COLORIAGE DE GRAPHES

Jeux de coloriage à partir du cycle 2 *voire avant*

Alain BUSSER
IREMI La Réunion

Depuis l'année 2015, au sein de l'Irem de La Réunion, une expérimentation est en cours, autour de la théorie des graphes par le jeu. La fête de la science, la semaine des mathématiques et les visites dans des établissements scolaires (en particulier en cycles 2 et 3) sont des occasions de faire découvrir des notions de théorie des graphes (sommet, arête, graphe orienté, degré d'un sommet, connexité, planarité…) par des jeux dont le plateau est un graphe. Dans cet article on se propose de décrire des jeux de coloriage de graphes. Ces jeux ne nécessitent qu'un graphe et des crayons de couleur. Ces jeux sont faciles à jouer mais difficiles à analyser mathématiquement. Ils portent les noms respectifs de Hex, Snort et Col. Pour aucun d'entre eux, on ne connaît de stratégie gagnante simple, mais l'exploration de ces jeux amène à une construction du nombre peu connue. Ces jeux permettent donc d'introduire la construction du nombre par Conway.

Compétences du cycle 3 en rapport avec ces jeux :

— *Chercher : S'engager dans une démarche, observer, questionner, manipuler, expérimenter, émettre des hypothèses, en mobilisant des outils ou des procédures mathématiques déjà rencontrées, en élaborant un raisonnement adapté à une situation nouvelle. Tester, essayer plusieurs pistes de résolution.*

— *Modéliser : Utiliser les mathématiques pour résoudre quelques problèmes issus de situations de la vie quotidienne. Recon-*

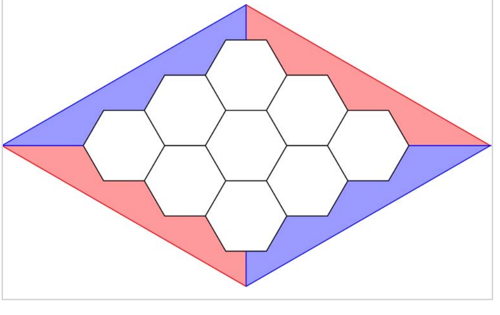
naître et distinguer des problèmes relevant de situations additives […]

— *Raisonner : Résoudre des problèmes nécessitant* [...] *la construction d'une démarche qui combine des étapes de raisonnement. Progresser collectivement dans une investigation en sachant prendre en compte le point de vue d'autrui.*

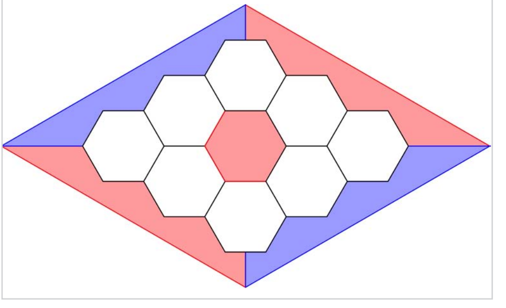
Le jeu de Hex

Le jeu de Hex est praticable dès la Petite Section (mais dans ce cas il faut de l'aide pour savoir qui a gagné, une fois que tous les hexagones ont été coloriés en rouge ou bleu). Il fait travailler la vision, le repérage dans l'espace, la planification. Il permet de (re)découvrir ce qu'est un hexagone, et que le losange est un cas particulier de parallélogramme. Le jeu de Hex avec crayons de couleur, feutres ou gouache a été pratiqué par plusieurs classes de l'école Aristide Briand du Tampon (La Réunion).

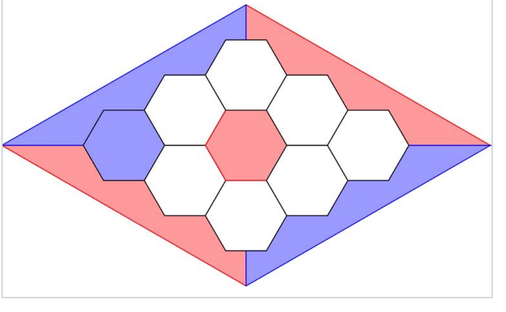
Dans ce jeu, deux joueurs s'affrontent sur ce plateau de jeu :



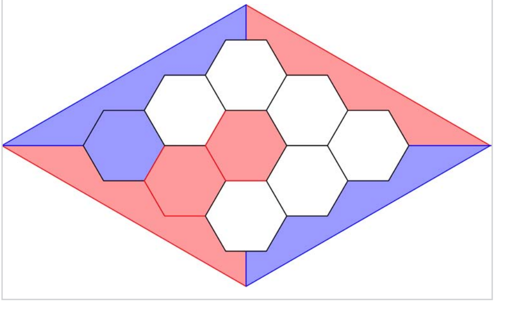
Les joueurs s'appellent respectivement Rouge (qui joue en premier) et Bleu (qui joue en second). Rouge a un crayon (ou un feutre) rouge et Bleu a un crayon bleu. Rouge commence, donc elle choisit une des 9 cases hexagonales et la colorie en rouge. Par symétrie ou parce que d'instinct elle pense qu'un sommet de degré élevé est stratégiquement intéressant, elle choisit la case centrale et la colorie en rouge :



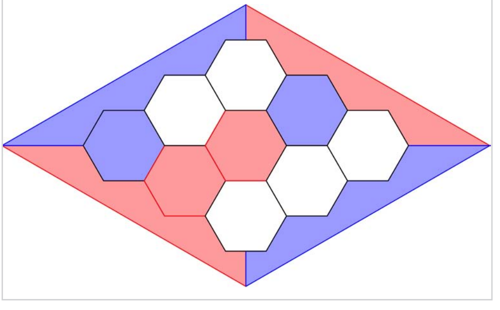
C'est au tour de Bleu maintenant de colorier une case. Bleu ne peut colorier qu'une case blanche. La case centrale lui est donc inaccessible. Il décide alors de colorier une case en coin :



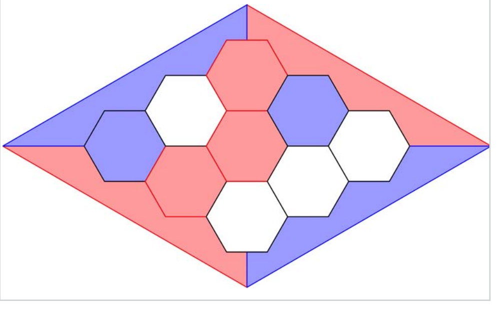
Mal lui en a pris : Rouge commence alors à établir un chemin rouge, en coloriant en rouge une case qui est déjà bordée de rouge :



Bleu s'en aperçoit alors, et tente de barrer la route à Rouge en coloriant en bleu la case du bout du chemin :

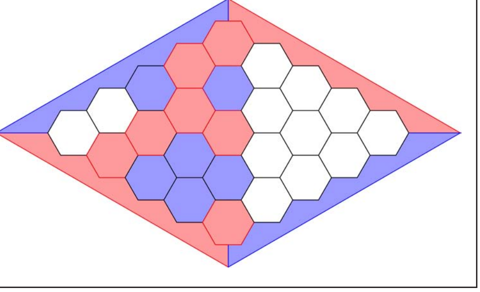


Mais c'est trop tard, Rouge peut quand même compléter son chemin :



Comme il y a un chemin rouge joignant deux côtés opposés rouges du losange, Rouge a gagné et le jeu peut s'arrêter là. Mais en cycle 1, on peut laisser les joueurs colorier jusqu'au bout, et seulement après cela regarder où est le chemin. En effet cela n'est pas toujours aisé. Cela peut même être l'occasion de donner des exercices à résoudre comme celui de l'encadré ci-contre…

Le jeu de Hex ci-dessous est terminé. Qui a gagné ? Qui a joué en premier ?



L'histoire du jeu de Hex

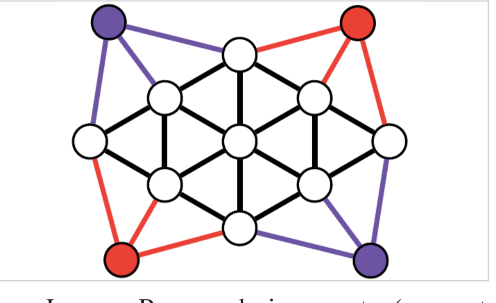
En 1942, Piet Hein était déjà connu dans le monde des jeux mathématiques pour avoir breveté le cube Soma dans les années 1930. Mais Hein était chercheur en physique théorique et c'est lors d'une université d'été de l'institut Niels Bohr qu'il a été invité pour parler des jeux mathématiques. Il estimait qu'un bon jeu mathématique doit être

- équitable (un joueur qui perd tout le temps ne veut plus jouer)
- progressif (il suffit de quelques minutes pour comprendre comment jouer, il faut des années pour approcher de l'expertise)
- fini (il ne faut pas que des situations se répètent comme aux échecs ou au Go)
- clair (les règles du jeu doivent être simples et faciles à retenir)
- stratégique (il faut qu'il existe une stratégie gagnante)
- décisif (Piet Hein exclut le hasard qu'induisent par exemple le lancer de dés ou le mélange de cartes)

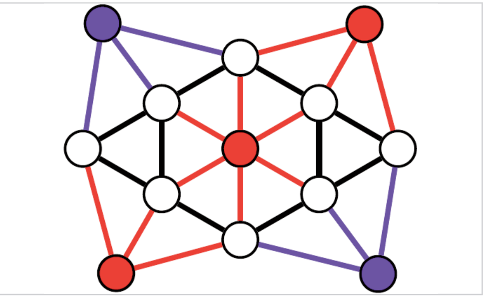
Pour donner un exemple illustrant ces six qualités, Hein a alors inventé Hex, sur lequel les six qualités se voient rapidement. Il a commencé en décembre 1942 à publier des problèmes de Hex qu'il appelait *Polygon*, et proposait même aux danois de jouer à Polygon dans les couloirs de métro de Copenhague durant les bombardements !

En 1948, à Princeton, John Nash invente une variante du jeu de go où il s'agit d'établir une connexion entre pierres d'une même couleur (noires ou blanches). Mais pour rendre le jeu intéressant, il imagine des diagonales sur le goban, ce qui fait que chaque intersection a non pas 4 voisins (nord, sud, est et ouest) mais 2 de plus (nord-est et sud-ouest). En déformant ce plateau de jeu, on retrouve celui de Hex. Les étudiants de Princeton adoraient ce jeu et l'appelaient *Nash.* La motivation de Nash était d'illustrer par un exemple le fait que connaître l'existence d'une stratégie gagnante (dans Hex, pour celui qui joue en premier) ne suffit pas à connaître la stratégie en question. D'ailleurs en 2023 on ne la connaît toujours pas, sauf dans des cas comme le plateau $n \times n$ où n est inférieur ou égal à 7.

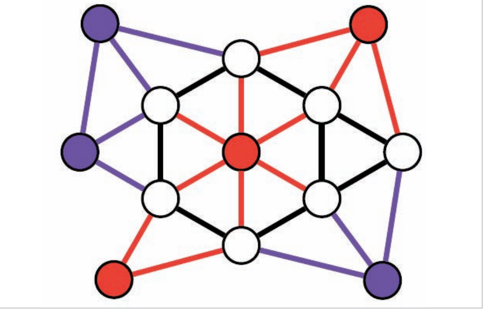
Par la suite, Hein donne au jeu Polygon un nouveau nom : il décide de l'appeler *Con-Tac-Tix* parce qu'il s'agit d'établir un contact entre sommets d'un graphe. En réalité le jeu porte sur la coloration des arêtes du graphe. Par exemple le jeu 3 × 3 illustré au début de l'article, peut être représenté par ce graphe (les bords du losange sont les sommets déjà coloriés) :



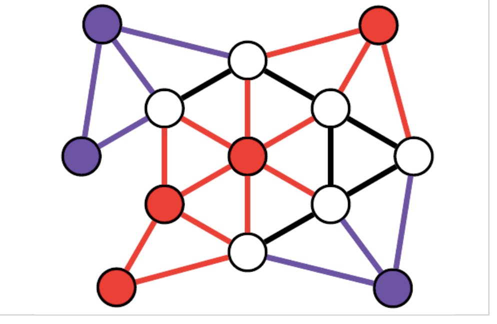
Lorsque Rouge colorie au centre (sommet central plutôt qu'hexagone central), elle colorie également en rouge les arêtes issues de ce sommet car ces arêtes ne peuvent plus faire partie d'un chemin bleu désormais :



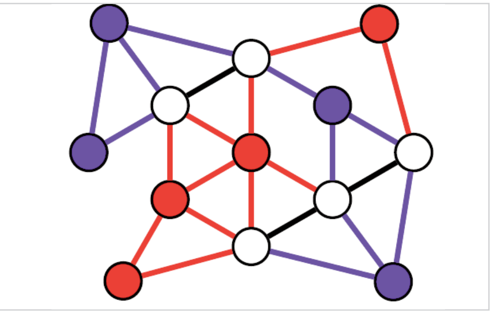
Maintenant Bleu va colorier le sommet tout à gauche. Parmi les 4 arêtes de ce sommet, il y en a une qui est déjà coloriée en rouge (elle ne peut pas faire partie d'un chemin bleu parce qu'elle est adjacente à un sommet rouge). Une arête est déjà en bleu, et le coup de Bleu va colorier également en bleu les deux autres arêtes émanant de ce sommet :



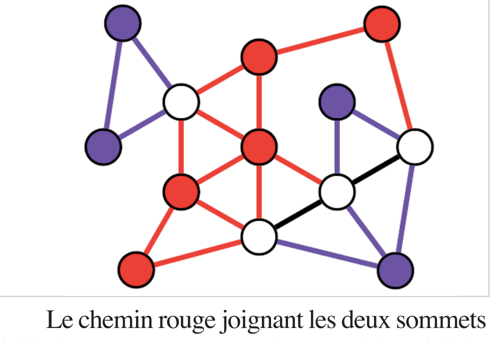
Mais l'arête qui était rouge, ne peut maintenant plus faire partie d'un chemin rouge ni d'un chemin bleu. On verra mieux la suite si on efface ce genre d'arêtes comme on l'a fait ci-dessus. Lorsque Rouge colorie son second sommet, une arête qui était bleue disparaît à son tour puisqu'elle joint maintenant deux sommets de couleurs différentes :



Lorsque Bleu colorie un sommet qui est entre deux sommets rouges, cela efface deux arêtes d'un coup :



Le dernier sommet colorié par Rouge est pour l'instant de degré 5. Mais 2 des 5 arêtes sont déjà en rouge et 2 autres sont en bleu : celles-là vont disparaître :



Le chemin rouge joignant les deux sommets initialement rouges, est maintenant bien visible.

Si on laisse les joueurs colorier les quatre sommets restants et supprimer les arêtes joignant un sommet rouge à un sommet bleu, on verra encore mieux qu'il n'y a plus de possibilité d'établir un chemin bleu, et que Rouge a donc déjà gagné.

Le jeu de Hex a été commercialisé par les frères Parker (qui lui ont donné le nom de *Hex*) et popularisé aux États-Unis par Martin Gardner, et en France par Claude Berge (spécialiste des graphes). Cependant on y joue d'ordinaire sur des plateaux beaucoup plus grands que les 3×3 et 5×5 montrés ici, et en posant des pions plutôt qu'en coloriant des cases (ou des sommets). Le jeu de Hex a été présenté à plusieurs reprises par le CIJM et l'APMEP.

Lors de la semaine des mathématiques de 2022, la « caravane de l'Irem » de La Réunion s'est déplacée à l'école Aristide Briand du Tampon pour permettre à des élèves de jouer à Hex en coloriant les hexagones. Des élèves de PS, CP, CE1, CE2, CM1 et CM2 ont déjà joué à ce jeu. On constate chez les plus jeunes une certaine tendance à colorier dans sa couleur un hexagone adjacent à un hexagone déjà colorié précédemment dans la même couleur, et à ne pas essayer d'occuper plus rapidement le plateau du jeu.

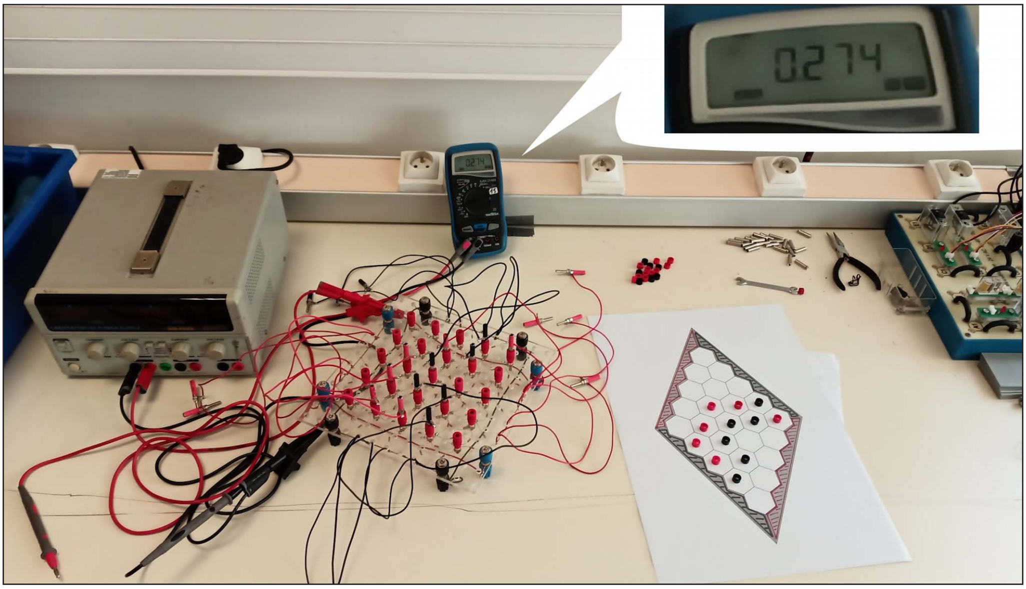
La contribution de Shannon

Dans les années 1950, aux laboratoires Bell (aujourd'hui Nokia), Claude Elwood Shannon et son équipe ont eu l'idée de considérer les graphes ci-dessus comme des circuits électroniques, en modélisant les sommets du graphe comme des prises où brancher des câbles, et les arêtes du graphe comme des résistances électriques (toutes de même valeur, par exemple 2,2 kΩ). Cela leur a permis de construire une machine analogique (Nash 1952) permettant de jouer à Hex « plutôt bien » selon les dires de Shannon, en connectant au + de l'alimentation les sommets/prises joué.e.s par Rouge, et à la masse électrique les sommets joués par Bleu. La mesure de potentiels électriques sur les prises non encore jouées, permet de réifier l'algorithme du minimax (Von Neumann 1928).

Une activité a été proposée en mars 2022 lors de la semaine des mathématiques, consistant à faire jouer à Hex entre humains, puis affronter la machine de Shannon. Elle a permis de mobiliser les connaissances des élèves de cycle 3 (CM1 et CM2) de l'école Aristide Briand sur les nombres décimaux (lecture de tensions sur le voltmètre, comparaison entre nombres décimaux pour trouver le minimum ou le maximum).

Ci-dessous on voit le montage en cours d'utilisation. L'appareil à gauche est l'alimentation électrique de la machine de Shannon. Elle doit pouvoir résister à d'éventuels court-circuits en cas de fausse manœuvre. Le fil rouge relie le + de l'alimentation aux deux bords rouges du losange. Le fil noir relie la masse aux deux bords noirs (cette couleur remplace le bleu ici) du losange. Des petites résistances électriques relient les sommets du graphe qui sont des prises. Chaque fois que l'humain joue, il branche un câble rouge sur la prise choisie. L'opérateur joue pour la machine, en branchant un câble noir sur la prise libre où la tension mesurée est la plus petite possible (ci-dessous 0,274V). Les noirs (la machine) ont gagné, bien qu'ils aient joué en second.

Shannon a aussi inventé une généralisation de Hex, appelée *switching game* (Busser 2020). Dans ce jeu, l'un des joueurs consolide des contacts électriques (arêtes d'un graphe) alors que l'autre supprime des arêtes (non encore consolidées). Dans Hex, les rôles des joueurs sont symétriques puisque cela revient au même



d'établir un chemin bleu, que de couper tout chemin rouge possible.

Coloration de graphes

La version graphe du plateau de Hex présente les avantages suivants sur la version classique où on pose des pions sur des hexagones :

— Cela prend moins de temps pour colorier un petit cercle, que pour colorier un hexagone. Les élèves risquent moins de relâcher leur attention par lassitude.

— La triche consistant à discrètement déplacer des jetons sur le plateau de jeu, n'est pas possible lorsqu'on colorie, le coloriage étant plus ou moins définitif.

— Les gestes psychomoteurs nécessaires pour colorier ne sont pas les mêmes que ceux nécessaires pour poser un jeton dans un hexagone.

— Il est plus facile de voir le chemin établi sur un graphe, que sur une structure en nid d'abeille.

Par contre, l'adjacence se voit moins lorsqu'on colorie des petits sommets (il faut voir l'arête qui les relie et celle-ci est parfois longue et tortueuse) que dans la version pays limitrophes sur une carte. Aussi la version graphes à colorier des deux jeux suivants est-elle inédite, John Conway les ayant présentés sous forme de pays à conquérir (Conway 1976, Berlekamp et al 2001).

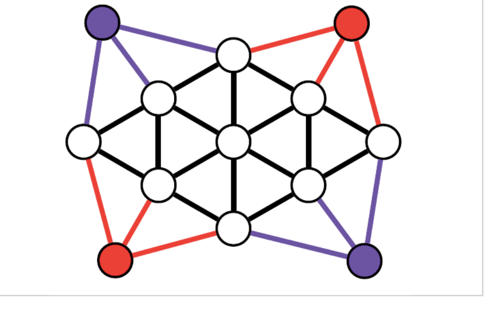
Le jeu de Snort

Ce jeu est praticable dès la Moyenne Section. Parmi les compétences travaillées, on trouve : la perception des lignes (les arêtes du graphe), et des cercles (pour les colorier il faut les voir) ainsi que la reconnaissance de nombres si on cherche une stratégie basée sur le degré des sommets… Mais la théorie de Snort dépasse largement le cadre du lycée. La recherche d'une stratégie gagnante à Snort sur certains graphes relativement simples fait appel à la logique (raisonnement par disjonction des cas).

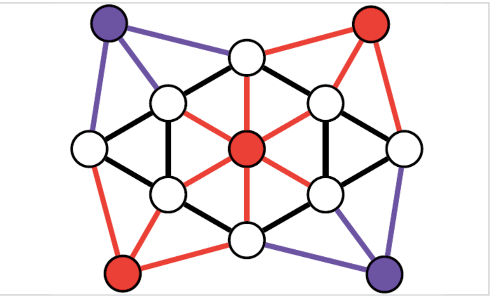
Simon Norton était un immense spécialiste de la théorie des groupes finis. On le connaît comme découvreur du groupe sporadique à 273 030 912 000 000 éléments, lequel est d'ailleurs appelé le groupe de Harada-Norton. Simon Norton a également fondé l'Atlas des groupes finis. Mais accessoirement il a inventé le jeu que John Conway (autre découvreur de groupes sporadiques) a décidé d'appeler *Snort* par élision du nom de Simon Norton (Conway 1976).

Le jeu de Snort est assez similaire à Hex dans son mode de fonctionnement, mais il ne s'agit plus d'établir un chemin, mais plutôt de « bloquer » l'adversaire. En effet deux sommets adjacents ne doivent jamais être de couleurs différentes. Le premier qui ne peut plus jouer sans violer cette contrainte, est déclaré perdant du jeu (comme pour Hex, il existe une version « qui perd gagne » où, au contraire, le but est d'éviter de bloquer son adversaire).

Par exemple, si Rouge a colorié deux sommets diamétralement opposés et Bleu a colorié les deux autres sommets :



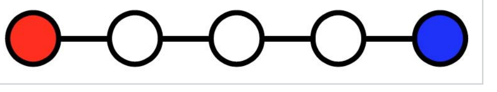
alors aucun des 4 sommets du losange restant ne peut être joué ni par Bleu (parce que cela créerait une arête rouge-bleu) ni par Rouge (cela aussi créerait aussi une arête rouge-bleu). Bleu ne peut donc jouer que 3 sommets possibles : les deux milieux de côtés du losange adjacents à une arête bleue, ainsi que le centre. Mais c'est à Rouge de jouer et elle est dans une situation similaire : elle peut encore colorier en rouge, ou bien l'un des milieux de côtés du losange adjacents à une arête rouge, ou bien le centre. C'est le choix qu'elle fait :



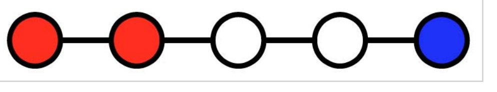
Chacun des 8 sommets non encore coloriés étant adjacent à au moins un sommet rouge, il n'est plus possible de colorier aucun d'entre eux en bleu, et Bleu (qui devait jouer) a donc perdu ce jeu.

Cet exemple montre que les parties de Snort durent en général peu de temps (sauf sur de très gros graphes comme https://alainbusser.github.io/primaire/html/snort_garbage.html). Un jeu espagnol similaire a été commercialisé il y a quelque temps, avec une grille (qui est un graphe particulier) et on y posait des jetons représentant des chiens et des chats, le premier qui a déclenché une bagarre étant le perdant. Il est convenu que les chiens ne se bagarrent pas entre eux, que les chats ne se bagarrent pas non plus entre eux, et que les bagarres ne surviennent que si un chien est trop proche d'un chat (c'est-à-dire s'ils sont sur des cases adjacentes).

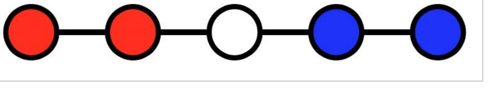
Snort est un jeu de conquête de territoire puisqu'il s'agit de colorier des zones connexes (d'une seule couleur). Par exemple, si Rouge a colorié le sommet le plus à gauche et que Bleu a imité son coup en coloriant le sommet le plus à droite :



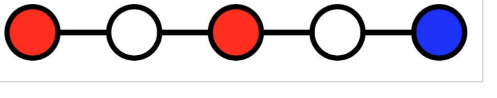
Alors, en général, Rouge a tendance à augmenter son territoire en annexant un des sommets voisins :



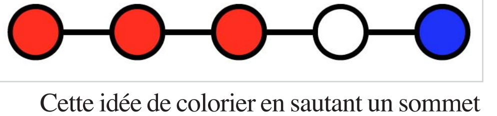
Dans ce cas, Bleu ne peut que faire pareil :



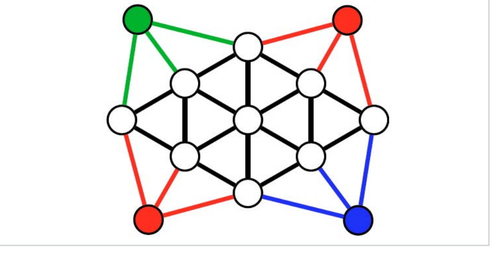
De ce fait, Rouge a perdu : le sommet central étant adjacent à un sommet bleu, elle ne peut plus le colorier. Si par contre la conquête de territoire s'était faite en créant un avant-poste :



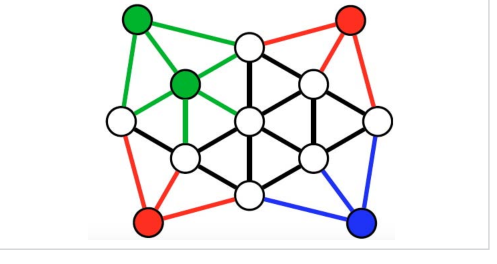
Alors, chacun des deux sommets restants étant adjacent à au moins un sommet rouge, Bleu ne pouvait pas jouer, et Rouge aurait gagné. En effet il lui restait alors la possibilité de colorier ce sommet :



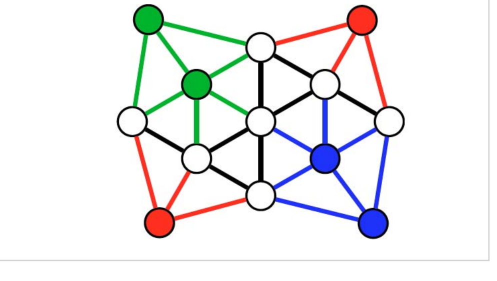
Cette idée de colorier en sautant un sommet pour se le réserver pour plus tard, est typique d'une stratégie (par opposition à tactique), et évoque une manière efficace de jouer à Hex (ce que Claude Berge appelait « connexion virtuelle »). Snort est donc un jeu de stratégie. On peut aussi y jouer à plus de 2 joueurs. Par exemple avec 3 joueurs, en supposant que Rouge a commencé (cela se voit puisqu'elle est la seule à avoir déjà joué 2 fois), suivie par Vert puis Bleu :



Comme Rouge a déjà colorié son deuxième sommet, c'est au tour de Vert de jouer. Vert n'a d'ailleurs que deux choix : le sommet central, et celui-ci :

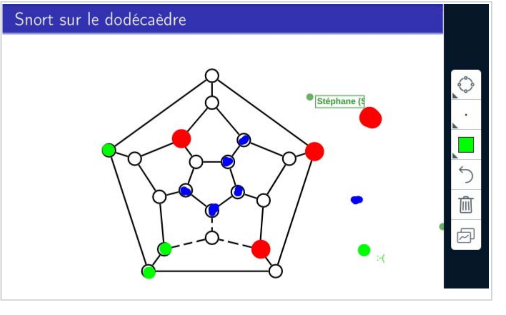


Maintenant le sommet central est adjacent à un sommet vert, donc Bleu n'a plus que ce choix :



C'est à Rouge de jouer, mais chacun des 7 sommets restants étant adjacent à un sommet vert ou bleu, Rouge ne peut plus jouer : elle est éliminée, et le jeu continue uniquement entre Vert et Bleu. C'est d'ailleurs au tour de Vert de jouer. Mais chacun des 7 sommets restants étant adjacent à un sommet rouge ou bleu, Vert ne peut plus jouer non plus, et Vert est éliminé à son tour : Bleu, seul en lice, est donc gagnant de ce jeu.

Une partie de Snort à 3 joueurs a été menée en distanciel lors des journées nationales de l'APMEP de 2020, grâce à l'outil de dessin incorporé à Big Blue Button (le logiciel utilisé pour la présentation). Ci-dessous on voit que les bleus ont essayé de tricher :



Pour trouver une stratégie gagnante à Snort, on peut calculer sa valeur (avantage quantifié de Rouge à ce jeu) et regarder son signe. La valeur d'un jeu est définie récursivement par Conway. La place manque ici pour donner les détails de cette définition et celle des opérations sur les jeux, mais la définition du signe d'un jeu est plus élémentaire.

Définition (Conway 1976)

— Un jeu pour lequel Rouge dispose d'une stratégie gagnante est dit positif.

— Un jeu pour lequel Bleu dispose d'une stratégie gagnante est dit négatif.

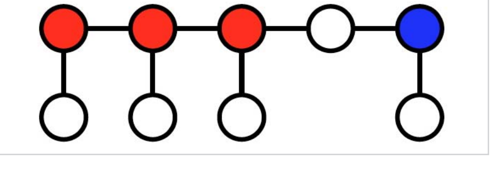
— Un jeu pour lequel le joueur qui joue en second dispose d'une stratégie gagnante est dit nul, ou égal à zéro.

— Sinon la stratégie gagnante est pour le joueur qui joue en premier, mais dans ce cas la valeur n'est pas un nombre.

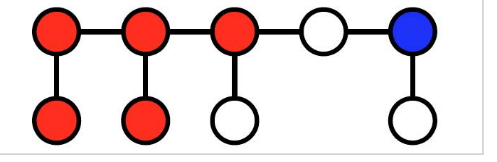
Néanmoins, dans certains cas (relativement inintéressants), la valeur d'un jeu de Snort est un nombre, et Snort peut illustrer la manière dont on peut construire les nombres (Conway 1976).

Construction du nombre en Snort

Le jeu de Snort a servi d'illustration à John Conway (Conway 1976) pour construire le nombre. Conway réussit à construire (entre autres) les entiers relatifs sous forme de jeux de Snort. L'idée est de chercher à rendre un jeu le plus équitable possible, en imposant un « handicap » au joueur qui est avantagé. Par exemple il est évident que Rouge a un net avantage à ce jeu de Snort :

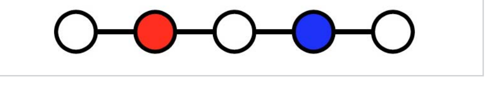


En effet elle peut colorier 3 des sommets du bas (ceux qui sont à gauche) alors que Bleu ne peut colorier que le sommet en bas à droite. Une fois que Rouge et Bleu ont colorié chacun un sommet, Bleu ne peut plus jouer alors que Rouge peut encore colorier deux sommets : Rouge est bloquée après que Bleu le soit et cela lui donne un avantage dans le jeu. Pour rendre le jeu plus équitable, on peut obliger Rouge à colorier plusieurs sommets d'avance, pour réduire son champ de manœuvre, ce qui correspond à la notion de handicap dans les courses hippiques. Par exemple, si avant de jouer, Rouge doit colorier 2 sommets, on arrive à ce jeu plus équitable :

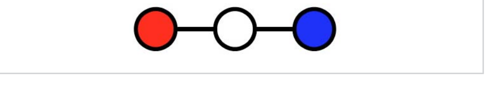


En effet, à ce stade, le prochain joueur qui colorie un sommet, est le perdant (à chaque joueur il ne reste plus qu'un sommet colorable, donc le deuxième joueur, en coloriant son dernier sommet, amène son adversaire en position bloquante).

Si on rend un jeu aussi équitable que possible en donnant un handicap de 2 à Rouge, Conway considère que la valeur du jeu est 2. Cette approche permet alors de construire le nombre sous forme de jeux de coloriage, ce qui semble jusqu'ici inédit dans le premier degré. Le jeu ci-dessus peut être simplifié : puisque les 4 sommets coloriés en rouge sur la gauche ne risquent plus d'intervenir au cours du jeu, on peut les enlever, obtenant le graphe suivant :



Et ce jeu est le nombre 0, puisque le prochain qui joue, perd ce jeu. Dans Snort la plus simple représentation de 0 est :



Le seul sommet non encore colorié est adjacent à la fois à un sommet rouge et à un sommet bleu, et aucun joueur ne peut donc le colorier : le prochain joueur est le perdant de ce jeu.

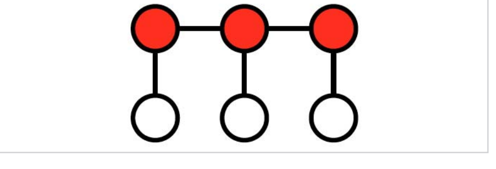
Par contre le graphe constitué d'un seul sommet, non encore colorié, est gagnant pour le prochain joueur : ce joueur le colorie, laissant son adversaire en position bloquante. Ce jeu n'est donc ni positif, ni négatif, ni nul (ce n'est pas un nombre). Conway l'appelle étoile.

Définition (Conway 1976) : le jeu dans lequel chaque joueur a pour meilleure option zéro (qui fait perdre son adversaire) s'appelle ***étoile***, et est noté *.

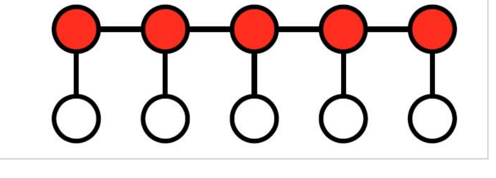
Définition (Conway 1976) : Le jeu dans lequel la meilleure option de rouge (qui la fait gagner) est 0 et dans lequel Bleu n'a aucune option, est appelé **1**.

Le graphe comportant deux sommets adjacents dont l'un est déjà colorié en rouge, est le nombre 1 : le sommet restant étant adjacent à un sommet rouge, ne peut pas être colorié par Bleu, mais peut être colorié par Rouge.

De façon similaire, Conway peut représenter tout entier dans Snort, par exemple le nombre 3 :

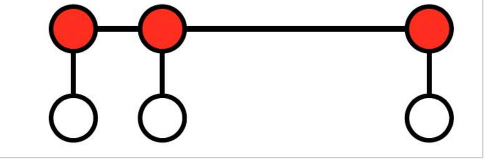


(Rouge peut colorier 3 sommets, Bleu ne peut en colorier aucun), ou le nombre 5 :

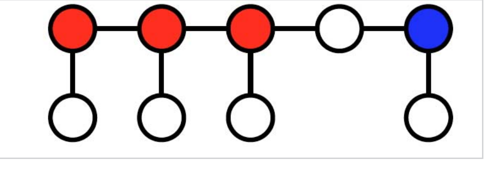


En inversant les couleurs rouge et bleue, on change le signe du nombre représenté. La construction du nombre selon Conway donne donc directement les entiers relatifs, puisqu'un jeu donnant un avantage de 3 sommets à Bleu, donne un avantage de – 3 sommets à Rouge.

Mieux encore, cette version du nombre 3 :



montre que 2 + 1 = 3. La notion de somme de jeux a été découverte par Patrick Grundy en Angleterre dans les années 1930 (Grundy 1938). Par exemple le jeu ouvrant cette section :



est la somme de 3 (la partie gauche, en rouge) et – 1 (la partie droite, en bleu) et montre que 3 – 1 = 2. Le jeu de Snort permet donc non seulement de construire les entiers, mais même les entiers relatifs, et même l'addition des entiers relatifs (donc la soustraction)…

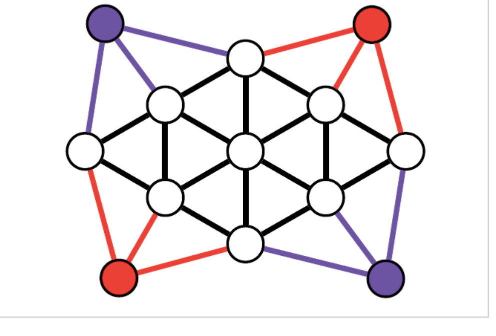
Snort semble un jeu intéressant pour développer la perception des nombres (lesquels quantifient l'avantage de Rouge à un jeu, du moins lorsque ce jeu est un nombre). Les nombres entiers se voient facilement (il suffit de compter l'excédent de sommets rouges sur les sommets bleus) mais le jeu de Snort a un inconvénient qui n'a pas été vu ici : beaucoup de ses configurations ne sont pas des nombres, comme par exemple l'étoile.

Un jeu similaire comprend plus de nombres, il s'appelle *Col*. D'ailleurs l'idée de base de

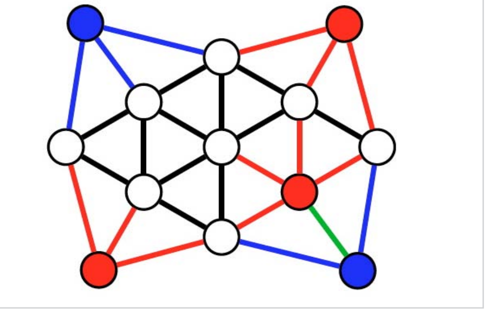
Conway, qui est de rendre un jeu plus équitable en le rapprochant de 0, est proche de celle qu'a eue une élève de CP en jouant à Hex : Le constat de départ, émis par tous les élèves de la classe, est qu'à Hex le joueur qui joue en premier a un avantage trop net. Il leur a alors été demandé à tous s'ils avaient des idées pour réduire cet avantage, et l'une d'entre eux a proposé alors que le second joueur puisse colorier, la première fois qu'il joue, deux hexagones.

Le jeu de Col

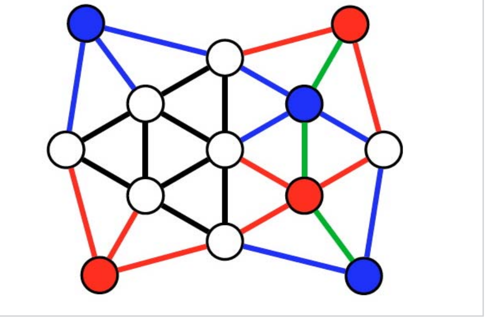
Ce jeu, abondamment étudié par Conway, a été nommé par celui-ci Col, d'une part parce que c'est le début du prénom du créateur du jeu Colin Vout, d'autre part parce qu'il s'agit d'un jeu de coloriage (Berlekamp et al 2001). Conway le faisait jouer avec des crayons de couleur rouge et bleue sur des cartes de pays, mais comme il est plus rapide de colorier des sommets de graphe que des régions d'une carte (avec toutefois l'inconvénient que l'adjacence se voit moins), le jeu de Col a été pratiqué par l'Irem de La Réunion, sur des graphes dont les sommets sont circulaires. Le principe est similaire à celui du jeu de Snort, à ceci près que cette fois-ci, il est interdit que deux sommets adjacents soient de la même couleur. Par exemple, si Rouge et Bleu ont déjà joué deux fois chacun :



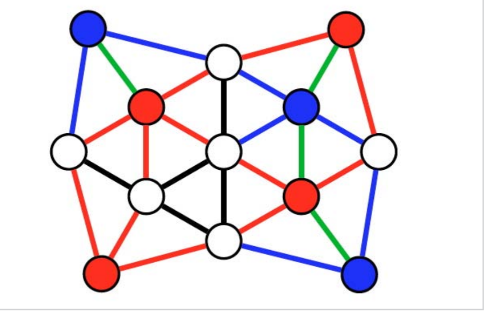
Alors Rouge ne peut colorier qu'un des trois sommets non adjacents à un sommet rouge, par exemple :



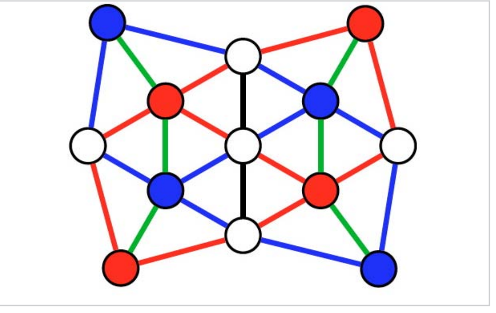
Bleu aussi a trois choix possibles, par exemple celui-ci qui crée un chemin (en vert) où les couleurs rouge et bleue sont alternées :



Rouge n'a maintenant plus qu'un choix :



En fait Bleu aussi n'a plus qu'un choix :



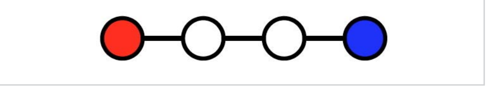
Chaque sommet restant est adjacent à un sommet rouge, donc Rouge ne peut plus jouer : elle a perdu.

Lors des journées nationales de l'APMEP de mai 2020, une partie de Col à 4 couleurs (qui s'est donc jouée entre 4 joueurs) a été organisée en distanciel. Le principe est similaire à celui de Snort à plus de 2 joueurs : chaque fois qu'un joueur ne peut plus colorier un sommet de sa couleur, ce joueur est éliminé et le gagnant est le dernier joueur restant en lice.

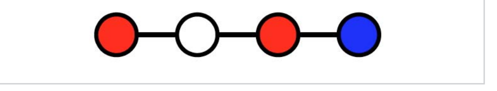
Pour trouver une stratégie gagnante à Col, on peut utiliser la construction de Conway puis comparer la valeur du jeu avec 0 (rappelons que c'est Rouge qui gagne si cette valeur est positive, Bleu qui gagne si la valeur est négative) et regarder le détail des calculs de cette valeur pour trouver comment le gagnant doit jouer optimalement. Cette méthode est peut-être plus facile à appliquer avec Col qu'avec Snort, parce que les valeurs de Col sont plus souvent comparables avec 0, en effet ce sont souvent des nombres.

Construction du nombre en Col

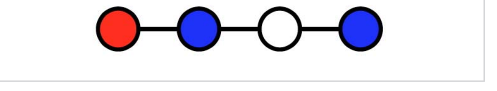
La construction du nombre selon Conway s'applique aussi à Col (Conway 1976). Par exemple ce jeu de Col est égal à 0 (c'est-à-dire que le prochain joueur est le perdant) :



En effet, si c'est au tour de Rouge de jouer, elle ne peut colorier que ce sommet :

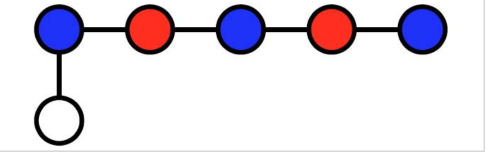


et perd, puisque Bleu peut encore colorier le sommet restant. Alors que si c'était à Bleu de jouer, il ne pouvait colorier que ce sommet :

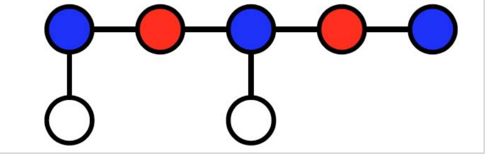


et perdait puisqu'alors Rouge pouvait colorier le sommet restant.

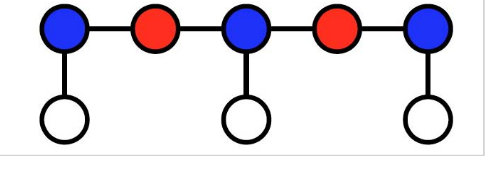
Voici une représentation possible, en Col, des nombres 1 :



2 :



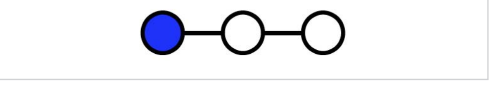
et 3 :



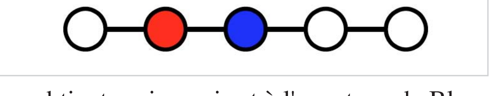
On peut représenter tous les nombres entiers en Col (y compris les nombres négatifs, en inversant les couleurs rouge et bleue) ainsi que d'autres nombres (fractions dyadiques). Il y a aussi des positions de Col qui ne sont pas des nombres, comme l'étoile de Conway pour laquelle le prochain qui joue est gagnant (quelle que soit sa couleur). Par exemple le graphe formé d'un seul sommet est l'étoile puisque le prochain joueur peut le colorier de sa couleur et ensuite il n'y a plus rien à colorier. En fait (Berlekamp et *al* 2001) :

Théorème (John Conway, Richard Guy) : tout jeu de Col est égal, soit à un nombre, soit à la somme d'un nombre et de l'étoile.

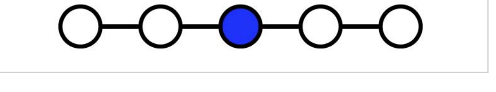
En fait, les nombres apparaissant dans Col ne sont pas forcément des nombres entiers, par exemple voici la fraction 1/2 en Col :



En fait si c'est à Bleu de jouer, il ne peut colorier que le sommet tout à droite, et après cela, Rouge gagnera en coloriant le sommet central. Si c'est à Rouge de jouer, elle gagne en coloriant le sommet tout à droite : en résumé ce jeu est strictement positif. Mais si on lui additionne – 1 :



on obtient un jeu qui est à l'avantage de Bleu, c'est-à-dire un nombre négatif (du point de vue de Rouge). Le jeu initial (avant qu'on lui ajoute – 1) est donc inférieur à 1. Conway donne dans des cas de ce genre, la valeur la plus simple comprise entre 0 et 1, et c'est 1/2. D'ailleurs si on évalue le nombre 1/2 + 1/2 :



on trouve 1 : pour rétablir une équité entre les joueurs, Rouge doit colorier un sommet avant de jouer. L'avantage conféré à Rouge dans le jeu de Col sur le graphe 1/2 est donc de la moitié d'un coup d'avance. La théorie de Conway (Conway 1976) permet donc d'estimer assez finement l'avantage d'un joueur sur son adversaire à un jeu.

Coloration propre de graphes

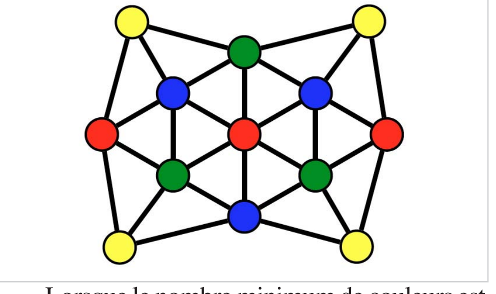
Comme il faut moins de temps pour colorier un sommet d'un graphe (représenté par un cercle) que pour colorier une zone plus grande, l'esprit des élèves est libre pour réfléchir à des questions de stratégie. On peut alors leur donner des tâches plus complexes comme la coloration propre : une coloration de graphe est dite *impropre* s'il y a deux sommets adjacents de la même couleur, et *propre* dans le cas contraire. La règle du jeu de Col exige en fait que la coloration en deux couleurs obtenue soit propre.

La progression suivante a été testée dès la moyenne section :

— Colorier les sommets d'un graphe (et eux seuls, certains élèves ayant tendance à colorier les faces).

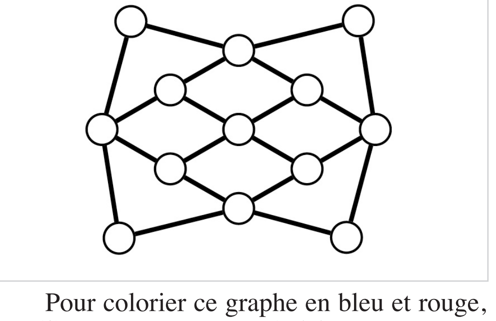
— Colorier un autre graphe mais proprement (et à chaque tentative malheureuse, on montre pourquoi le graphe n'est pas colorié proprement, en montrant où est l'arête délimitée par deux sommets de même couleur). À ce stade certains élèves utilisent un crayon différent pour chaque sommet, ce qui répond correctement à la requête mais n'est pas optimal.

— Ensuite, pour les meilleurs, est ajoutée la contrainte d'utiliser, en plus, le moins de crayons possible. Par exemple, le graphe ci-dessous peut être colorié proprement avec seulement 4 crayons (bleu, vert, rouge et jaune) :

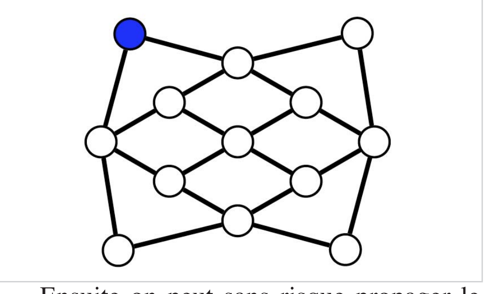


Lorsque le nombre minimum de couleurs est 3 ou 4, il peut être très difficile de trouver un 3-coloriage ou un 4-coloriage du graphe. Mais sur des petits graphes, l'activité est réalisable dès la Moyenne Section : ça a été fait lors de la fête de la science et (en Grande Section) la semaine des mathématiques. Certains élèves font le coloriage en travail collaboratif : tandis que l'un colorie un sommet en bleu, l'autre colorie un des sommets adjacents dans une autre couleur. Ce travail collaboratif, parce qu'il ne se fait que localement, peut aboutir à des erreurs de coloriage (sommets adjacents de même couleur ou besoin de changer de crayon un grand nombre de fois).

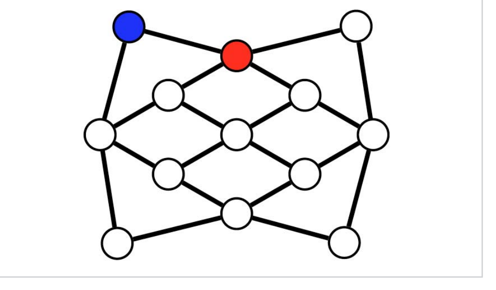
Lorsqu'un graphe peut être colorié avec seulement 2 crayons, il est intéressant de voir comment l'élève colorie les sommets : l'ordre de coloriage des sommets est un parcours du graphe. Par exemple voici un graphe 2-colorable :



Pour colorier ce graphe en bleu et rouge, un élève commence par choisir un sommet et colorie ce sommet en bleu :

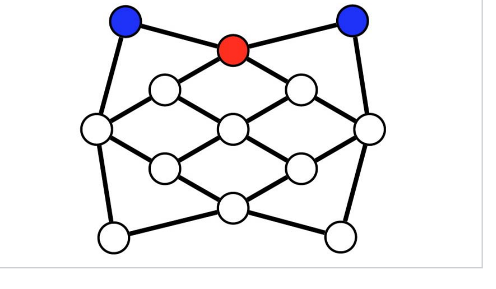


Ensuite on peut sans risque propager le coloriage, en coloriant en rouge l'un des sommets voisins de ce sommet bleu :

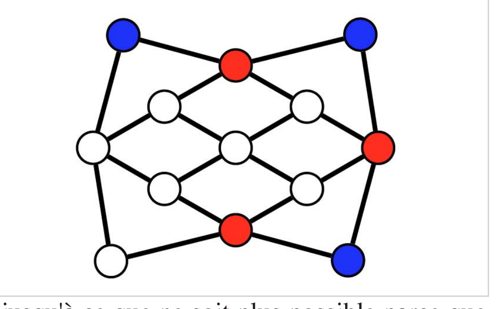


En effet si le coloriage est propre, les voisins du sommet bleu sont nécessairement rouges. Ensuite l'élève peut continuer

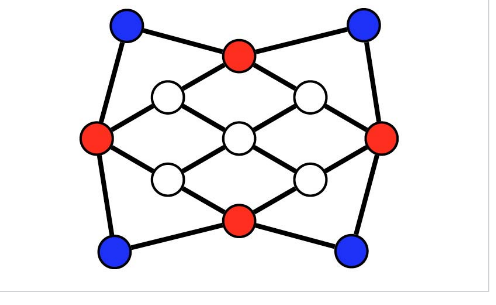
— en coloriant en rouge les autres voisins du sommet bleu : c'est le début d'un parcours du graphe en largeur d'abord ;
— ou en coloriant en bleu un voisin du sommet rouge récemment colorié : c'est le début d'un parcours en profondeur d'abord. Par exemple :



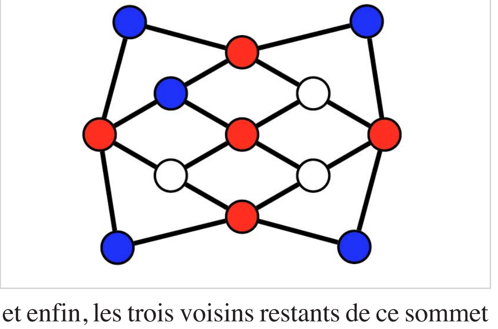
puis on continue en alternant les couleurs :



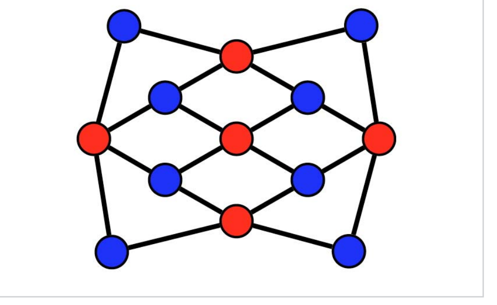
jusqu'à ce que ne soit plus possible parce que le sommet suivant est déjà colorié :



Alors on reprend en arrière, en coloriant en bleu un autre voisin du sommet récemment colorié en rouge, puis en rouge un des voisins de ce sommet bleu :



et enfin, les trois voisins restants de ce sommet rouge, ce qui complète le coloriage :

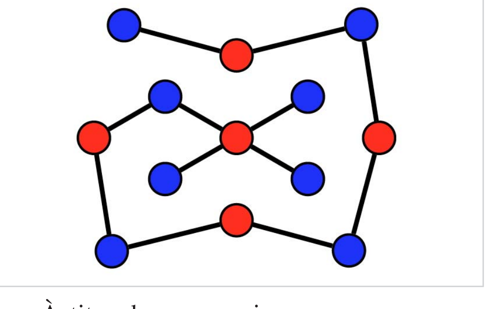


L'expérience a été menée fin 2021 avec des élèves de Terminale NSI et des étudiants de L1. Les lycéens ont utilisé le crayon de couleur et les étudiants ont planché sur PyGraph :

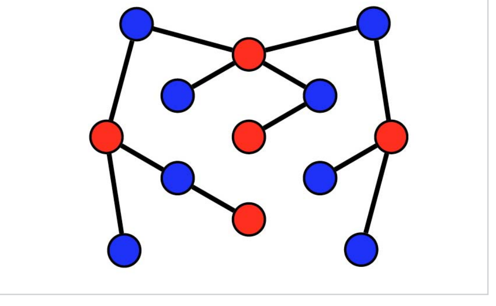
https://irem.univ-reunion.fr/spip.php?article1127

La plupart des élèves ayant colorié des graphes en deux couleurs, ont choisi un parcours en profondeur, et même, s'ils en trouvent un, un parcours hamiltonien (c'est-à-dire un chemin passant par tous les sommets sans revenir en arrière).

Le graphe ci-dessus n'étant pas hamiltonien, le parcours en profondeur a donné un arbre couvrant du graphe (autre qu'un chemin : un arbre couvrant qui est un chemin, est dit *hamiltonien*) :



À titre de comparaison, un parcours en largeur d'abord (choisi par une minorité d'élèves, désirant minimiser le nombre de changements de crayon) donne cet autre arbre couvrant, plus tassé (ou moins longiligne), que l'arbre couvrant du parcours en profondeur d'abord :



Conclusion

Mathématiquement,

— Colorier un graphe, c'est attribuer un numéro à chacun de ses sommets (donc une coloration de graphe est une fonction de l'ensemble de ses sommets vers **N** ; par exemple en attribuant le numéro 0 à la couleur rouge et le numéro 1 à la couleur bleue, l'arbre couvrant ci-dessus est colorié par une fonction de l'ensemble des sommets dans $\{0,1\}$).

— Une coloration propre est une fonction de l'ensemble des sommets vers **N** ne prenant pas la même valeur en deux sommets adjacents.

On ne s'étonnera donc pas que la coloration de graphes ne soit au programme d'aucune classe du primaire ni du secondaire (elle apparaît timidement dans le programme d'informatique de CPGE MPII). On peut alors s'étonner que des élèves de tout âge, non seulement réussissent à colorier des graphes, mais y trouvent même un évident plaisir : celui du jeu. Des jetons rouges et bleus posés sur les sommets d'un graphe permettent de jouer rapidement à des jeux comme Col, Snort ou la généralisation de Hex à un graphe quelconque, et d'élaborer des stratégies pour ces jeux.

Pour élaborer une stratégie, on peut

— Chercher des motifs (et jouer sur des graphes peut aider à consolider la reconnaissance de motifs),

— Evaluer des propriétés de certains sommets comme le degré, le fait d'être au centre ou au bord du graphe, etc.

— Raisonner par disjonction des cas en émettant des hypothèses pour élaborer une stratégie de type « arbre de décision ».

La construction de John Conway permet de quantifier l'avantage d'un joueur à un jeu donné (dans le but de donner un handicap au joueur le plus avantagé), mais aussi de représenter les nombres par des situations de jeux où les nombres sont perceptibles, et c'est le cas en particulier pour les jeux de coloration de graphes.

Elle fournit donc un moyen inédit (en tout cas en cycles 1 et 2, d'autant que la crise Covid n'a pour l'instant pas permis l'expérimentation en classe) pour aborder la construction des nombres, qui ne sont jamais que des jeux particuliers.

Références

Berlekamp, E., Conway, J. H., Guy, R., *Winning ways for your mathematical plays* (4 volumes), Wellesley MS, A. K. Peters Ltd, 2001-2004

Busser, A., *Jeux et graphes*, Ellipses, 2020

Conway, J. H., *On numbers and games*, New York NY, Academic Press, 1976

Grundy, P. M., *Mathematics and games*, Cambridge, Eureka volume 2, 1939

Nash, J. F. Jr, *Some games and machines for playing them*, Santa Monica CA, rapport RAND D-1164, 2 février 1952

Von Neumann, J., *Zur Theorie der Gesellschaftspiele*, Göttingen, Mathematische Annalen, 1928