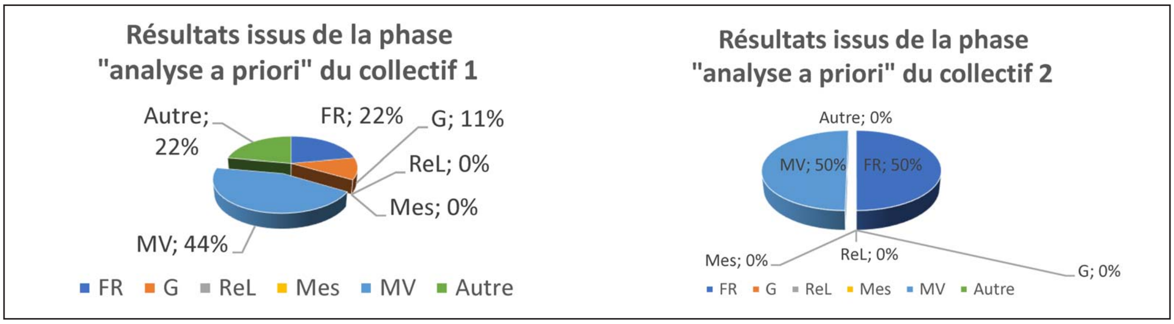


Figure 4. Résultats quantitatifs pour la phase d'analyse a priori

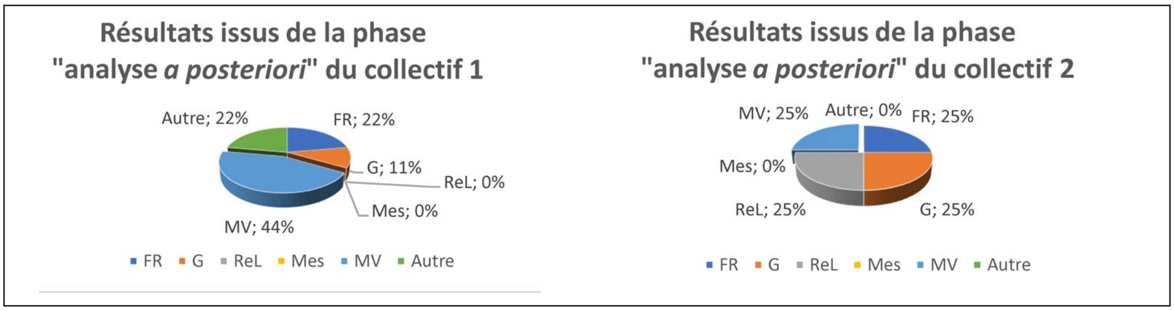


Figure 5. Résultats quantitatifs pour les phases d'analyse a posteriori

Ces résultats montrent des différences entre la deuxième étape (phase *a priori* : préparation de la feuille de route) et la troisième étape (phase a *posteriori* : l'analyse de la leçon partagée collectivement). En effet, au début, les enseignants des deux collectifs ont essayé de résoudre le problème du point de vue de la mathématisation verticale sans se préoccuper des hypothèses simplificatrices inhérentes à leur traitement mathématique, comme acter que la forme du lac est rectangulaire et que le bord du lac est rectiligne, comme l'illustre la figure 6a.

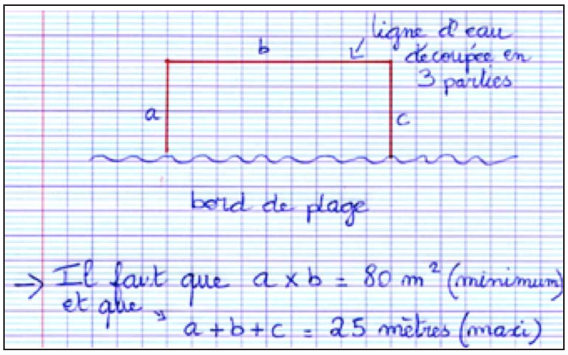


Figure 6a Production d'un enseignant du collectif 1 lors de la phase de résolution

Certains ont d'ailleurs choisi de ne pas prendre en compte le contexte du problème (voir figure 6b).

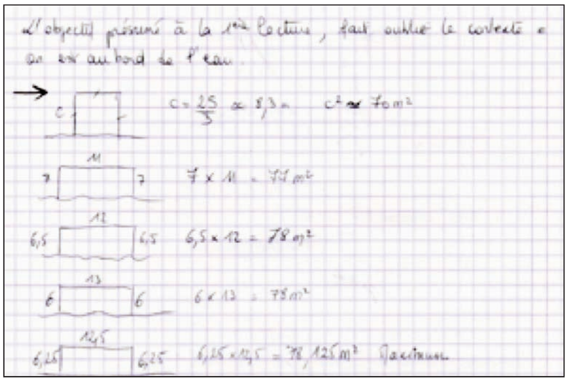


Figure 6b Autre production d'un enseignant du collectif 1 lors de la phase de résolution

Lors de la phase de l'élaboration d'un scénario pour une classe, les formateurs ont donné la possibilité aux collectifs d'adapter l'énoncé proposé initialement. Les deux collectifs ont choisi de ne pas le modifier. Ils ont ensuite élaboré une feuille de route sans discuter du choix des hypothèses simplificatrices possibles. La phase a posteriori du dispositif LSa leur a permis de prendre conscience de la nécessité de prendre en compte l'ancrage de la situation dans la réalité et de réfléchir à l'adaptation de leur mise en œuvre et de leurs gestes professionnels, ce qui constitue un premier résultat.

5.2 *Résultats qualitatifs*

Les partages de résolution du problème (annexes 2 et 3) témoignent d'une centration des enseignants sur la mathématisation verticale avec la considération de plusieurs types de formes géométriques et des calculs d'aires associés. C'est également le cas pour le travail d'interprétation de la loi associée à des raisonnements incluant uniquement de la proportionnalité.

Le principal résultat qualitatif de nos premières analyses montre que les enseignants minimisent la prise en compte de la mathématisation horizontale dans le processus de modélisation, notamment dans les échanges lors de la préparation de la leçon. Initialement, le travail de mathématisation horizontale n'est pas explicite. Par exemple, les deux collectifs ne se questionnent pas sur ce que veut dire « *nager tous ensemble* », sur la forme du lac ou encore sur comment fixer la ligne d'eau ? Ce manque de considération a entrainé des difficultés pour des enseignants à accompagner le travail développé en classe par les élèves comme l'illustre l'exemple suivant.

Le collectif 1 d'enseignants a choisi d'apporter de la laine pour que les élèves puissent matérialiser le fragment de réalité « ligne d'eau

« pour délimiter le contour de la zone de baignade. Au cours de la séance, un groupe d'élèves a découpé des bouts de laine pour délimiter des zones séparant les nageurs en paquets de 3 baigneurs. Il a essayé de représenter 40 zones carrées de $2m^2$. Les élèves ont ensuite placé trois petits morceaux de papier dans chaque zone pour représenter trois nageurs (voir figure 7).

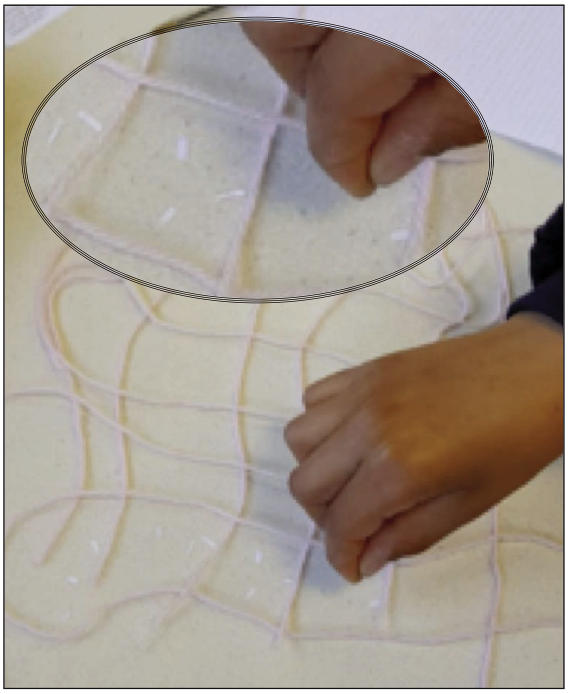


Figure 7. Production d'un groupe d'élèves (et zoom) illustrant un choix de fragment de réalité avec la laine

Le collectif 1 a exprimé s'être trouvé en difficulté face au choix de ce groupe, comme l'illustre l'échange suivant lors de l'analyse collective qui a suivi la séance :

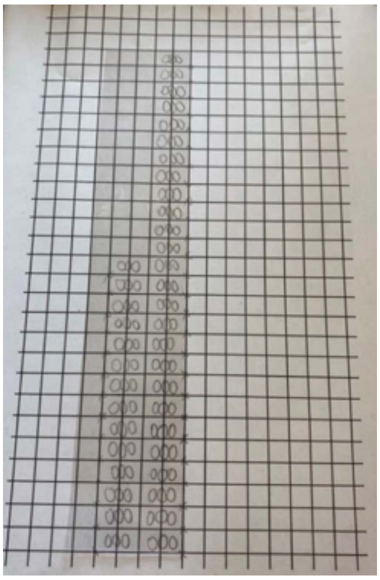
L'enseignant expérimentateur (en lien avec la figure 7 partagée post-leçon) : *L'élève du groupe a finalement mis la ligne d'eau au bord et il était derrière la ligne d'eau, je pensais que c'était la plage mécaniquement, mais ce n'était pas ça.*

L'observatrice du groupe d'élèves : *Au début, il a fait, ça ressemblait à une piscine, des couloirs et puis il l'a quadrillé comme un grillé à la pomme. Il a pris ensuite un petit morceau de papier pour dessiner un nageur et il a dit : « il faut que j'en mette trois là-dedans « en désignant chaque case.*

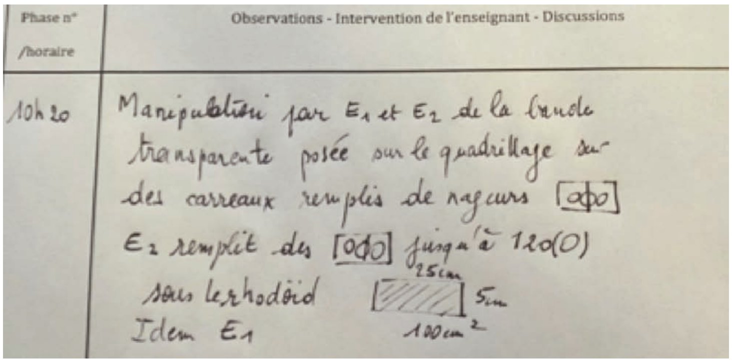
Le collectif d'enseignants pensait, avant la leçon, que la laine servirait à matérialiser la ligne d'eau pour délimiter la zone de baignade. Par la suite, grâce à l'analyse de la leçon collective, il a réalisé qu'il y avait d'autres possibilités d'utiliser la laine pour cette résolution de problème selon le fragment de réalité que l'on considère.

Nous avons relevé une difficulté semblable dans le collectif 2. Ce dernier a fait le choix de donner aux élèves un morceau de plastique souple transparent (rhodoïd de longueur 25 cm et de largeur 4 cm). Leur but était que les élèves utilisent ce plastique pour matérialiser la forme de ligne d'eau (en particulier pour faire apparaître un cercle ou un demi-cercle). Sur une feuille quadrillée distribuée avec le rhodoïd (photo en annexe 5), une élève d'un groupe, E2, a représenté 40 groupes de trois nageurs. Sa représentation est guidée par un usage à plat du rhodoïd sur son papier quadrillé. Elle a agencé les 120 nageurs en les représentant par des « ronds » (Voir figure 8 de la page ci-contre).

D'autres productions témoignent de ce type d'organisation dans la classe où les élèves ont eu l'intention, avec leur usage du rhodoïd de matérialiser une zone de baignade et non pas la ligne d'eau comme imaginé en amont par le collectif 2. La difficulté engendrée par le rhodoïd a été pointée par ce col-



Production de E2



Extrait 1 de la fiche d'observateur au moment de l'échange

Discussion entre E1 et E2, lors de l'élaboration de la représentation sur la feuille quadrillée de carrés d'1 cm de côté :
E2 (*posant son rhodoïd à plat sur le papier quadrillé vierge)* : « On a une fois 25 carreaux de long »
E1 « Un carreau, ça fait un mètre, ils ne respectent pas la loi. »
E2 « Ce n'est pas un enfant, dans un carré, il y a trois enfants »

Extrait 2 de la fiche d'observateur du groupe

Figure 8. Exemple d'utilisation du rhodoïd par des élèves et extraits de la fiche d'observateur

- Feuille pour relier rhodoïd 25 cm pour zone circulaire prévoir une largeur fine ou scoubidou pas mou ou laine.

Figure 9. Extrait de la feuille de route version, modification ajoutée en bleu après la leçon, collectif 2

lectif. Prenant conscience que le rhodoïd d'une largeur d'environ 5 cm n'incitait pas à l'utiliser pour matérialiser une ligne d'eau, il a suggéré de lui donner une petite largeur (de l'ordre de quelques millimètres) ou a envisagé un matériel non rectangulaire (scoubidou, laine) (Voir Figure 9).

Ces deux exemples (utilisation de la laine et du rhodoïd) mettent en évidence que ne pas considérer le rôle de la mathématisation horizontale dans une activité de modélisation peut générer des difficultés pour l'enseignant à comprendre et à accompagner le travail des élèves.

6. — Discussions et perspectives

Les premiers résultats de recherche quantitatifs et qualitatifs convergent vers un besoin de formation des enseignants sur la modélisation dans le cadre de proposition de situation extra-mathématique. Partir de situations ancrées dans le réel nécessite dans un premier temps de rendre le problème accessible par un traitement mathématique.

"*Il faut prendre en compte le fait qu'une question de vie quotidienne est rarement directement une question mathématique. Elle le devient à travers un processus de mathé-*

matisation ou modélisation mathématique qui simplifie et interprète la réalité. Il est important de rendre visible cette étape, les choix qui y sont faits et la façon dont ils conditionnent l'appréhension du réel, en y associant activement les élèves." (Préface d'Artigue dans Masselin (2020, p. 13))

L'étude montre que le dispositif LSa est un levier pour sensibiliser les enseignants aux enjeux de la modélisation mathématique. En effet, nous avons pointé que les différentes phases du dispositif LSa ont permis aux enseignants de prendre conscience que différents choix sont possibles et que les anticiper peut réduire les difficultés rencontrées lors de l'accompagnement des élèves dans leurs démarches.

À travers l'analyse de la dynamique du travail mathématique des élèves (fin de la boucle 2), les deux collectifs ont soulevé des aspects relevant de la mathématisation horizontale non pris en compte avant la séance de cours. La boucle 3 (expériences des enseignants dans leurs classes, puis feedback et apports didactiques et mathématiques) leur a permis de prendre conscience des enjeux de cette mathématisation dans une activité de modélisation. En cela, notre recherche confirme les résultats de Quaresma & Ponte (2019) montrant que la LS permet également un développement de la réflexion des enseignants. Dans notre étude, la LSa fait également évoluer la réflexion des formateurs d'enseignants (collectif 2) sur la modélisation mathématique.

Nous rappelons que nous sommes au début du projet de recherche « LSa et dynamiques» mené par une équipe du LDAR de l'Université Paris Cité. Pour l'instant l'étude s'est focalisée sur la boucle 2 mais il serait intéressant d'investiguer la boucle 3 qui correspond à la mise en œuvre de la situation par les enseignants dans leur propre classe. Nous projetons également de mettre à l'étude la question de comment outiller les facilitateurs sur la modélisation afin d'améliorer la formation des enseignants qui participent au dispositif LSa. Cette question concerne plus largement l'étude des enjeux de formation autour de l'enseignement et de l'apprentissage de la modélisation mathématique à l'école primaire et dans le secondaire.

Bibliographie

Freudenthal, H. (1991) *Revisiting mathematics education.* Dordrecht, The Netherlands:Kluwer Academic

Fujii, T. (2016). Designing and adapting tasks in lesson planning: a critical process of lesson study. ZDM Mathematics Education, 48(4), 411–423. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0770-3

Lewis, C., Friedkin, S., Emerson, K., Henn, L., & Goldsmith, L. (2019). How does lesson study work? Toward a theory of lesson study process and Impact. In R. Huang, A. Takahashi, & J.P. Ponte (Eds.), Theory and practice of lesson study in mathematics: Advances in mathematics education (pp. 13–37). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-04031-4_2.

Masselin, B. & Hartmann, F. (2020). Un dispositive de formation inspiré des Lesson Studies dans l'académie de Rouen, REPERES-IREM, n°120, pp.43-55. https://www.univ-irem.fr/reperes/articles/120_article_794.pdf

Masselin, B. (2020). *Ingénieries de formation en Mathématiques de l'école au lycée : des réalisations inspirées des Lesson Studies.*, Rouen : Presses Universitaires de Rouen et du Havre, http://purh.univ-rouen.fr/node/1309

Masselin, B., Artigue, M. & Hartmann, F. (2022). Étude du rôle des facilitateurs en Lesson Study adapté. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, *In Celi, V., Lajoie, C. & Tempier, F., Numéro spécial des ADSC sur les pratiques de formation.* https://journals.openedition.org/adsc/1816

Masselin, B. & Artigue, M. (en cours). How the situation seeds used in LSa support the collaborative work of facilitators and future facilitators, CERME13th, Budapest, Hongry

OCDE (2022). PISA 2022 Mathematics Framework. Retrieved on 01.02.2023 from https://pisa2022-maths.oecd.org/index.html.

Shuilleabhain, A. N., & Clivaz, S. (2017). Analisando a aprendizagem do professor num estudo de aula : conhecimento matemático para ensinar e níveis de atividade do professor. Quadrante, 26(2), 99–125. https://doi.org/10.48489/quadrante.22948

Stigler, J., & Hiebert, J. (1999). The teaching gap: Best ideas from the world's teachers for improving in the classroom. The Free Press.

Takahashi, A. (2006). Characteristics of Japanese mathematics lessons. Tsukuba Journal of Educational

Study in Mathematics, 25, 37–44.

Treffers, A. (1978) Wiskobas Doelgericht. Utrecht : IOWO

Yvain, S. (2017). Etude de la transposition du processus mathématisation aux élèves. In M. Bächtold,

V. Durand-Guerrier & V. Munier (Eds.), *Épistémologie et Didactique* (pp. 235-248). Presses universitaires de Franche-Comté

Yvain-Prébiski S. (2018). *Étude de la transposition à la classe de pratiques de chercheurs en modélisation mathématique dans les sciences du vivant. Analyse des conditions de la dévolution de la mathématisation horizontale aux élèves* [Thèse de doctorat, Université de Montpellier]. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01956661v1

Yvain-Prébiski, S., & Chesnais, A. (2019). Horizontal mathematization: a potential lever to overcome obstacles to the teaching of modelling. In *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (No. 28). Freudenthal Institute.

Yvain-Prébiski, S. (2021). Didactical adaptation of professional practice of modelling: a case study. In F.K.S. Leung, G.A. Stillman, G. Kaiser, K.L. Wong (Eds.), *Mathematical Modelling Education in East and West. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling.* (pp. 305-319). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-66996-6_26

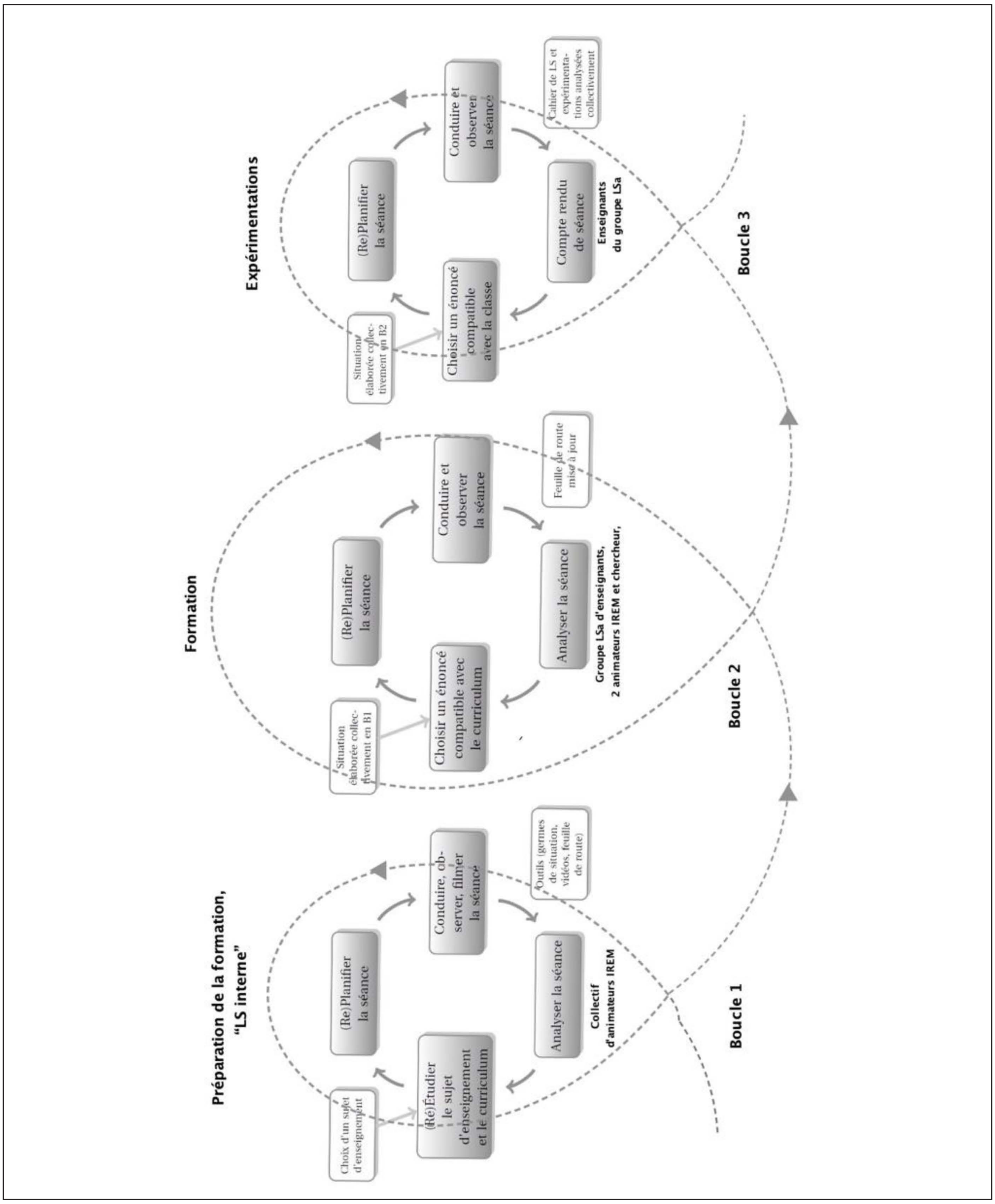
Sitographie

https://irem.univ-rouen.fr/lesson-study

https://pisa2022-maths.oecd.org/index.html.

ANNEXE 1

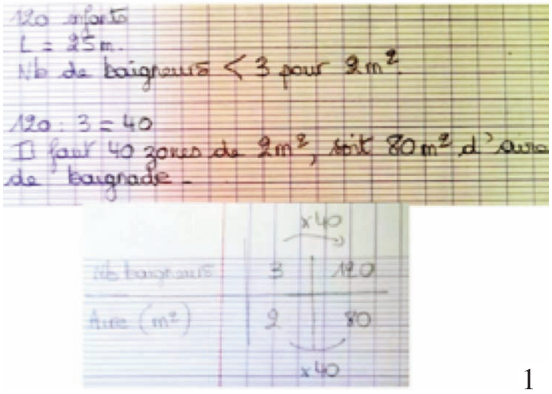
Les trois boucles du dispositif LSa (Masselin & al., 2022)



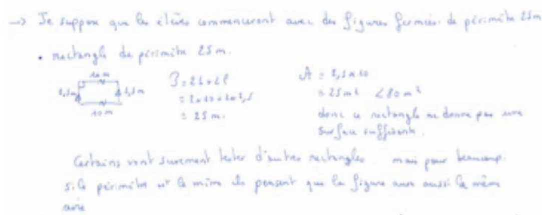
ANNEXE 2

Diaporama des résolutions (collectif 1, temps 2.1)

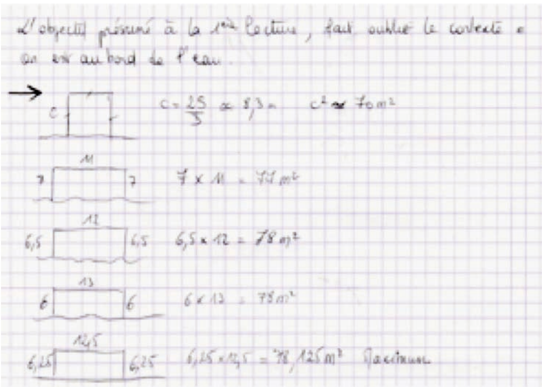
Mise en commun : résolution pour nous



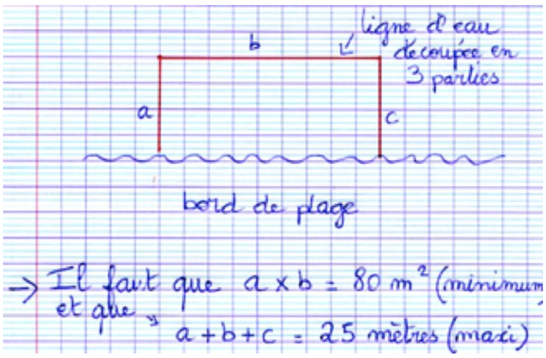
1



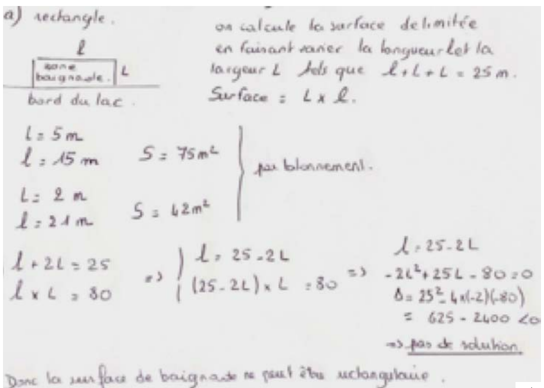
2



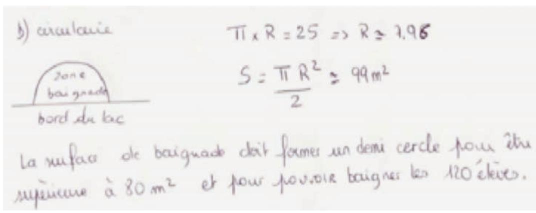
3



4



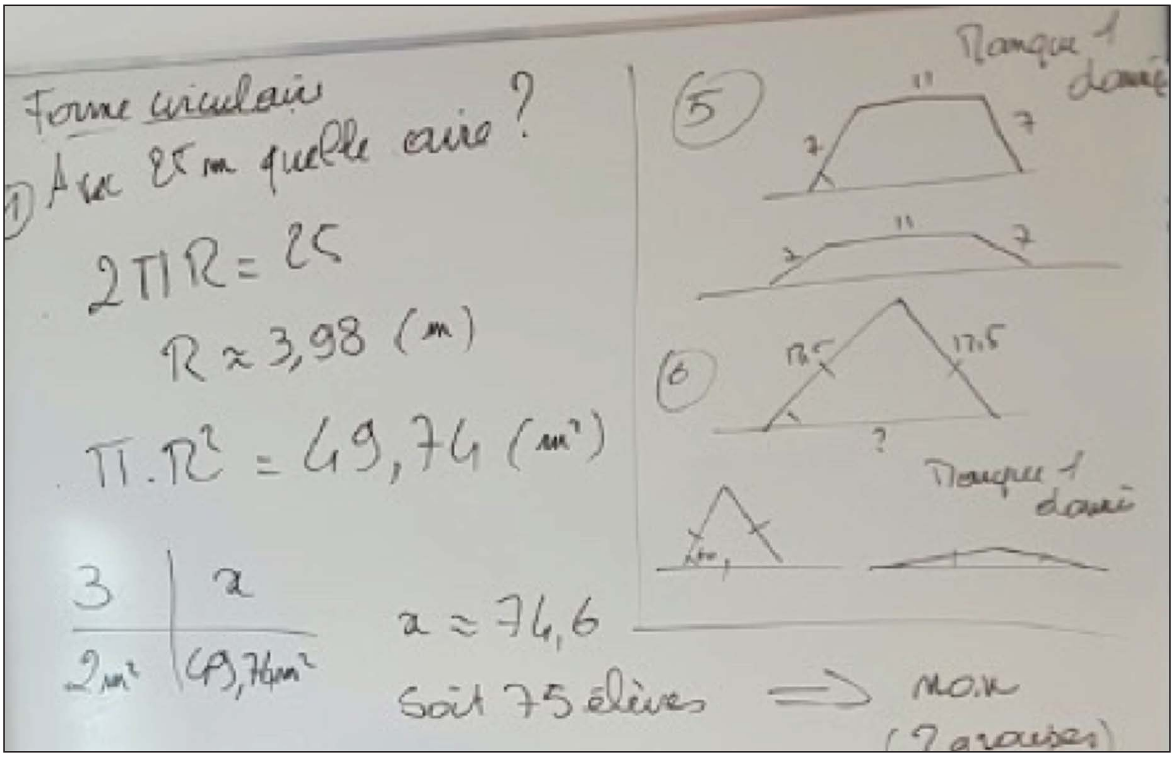
5



6

ANNEXE 3

Photo du tableau des résolutions (collectif 2, temps 1.2)



ANNEXE 4

Extrait de la grille d'amorce d'analyse a priori (collectif 1)

Dimension matérielle ou TICE	L'idéal serait de la faire en piscine ou de se mettre en situation (à l'extérieur) Du matériel, pourquoi pas, pour matérialiser la ligne d'eau et faire varier les formes pour observer la variation de l'aire, peut-être plus parlant pour certains que des dessins. Des TICE non, trop compliqué avec des 6$^{\text{èmes}}$ qui n'ont que quelques séances à leur actif. Non car en 6$^{\text{ème}}$ optimiser cette recherche d'aire est trop compliquée sauf si on les guide car ils n'ont derrière eux que 4 ou 5 séances d'utilisation du logiciel Geogebra. Si tableur, ils pourraient essayer d'optimiser l'aire d'un rectangle en faisant varier les dimensions des côtés en conservant un périmètre de 25 m. Mais ils n'ont pas encore fait de tableur ou juste une séance de familiarisation.

ANNEXE 5

Grandes phases des scénarii des collectifs 1 et 2

Collectif 1 : extrait de la feuille de route

Objectifs de la séance

Chercher un problème avec des grandeurs variées, chercher avec une notion de périmètre, chercher avec notion d'aire, proportionnalité

Matériel

Une photo de ligne d'eau enroulée à projeter si besoin.

Photo de ligne d'eau

Prévoir du matériel sur chaque table : papier blanc, quadrillé : petits carreaux et grands carreaux, des ciseaux, une bobine de fil remplacée par deux pelotes de laines (une jaune et une rose) dans chaque groupe de 4 élèves.

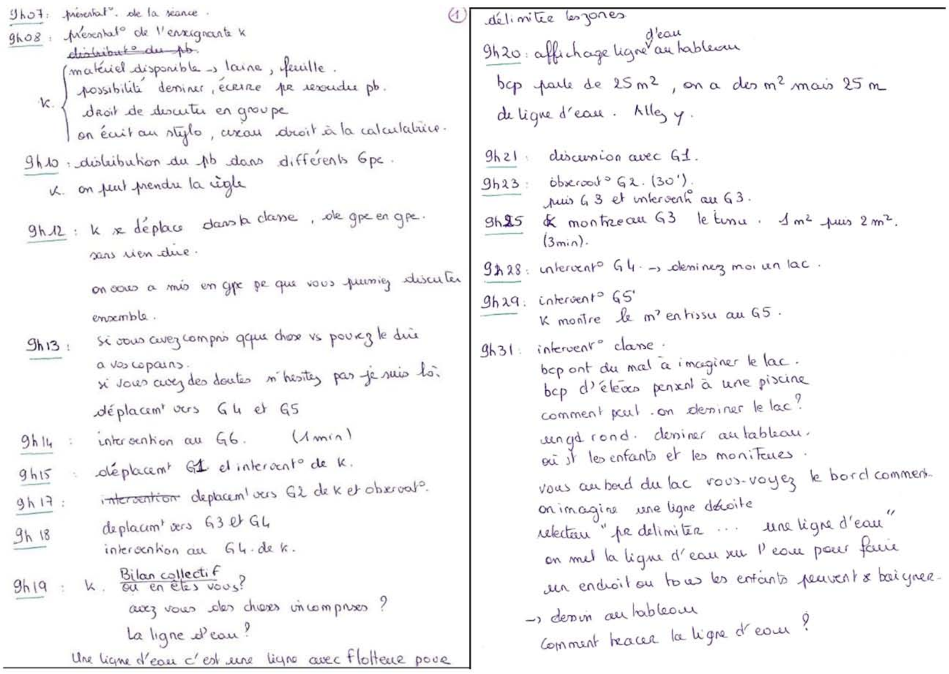
Un morceau de tissus (2 carrés de $1m^2$ cousus par un côté et de tissus différents)

Scénario prévu

Phase 1 (2 min) : Introduction du problème : distribution de l'énoncé lu silencieusement
Phase 2 (10 min) : **Travail de groupe**, recherche avec le matériel mis à disposition.
Phase 3 (... min) : **Bilan intermédiaire** répondre collectivement aux questions. Définition d'une ligne d'eau, prise en charge de la modélisation de la plage (bord de l'eau), si la réponse sur la proportionnalité est trouvée elle est partagée à la classe afin de les lancer sur la recherche de la forme.
Phase 4 (30 min) : **Retour au travail de groupe**

Pause des élèves (15 min)

Phase 5 (... min) : Bilan
Montrer différents rectangles avec les 25m et des aires différentes. Écrire la définition de ce qu'est un m², deux m² ? Faire dessiner un cm² et deux surfaces différentes de 2 cm². À périmètre égal, aires différentes



9h07 : présentat°. de la séance.
9h08 : présentat° de l'enseignante K
~~distribut° du pb.~~
K. matériel disponible → laine, feuille.
possibilité dessiner, écrire pr résoudre pb.
droit de discuter en groupe
on écrit au stylo, ciseau droit à la calculatrice.
9h10 : distribution du pb dans différents Gpe.
K. on peut prendre la règle
9h12 : K se déplace dans la classe, de gpe en gpe.
sans rien dire.
on vous a mis en gpe pr que vous puissiez discuter ensemble.
9h13 : si vous avez compris qque chose vs pouvez le dire à vos copains.
si vous avez des doutes n'hésitez pas je suis là.
déplacem^t vers G4 et G5
9h14 : intervention au G6. (1 min)
9h15 : déplacem^t G1 et intervent° de K.
9h17 : ~~intervention~~ déplacem^t vers G2 de K et observat°.
9h18 déplacem^t vers G3 et G4
intervention au G4. de K.
9h19 : K. Bilan collectif
où en êtes vous ?
avez vous des choses incomprises ?
La ligne d'eau ?
Une ligne d'eau c'est une ligne avec flotteur pour

(1) délimiter les zones
9h20 : affichage ligne d'eau au tableau
bcp parle de 25 m², on a des m² mais 25 m de ligne d'eau. Allez y.
9h21 : discussion avec G1.
9h23 : observat° G2. (30').
puis G3 et intervent° au G3.
9h25 K montre au G3 le tissu. 1 m² puis 2 m². (3 min).
9h28 : intervent° G4. → dessinez moi un lac.
9h29 : intervent° G5
K montre le m² en tissu au G5.
9h31 : intervent° classe.
bcp ont du mal à imaginer le lac.
bcp d'élèves pensent à une piscine
comment peut-on dessiner le lac ?
un gd rond. dessiner au tableau.
où st les enfants et les moniteurs.
vous au bord du lac vous-voyez le bord comment.
on imagine une ligne droite
relecture " pr délimiter … une ligne d'eau "
on met la ligne d'eau sur l'eau pour faire un endroit où tous les enfants peuvent se baigner.
→ dessin au tableau
Comment tracer la ligne d'eau ?

Fiche d'observateur global de la séance

L'enseignante P intervient devant toute la classe
P « *Comment dessiner un lac ? Où sont les enfants ?* »
E « *Au bord* »
Sur son cercle représentant le lac, P indique l'endroit où se situe le « *bord* » par des petits points, met trois croix pour matérialiser trois enfants et dit à la classe
P « *Le bord peut être considéré comme droit* ».
P dessine sur l'autre tableau un segment, en disant « *c'est le bord* »
P demande « *Comment mettre la ligne d'eau ?* »

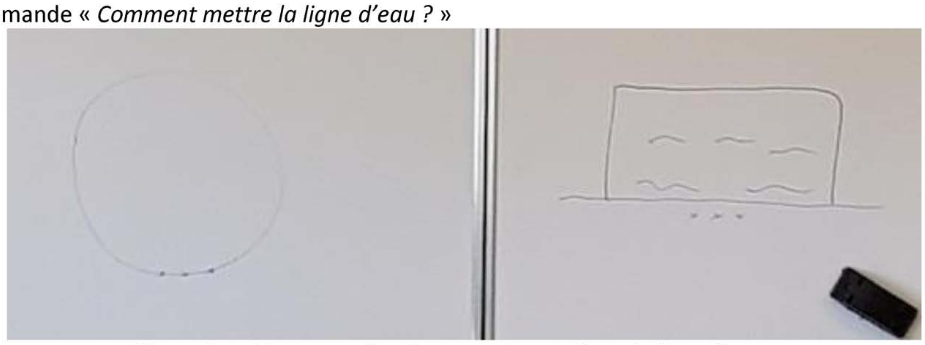
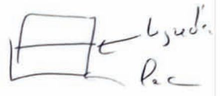


Photo du tableau avec les deux représentations de l'enseignante

Détail de l'intervention de l'enseignante en phase 3 (à 9h31min)

Détail du travail des différents groupes d'élèves (collectif 1)

Groupe	Procédures du groupe d'élèves	Intervention de P
Groupe N°1	Tentent des calculs M dit qu'on n'a pas la largeur du lac 0,5mx4m=2m^2 appui sur un rectangle où est indiqué 25m 12x4=48 et concluent 48 cases de 3 enfants Font à la calculatrice 48x3=144 et 144-120=24, concluent qu'il reste 24 places. Après intervention au tableau de P(9h31min) M dessine un carré de côté 8,33cm et remplit un carré marqué 8,33 avec des cases de 2m^2 M pense que 2m^2 est obtenu avec un carré de côté 2m Estiment à 32 fois 2m^2 M a fait des découpages en 1m^2 et non 2m^2	P Essaie d'imaginer ta plage P il faut 80m^2
Groupe N°3	Après plusieurs opérations (120 : 25, 12x2+1=25, 120 :3=40 et 25:4=6,25), le groupe se demande si le lac est plus grand que 2m^2 Se demandent comment dessiner un lac. Font un carré dont deux cotés font 25m. Calculent 25x 25 avec un carré de côté 25m L'élève A découpe des morceaux de laine et élabore avec un quadrillage de 40 zones puis découpe des petits papiers (en pose 3 par zone). Une autre élève M représente un quadrillage de 8 sur 5, modèle rectangulaire avec trois côtés apparaît. Difficulté à représenter à l'échelle ce qu'a fait A (soucis d'échelle 15cm pour 25cm chez A). À la fin, M représente un carré de côté 8,3cm (25cm/3)	P montre un morceau de tissus de 2m^2 (2 fois un carré d'aire 1m^2) P indique que leur calcul 25x25=625 correspond à l'aire du carré, et que 25 m c'est la longueur du contour.
Groupe N°4	Effectue des conversions 25m=250cm et 2m=200cm Puis 250 : 200 = 1,25cm Un élève tente une zone rectangulaire de 13m sur 6m puis **14**m sur 5,5m Un autre élève représente un lac patatoïde puis effectue 120 : 3 = 40 Il partage ensuite sa feuille en deux par une droite verticale et met 20 personnes de chaque côté (la feuille A4 fait office de lac) Répondent que la loi ne sera pas respectée car **14**x3=42, il restera donc 42 enfants en dehors de l'eau.	
Groupe N°5	Une première représentation en séparant une feuille A4 en deux par la ligne d'eau.  Cherchent 3 fois combien fait 120 et trouvent 40. Ont trouvé qu'il faut 40 carrés de 3 personnes et 40x 2m^2=80m^2 Font un carré de côté 8,33 et disent que non car aire de 68,88 <80 	P indique que la zone de baignade doit être fermée. P il faut les mettre les 80m^2 sur le lac avec la ligne d'eau de 25m
Groupe N°6	Un premier calcul est réalisé 2m^{2}x25m=50m^2 ~~3~~ Accompagné d'une zone de baignade rectangulaire où aire indiquée 50m^2 Deuxième essai avec carré de côté 8,3m mais aire de 68,89m^2 120 : 3 = 40 se demandent 40 quoi ? Se demandent comment on fait avec la calculatrice. Trouvent la touche X^2, confondent m et m^2 Coupent une longueur de ficelle de 25cm puis la découpe tous les 2cm et dessinent 3 enfants tous les 2cm. Concluent qu'ils ne vont pas tous rentrer car <80m^2	

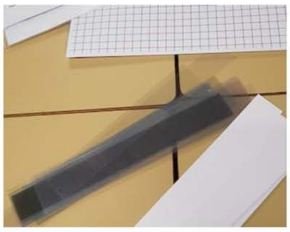
Collectif 2 : extrait de la feuille de route

Objectifs de la séance

Différencier les grandeurs aire et longueur, faire travailler ces concepts et associer une dimension avec son unité (unités m et m^2) en situation ; résoudre un problème avec démarche d'investigation.

Matériel

Feuille pour relier rhodoïd de longueur 25 cm pour zone circulaire, feuilles quadrillées 1cm de côté ciseaux, calculatrice, formulaire si besoin (affichage dans la classe ou sous-main)



Matériel envisagé (rhodoïd et papier quadrillé)

Scénario prévu

Phase 0 (10 min) : Introduction du problème : distribution de l'énoncé lu un élève
Phase 1 (5 min) : Recherche individuelle (feuille de brouillon blanche)
Phase 2 (25 min) : Recherche en groupe de 4 : possibilité d'avoir du matériel

Pause des élèves (15 min)

Phase 3 (20 min) : Bilan et institutionnalisation

Exposition des procédures des groupes à l'oral

Étape 1 : **Les différentes zones de baignade**

P « Quelle forme avez-vous choisi comme zone de baignade ? »

P schématise les zones rectangulaires, carrée, sans le disque

Étape 2 : P interroge un groupe qui a obtenu 80 m². Il faut au moins 80 m².

Étape 3 :

Conclusion : Pour résoudre ce problème, on a choisi différentes formes de zones de baignade. Avec les rectangles on n'a pas réussi à atteindre 80 m².

Zones proposées	Rectangle 3 Dessin + longueur + aire	**Aire minimale**
Rectangle 1 Dessin + longueur + aire		Il faut une zone de plus de 80m² Calculs
	Le carré Dessin + longueur + aire	**Conclusion**
Rectangle 2 Dessin + longueur + aire		- On a choisi différentes formes. - Avec des rectangles nous n'avons pas réussi à atteindre 80 m². Nous ne savons pas si c'est possible. - *Avec un demi-cercle, c'est possible.*
	Le demi-cercle Dessin + longueur + aire	

Organisation du tableau prévue en amont

ANNEXE 6

Traitement des grilles d'interventions de l'enseignant élaborées a priori (collectifs 1 et 2)

Phase du scénario	**Déclencheur d'intervention**	**Interventions**	**Effets attendus, buts**	**Indicateur n°**
2-3	Qu'est-ce qu'une ligne d'eau ?	Photo format papier à montrer au groupe. Projeter une photo d'une ligne d'eau		**1**
2-3	Qu'est-ce que le m avec un 2 dessus			**2**
2	L'élève réalise une figure fermée.	Pas d'intervention, on les laisse poursuivre. Puis on utilise la ficelle pour montrer la ligne d'eau sur la table.		**5**
2	Le groupe nous demande : Qu'est-ce qu'une aire de baignade ?			**1**
2	L'élève ne se met pas au travail « je ne comprends pas » ...		L'élève se remet au travail	
2	L'élève qui a essayé plusieurs choses est bloqué.			
2	L'élève reste sur la notion de périmètre sans basculer sur la notion d'aire : 3 enfants pour 2m et non pour $2m^2$	Présenter un tissu de 2m sur 1m qu'on peut plier en 2.	Rendre visible ce qu'est $1m^2$ afin de passer du linéaire à la surface	**2, 3**
	L'élève bloque sur la proportionnalité	On les y amène progressivement. Si tu as deux fois plus d'enfants, dix fois plus d'enfants ...	Trouver les $80m^2$ nécessaire pour 120 enfants	**5**
	L'élève pense que à périmètre fixé, l'aire est fixe.	Lui proposer de tracer un autre rectangle et de voir ce qui se passe.		**5**