

AVANT DE LIRE LA BANDE DESSINEE...

Nicolas BALACHEFF

Vous allez découvrir, dans les pages qui suivent, la première bande dessinée de «petit x». Nous vous convions ainsi à une incursion dans l'univers mathématique de deux élèves de quatrième. Nous nous proposons de découvrir avec vous comment ces élèves résolvent un problème, comment ils se mettent d'accord sur une solution, quels arguments ils utilisent.

Le scénario de cette bande dessinée est issu de l'analyse des observations de deux élèves qui avaient à résoudre en commun le problème suivant :

«Donner un moyen qui permette dès que l'on connaît le nombre des sommets d'un polygone, de calculer le nombre de ses diagonales».

Ni l'action, ni le dialogue ne sont imaginaires, nous avons retenu la bande dessinée pour vous les communiquer en conservant au mieux tout leur dynamisme.

Avec nous, vous serez attentifs à la cohabitation d'arguments d'autorité avec des arguments s'appuyant essentiellement sur la nature des objets mathématiques en jeu dans la résolution du problème, et sur leurs relations. Les fondements de la solution, si n est le nombre de sommets du polygone alors le nombre de ses diagonales est $n(n-3)/2$, ne sont pas mobilisés pour fournir une preuve. Notamment, face à l'empirisme naïf de Christophe, c'est une «expérience cruciale» sur un octogone qui permettra à Bertrand d'en découdre. Et pourtant ces fondements apparaissent bien dans le texte final des élèves, mais de cette connaissance engagée dans l'action à la démonstration comme moyen de preuve, le chemin à parcourir est encore long...

ON L'A PAS DEMONTRE, ON A PAS L'DROIT D'LE FAIRE

Découpage et montage de Nicolas Balacheff

Dessins d'Eric Coulomb

Les dialogues originaux sont de Christophe (à gauche) et de Bertrand (à droite).

CHRISTOPHE ET BERTRAND ABORDENT LE PROBLÈME EN TRAÇANT UN PENTAGONE ET SES CINQ DIAGONALES

T'AS 5 SOMMETS DANS UN POLYGONE

OUI, MAIS C'EST PAS OBLIGÉ

OUI, NON MAIS LÀ ON EN A 5

Ouais, mais il faut rédiger en général !

ON PEUT... ON PEUT TRACER LES DIAGONALES JUSQU'À CHAQUE SOMMET... SAUF CEUX QUI SONT À CÔTÉ... R'GARDE ON PREND PAR 2, ON PREND PAR 2 ET ON PEUT TRACER LA DIAGONALE.

Ouais

C'EST FACILE À COMPRENDRE, MAIS C'EST PAS FACILE À RÉDIGER AUSSI

VAS Y, FAIS EN UN LÀ, À BEAUCOUP DE CÔTÉS, TU VAS VOIR. CHAQUE POINT IL A DEUX VOISINS DANS UN POLYGONE... MÊME DANS N'IMPORTE QU'ELLE FIGURE ! HEIN ?

ET ! NON, NON, FAIS EN PAS UN CONCAVE...

ALLER, VIENS, ON S'EN FOUT

MAIS NON, R'GARDE ON S'EN FOUT PAS... ON S'EN FOUT PAS.

on part d'un sommet que c'on peut appeler A et on ~~traverse~~ jointe les points qui sont par les points voisins.

Sous l'impulsion de Bertrand les polygones concaves sont abandonnés. Les élèves tracent un grand décagone convexe et vérifient que chaque sommet a deux voisins. Puis...

BEN VOILA ! HEIN ?

BEN NON, PARCE QUE ... LÀ ON A PAS DONNÉ UN MOYEN ALORS

OUI, MAIS IL LES COMPTE APRÈS, C'EST PAS BIEN PRATIQUE, MAIS ...

ON VA RÉDIGER ÇA AU PROPRE : DANS UN POLYGONE CHAQUE POINT A DEUX ...

VOISINS !

BEN SI, C'EST UN MOYEN ÇA. C'UI QUI LIT, Y FAIT SON POLYGONE... Y DIT... JOIGNONS D'UN POINT TOUS LES AUTRES POINTS SAUF SES VOISINS... Y FAIT ÇA POUR TOUS LES POINTS C'EST L'MOYEN !

C'EST PAS L'MOYEN POUR CALCULER !

ERIC COULOMB - 92

BON, ALLER. ON PREND UN POLYGONE À 7 CÔTÉS PAR EXEMPLE, EUH... CHAQUE POINT AURA 2 VOISINS ET IL AURA... 5 DIAGONALES.

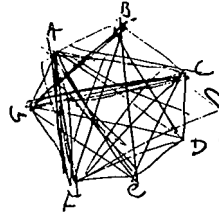


EH, ATTENDS ! ON VA VOIR. FAIS EN UN LÀ... FAIS EN UN.

MAIS NON. PAS LA PEINE DE DESSINER ATTENDS. MAIS SI ! MAIS POUR CALCULER



BERTRAND TRACE LES DIAGONALES ISSUES D'UN SOMMET DANS LE POLYGONE QUE VIENT DE DESSINER CHRISTOPHE



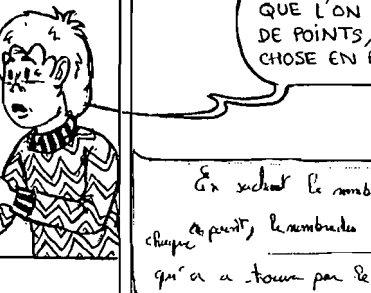
Y A QUE 4 DIAGONALES MAIS NON ! ON A OUBLIÉ LUI-MÊME ! 7-2+ LUI-MÊME. ON PEUT PAS TRACER UNE DIAGONALE JUSQU'À LUI-MÊME !



BEN VOILÀ. HEÏN !



AH NON. NON. NON, FAISONS... IL FAUT FAIRE ÇA POUR CHAQUE POINT



AH OUAIS, ATTENDS... ATTENDS FAUDRAIT Y VOIR APRÈS C'QUE TU VIENS DE DIRE. HEÏN, PARCE QUE ...

OUI ATTENDS... J'TEXPLIQUERAI... OUAIS, BEN... MULTIPLIER CE QUE L'ON TROUVE PAR LE NOMBRE DE POINTS, PARCE QUE CE SERA LA MÊME CHOSE EN PARTANT DE CHAQUE POINT. EH, OUI !

En sachant le nombre de sommets d'un polygone, il suffit de multiplier le nombre de sommets (à ces deux sommets + lui-même) par ce qui a trouvé par le nombre de sommets.

POUR 7 ÇA FAIT... ÇA FAIT 4. 4 FOIS 7 ! PARCE QU'Y A 7 SOMMETS



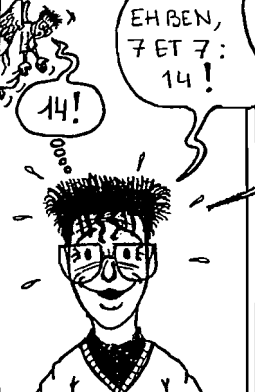
MAIS NON, ÇA VA PAS ÇA. C'ÉTAIT BIEN PARTI... MAIS... COMME Y EN A QUI SONT... QUI SONT... AF ET FA ... NOOON...



... OUI ! ÇA Y EST, J'CROIS QUE J'AI TROUVÉ ! ET... HUM... ON RETRANCHE LE NOMBRE DE SOMMETS À C'QU'ON A TROUVÉ, PARCE QUE...

PARCE QUE LA DIAGONALE AF, EH BEN... ÇA FAIT LA DIAGONALE FA... BF... NON, ÇA VA PAS... PFFFFF...

CHRISTOPHE RECOMPTE LES DIAGONALES DU POLYGONE À 7 CÔTÉS



ÇA F'RA... ÇA F'RA LE NOMBRE DE CÔTÉS DU POLYGONE PAR 2... VAS Y... FAIS LE AVEC 8 CÔTÉS, TU VAS VOIR



OUI BIEN SÛR. ÇA VA FAIRE 16 !

NON, MAIS ON A PAS L'DROIT. ON L'A PAS DÉMONTRÉ, ON A PAS L'DROIT D'LE FAIRE !

TOUT DÉMONTRER ENCORE

COMMENT TU L'SAIS L'DOUBLE ?

ENTRE PARENTHÈSES, SI L'MACHIN FAIT 7... SOMMETS, Y A PAS B'SOIN DE LE DÉMONTRER. BEN OUI, Y A PAS B'SOIN, MAIS NON, TU METS, REGARDE...



POURQUOI ? ... ÇA VIENT... ÇA SORT D'OU ÇA... EH ! T'AS PAS... MAIS NON, MAIS QU'EST-CE TU M'DIS LÀ

ÇA C'EST. J'CROIS QUE J'AI TROUVÉ JE CROIS QUE J'AI TROUVÉ. ATTENDS... DONNE LE STYLO... ON MULTIPLIE... ÇA FAUT L'MULTIPLIER PAR CHAQUE POINT POUR TROUVER... ATTENDS ... IL FAUDRAIT MULTIPLIER CE QU'ON A TROUVÉ PAR LE NOMBRE DE SOMMETS... PAR CHAQUE SOMMET...

ET... ET... Y A DES DIAGONALES QUI SE... QUE L'ON... Y AURAIT DES DIAGONALES COMPTÉES DEUX FOIS... MAIS... NON ! MAIS MÊME CHAQUE DIAGONALE SERAIT COMPTÉE DEUX FOIS

Ouais, j'sais. c'est ça... c'est c'qu'on a pas l'droit d'y inventer

OH' y'en a qui sont comptées 3 fois ! HEIN, MON P'TIT !

BEN si !

NON, NON, PAS DU TOUT EUH... AF TU L'AS COMPTÉE QUE DEUX FOIS EUH...

BON, BEN DEUX FOIS ALORS... QUE L'ON COMPTE DEUX FOIS. MAIS SI... C'EST JUSTE

QUAND TU TRACES PAR A TOUTES LES DIAGONALES ET QUAND TU TRACE PAR F TOUTES LES DIAGONALES... PAR B, C'EST LA MÊME CHOSE ET TOUT ÇA...

ÇA REVIENT DONC À FAIRE LA DIVISION PAR 2

En sachant le nombre de sommets d'un polygone, il partira de chaque point, le nombre de sommets (pas deux voisins + lui-même) ~~qui sont adjacents à ce point~~ ~~diagonales et le nombre de sommets adjacents~~

il faut multiplier ce qui se trouve par le nombre de sommets (par chaque sommet, peut être même nombre de diagonales)

MAIS ~~il faut multiplier ce qui se trouve par le nombre de sommets~~

MAIS, on compte chaque diagonale deux fois

Le nombre de diagonales est donc à diviser par 2 si on se obtient une fois chaque diagonale

BERTRAND ET CHRISTOPHE RECONSIDÈRENT LE CAS DU POLYGONE À 7 SOMMETS

SI ON TROUVE UN NOMBRE ET QU'ON L'DIVISE PAR 2, ÇA NOUS DONNE 14.

ATTENDS... Y A 7

ATTENDS, ON VA REPARTIR À ZÉRO. Y A 7 SOMMETS PAR... ON EN ENLÈVE 3, POUR SAVOIR

ON SAIT DONC... ON TROUVERA L'DOUBLE

MAIS NON, NON... R'GARDE 4... 7 FOIS 4, 28... DIVISÉ PAR 2 ÇA FAIT 14

C'EST C'QUE J'T'AI DIT... ÇA FAIT 7 ET 7, QUOI !

MAIS NON, R'GARDE... ON OBTIENT CHAQUE DIAGONALE 2 FOIS ET ON DIVISE PAR 2 ET ON AURA CHAQUE DIAGONALE UNE FOIS

C'EST COMPLIQUÉ TON TRUC. Y EN A QUI VONT PAS COMPRENDRE

PUIS D'ABORD, ÇA TU L'AS PAS DÉMONTRÉ. T'AS PAS L'DROIT D'LE DIRE C'QUE T'AS DIT LÀ

OH ! LAISSE MOI PARLER!... ON OBTIENT LE NOMBRE DE SOMMETS MULTIPLIÉ PAR 2. DONC SI ON A 7 SOMMETS ÇA F'RA 14, ET ON SAIT TRÈS BIEN QU'Y AURA 14 DIAGONALES

MAIS COMMENT TU SAIS, TU L'AS PAS DÉMONTRÉ ÇA !

MAIS Y SONT PAS FOUS Y COMPTENT LE NOMBRE DE SOMMETS

MAIS Y FONT PAS UN DESSIN, Y CALCULENT ! Y CALCULENT

EH BEN NOUS, ON A FAIT QUOI ? ON A PAS FAIT UN DESSIN, LÀ ?

BEN OUAIS, MAIS... EUX Y VEULENT PAS FAIRE UN DESSIN... Y VEULENT UNE OPÉRATION, EUX !

OUAIS, MAIS, DONNE MOI TON TRUC.
J'COMPRENDS PAS LÀ... ON OBTIENT UNE FOIS CHAQUE DIAGONALE...

ÇA M'PARAÎT LOUCHE TON TRUC

OUAIS, BEN SI ON EN A 8-3, ÇA FAIT 5. Y EN AURA 5 PAR SOMMET, ALORS... ÇA F'RA 5 FOIS 8. ÇA F'RA 40, DIVISÉ PAR 2 ÇA F'RA 20

ÇA F'RA 20 ATTENDS ON VA ESSAYER D'VOIR SI C'EST ÇA

ET PARCE QUE 8 ET 8 ÇA FAIT PAS 20... POUANTANT... AVEC 7 ÇA MARCHE

ET BEN OUAIS... BEN C'EST P'TÊTRE TOI QUI... C'EST P'TÊTRE UN HASARD, QU'ON AIT COMMENCÉ PAR 7 ET QUE ÇA FASSE... 7 ET 7 ... 14, ALORS

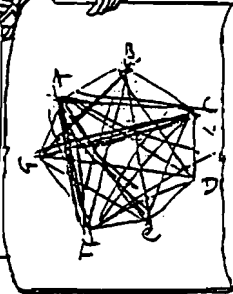
OUAIS MAIS C'EST PAS ÇA. C'EST PAS L'MOYEN.

OH! PAUVRE! T'ES BOUCHÉ TOI

T'AS PAS L'DROIT D'DIRE QUE ÇA FAIT... TU L'AS PAS DÉMONTRÉ T'AS PAS L'DROIT D'L'DIRE.

TU VAS VOIR

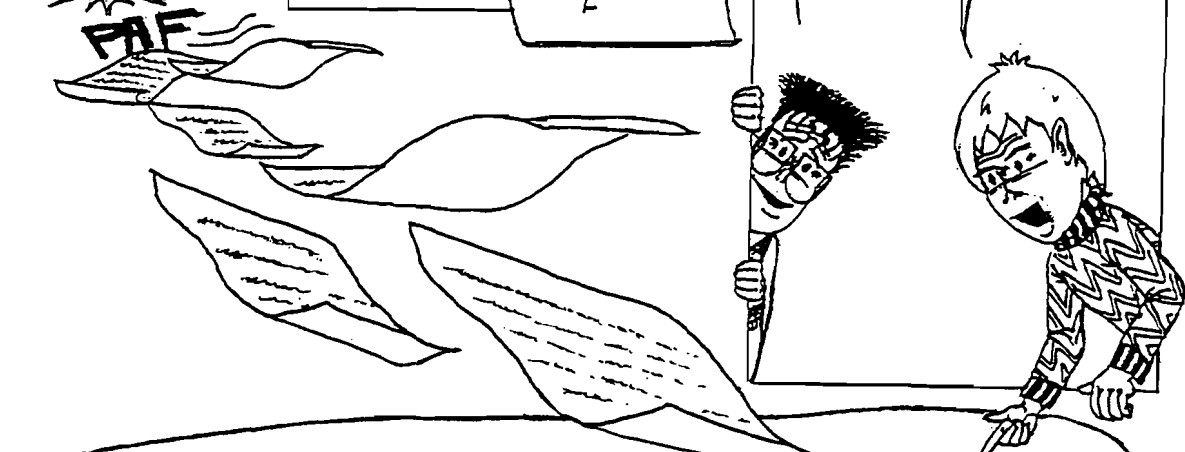
TU VEUX ESSAYER DE... 8 ET 8 ÇA FAIT 16. ATTENDS ON VA LES COMPTER LÀ... SI ÇA FAIT PAS 16...



LES ÉLÈVES DÉNOMBRENT ENSEMBLES LES DIAGONALES SUR LEUR RÉALISATION D'UN OCTOGONE CONVEXE

OUAIS, OUAIS... C'EST BIEN 20...
OUAIS C'EST JUSTE...
OUAIS BEN OIS DONC...

BEN MAINTENANT FAUT RÉDIGER ÇA AU PROPRE



En sachant le nombre de sommet d'un polygone, il partira de chaque point le nombre de sommet - (les 2 voisins plus lui-même). Il faut multiplier ce que l'on a trouvé par le nombre de sommet (partout le même nombre de diagonales).

Il faut compter chaque diagonale deux fois: le nombre de diagonales trouvées est donc à diviser par deux pour trouver le nombre de diagonales.