

SYMETRIE ORTHOGONALE : DES ELEVES FRANCAIS ET JAPONAIS FACE A UNE MEME TACHE DE CONSTRUCTION

Bernadette DENYS
I.R.E.M. de Paris VII
Denise GRENIER
Equipe de Didactique
des Mathématiques et de l'Informatique
Université de Grenoble I

I – INTRODUCTION

1. Les objectifs.

Le but de cet article est de décrire les résultats d'expérimentations réalisées parallèlement avec des élèves français et des élèves japonais à propos de la notion de symétrie orthogonale. Plus précisément, nous avons tenté, à partir des productions de ces élèves dans une même tâche de construction, de comparer leurs conceptions de cette notion et de déterminer l'influence, sur leurs réponses, de certaines variables caractéristiques des figures et de la tâche.

2. Cadre de notre recherche.

Dans le monde, la France et le Japon constituent deux pôles culturels remarquables par leurs différences. L'organisation de l'espace, l'architecture, mais aussi le langage et les signes sont gérés de manières très différentes. Dans la langue française, toutes les étapes d'un raisonnement sont exprimées et, pour l'écrit, un seul alphabet est utilisé. Dans la langue japonaise, le degré d'explicitation est beaucoup plus réduit, mais la richesse des signes utilisés pour l'écrit est incomparable : on utilise deux alphabets syllabiques, chacun de 52 signes, ainsi qu'environ 7 000 caractères chinois (kanji), sans oublier l'alphabet latin qui sert par exemple pour les écritures mathématiques⁽¹⁾.

Une comparaison de l'organisation de l'espace et de l'architecture au Japon et en France a été faite par Augustin Berque (1982). Il ressort en particulier de cette étude que l'architecture française privilégie les ordres géométriques et les perspectives, tandis que l'architecture japonaise traditionnelle les dédaigne, notamment la symétrie. Il semble que le penchant à l'asymétrie se soit développé en même temps que se définissait la civilisation japonaise.

Des disciplines transculturelles et interculturelles se sont développées dans les vingt dernières années, surtout dans les pays anglophones (Mauviel, 1984) ; elles commencent à poindre en France alors que le patrimoine français est d'une grande richesse dans ce domaine.

Plaçons-nous sur le plan de l'apprentissage. Comme le souligne M. Mauviel, l'individu puise dans l'héritage symbolique de son groupe (langue, système de valeurs, mouvements du corps...), héritage qu'il transforme, et c'est ce processus qui contribue à organiser son système de perception.

Il est sans doute intéressant de comparer la manière dont les contextes culturels français et japonais agissent sur le milieu scolaire et sur les processus d'acquisition des connaissances mathématiques, en particulier des connaissances géométriques. L'enseignement de la géométrie constitue un lieu privilégié d'observation des structures mentales à travers les modes cognitifs d'appréhension de l'espace, en liaison avec les usages langagiers et la mise en œuvre de représentations symboliques.

Parmi les notions géométriques enseignées au collège, la symétrie orthogonale est une notion qui fait partie, pour l'élève, de son acquis socio-culturel ; il est intéressant d'étudier comment les élèves concilient l'objet d'enseignement et l'objet familier du milieu extra-scolaire.

3. Quelques mots sur les programmes français et japonais.

Nous donnons tout d'abord, dans le tableau 1 ci-dessous, la correspondance entre les classes japonaises et les classes françaises pour les élèves de 11 à 15 ans.

tableau 1

correspondance entre l'âge et le niveau des élèves en France et au Japon						
	âge	11	12	13	14	15
France	école classe	collège 6	collège 5	collège 4*	collège 3	
Japon	école classe	élémentaire 6*	moyenne 1	moyenne 2	moyenne 3	

(* année où la symétrie orthogonale est enseignée)

La notion de symétrie orthogonale apparaît à des étapes différentes dans les programmes français et japonais.

Actuellement, les programmes français pour le collège laissent une grande latitude au professeur pour l'organisation de son cours ; l'accent est mis en classe de

quatrième sur l'apprentissage de la démonstration. En géométrie plane, la translation, la symétrie centrale, la symétrie orthogonale et la projection sur une droite sont enseignées comme des transformations ponctuelles. Dans les nouveaux programmes français mis en application à partir de septembre 1986, la symétrie orthogonale sera enseignée au moyen de transformation de figures en classe de 6ème, et non plus comme transformation ponctuelle en classe de 4ème comme elle l'était jusqu'à présent.

Les programmes japonais pour l'école moyenne prévoient davantage de manipulations, de constructions, de mesures de figures géométriques planes et spatiales avant la découverte des propriétés de ces figures, peu de démonstrations sont faites. Les manuels sont peu diversifiés et les professeurs les suivent de très près. La symétrie orthogonale est enseignée dès la dernière année d'école élémentaire à partir de la notion d'axe de symétrie d'une figure, et la symétrie centrale est enseignée aussitôt après.

II – LES TRAVAUX DE BASE ET LES PREMIERES OBSERVATIONS.

1. Les travaux sur lesquels s'appuient notre recherche.

Quelques études concernant les transformations, et notamment la notion de symétrie orthogonale, ont déjà été réalisées dans différents pays. En particulier, des recherches françaises et anglaises ont déterminé l'existence de variables (caractéristiques des figures ou de la tâche) qui ont une incidence sur les productions des élèves dans une activité de construction. Nous citerons en particulier les recherches de D. Kücheman et K.M. Hart en Angleterre (K. Hart, 1981), et celles de R. Gras (1983) et D. Grenier (1985a), en France.

Les recherches faites à l'école japonaise de Paris sont plus particulièrement liées aux travaux de D. Grenier et M. Guillerault (Equipe de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble), qui ont mis en évidence les conceptions de la symétrie orthogonale mobilisées par les élèves français de 11 à 15 ans (avant et après enseignement en classe de cette notion) dans une tâche de «construction à main levée». Lors d'une première expérimentation, ils avaient demandé à des élèves de 13 à 15 ans travaillant par binômes de tracer à main levée les figures symétriques de figures données par rapport à une droite. Un observateur notait, pour chaque binôme, les différentes étapes de la construction et les arguments échangés par les deux élèves (ils devaient fournir une solution commune). Nous donnons ci-après (planche 1) les huit items qui avaient été proposés aux élèves sous forme de livret.

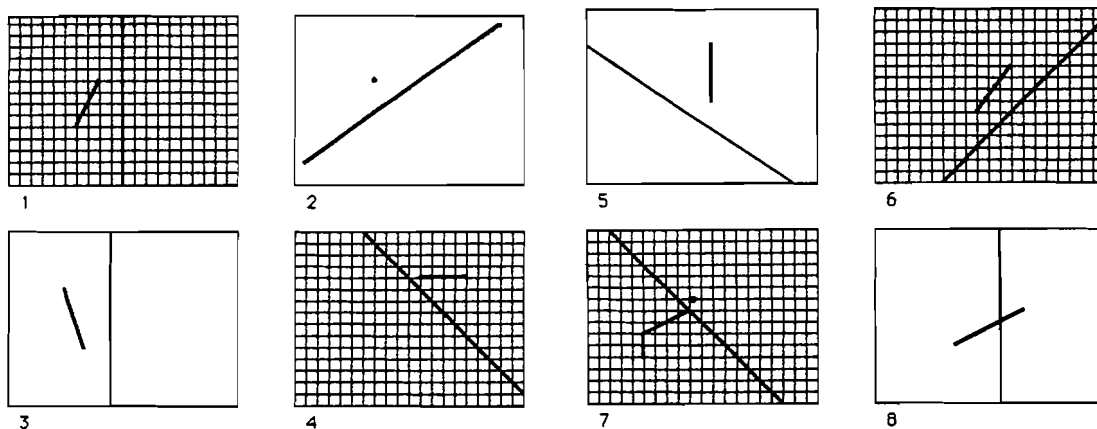


planche 1

L'analyse des arguments échangés par les élèves et des procédures de résolution utilisées avait permis de repérer les liens entre certaines caractéristiques de la figure et les procédures de construction des élèves. Ces caractéristiques, que nous appelons «variables didactiques» (variables dont les valeurs provoquent des changements de procédures chez les élèves) sont les suivantes :

- la nature de la figure-objet, qui était ici un segment ou un point,
- la position de la figure globale dans la feuille,
- l'orientation de l'axe de symétrie dans la feuille,
- la position relative de la figure-objet et de l'axe de symétrie (intersection avec l'axe, angle du segment et de l'axe),
- le type de papier (blanc ou quadrillé).

Cette expérimentation avec des binômes avait montré également l'importance de certaines «règles d'action» mises en œuvre par les élèves, telles les procédures de comptage sur le papier quadrillé ou les procédures de translation le long de lignes «horizontale» ou «verticale» dans la feuille, que nous avons nommées procédures de types «rappel horizontal» ou «rappel vertical». Une analyse détaillée en a été faite dans petit x, numéro 7 (Grenier 1985a).

Nous avons alors réalisé plusieurs observations à l'école japonaise de Paris (où les programmes officiels japonais sont en vigueur), en soumettant les élèves japonais à la même tâche, avec les mêmes figures que celles proposées aux élèves français. Les objectifs de ces observations étaient les suivants :

- repérer les conceptions mises en jeu par les élèves japonais à propos de la symétrie orthogonale dans une telle tâche de construction,
- déterminer si les variables didactiques qui semblent influencer sur les réponses des élèves français dans cette tâche ont une influence analogue sur les réponses des élèves japonais.

Avant de donner les résultats de ces premières observations, nous allons analyser la tâche proposée aux élèves et les raisons de notre choix.

2. Pourquoi une tâche de «construction à main levée» ?

Dans toutes ces expérimentations, l'activité proposée aux élèves est une activité de construction à main levée de la figure symétrique d'une figure donnée par rapport à une droite donnée. Ce choix avait été fait, au départ, pour les expérimentations françaises qui concernaient des élèves de 6ème à 3ème, en vue de déterminer l'évolution de leurs conceptions avant et après l'enseignement en classe.

Les élèves des classes de 6ème et 5ème n'ayant pas eu l'enseignement de la symétrie en classe, nous avons donné dans toutes les classes la «définition» suivante : «Si on plie le long de la droite de symétrie, la figure-objet et sa figure symétrique se superposent parfaitement». Mais nous avons interdit le pliage, afin d'obliger les élèves à mettre en œuvre les propriétés attribuées, par eux, à la symétrie orthogonale.

De plus, pour les élèves de 4ème et 3ème, la symétrie orthogonale avait été enseignée (en classe de 4ème) comme une transformation ponctuelle et les exercices proposés avaient comporté peu de constructions. Cette tâche nous permettait donc, en outre, d'étudier la capacité de ces élèves à réinvestir, dans cette activité, les connaissances apprises en classe.

Les figures proposées étaient des segments ou des points, occupant différentes positions par rapport à l'axe de symétrie, cet axe de symétrie étant lui-même orienté de différentes manières dans la feuille (revoir la planche 1).

Plus généralement, une telle tâche permet de mettre en évidence la perception globale qu'ont les élèves d'une figure et de son symétrique, car elle n'entraîne ni les perturbations provoquées par l'usage d'instruments de construction, ni les problèmes langagiers posés par une description écrite.

Enfin, pour une comparaison entre les productions des élèves français et celles des élèves japonais, le choix de cette tâche nous autorise à étudier ces productions indépendamment des incidences langagières.

3. Premières observations comparatives franco-japonaise.

Les premières observations faites à l'école japonaise ont consisté à proposer le livret de la première expérimentation menée à Grenoble (Grenier, 1985a) à deux binômes d'élèves japonais de 13 ans de deuxième année d'école moyenne (ils avaient reçu un enseignement de la symétrie orthogonale deux ans auparavant). Les figures proposées (celles reproduites dans la planche 1) étaient constituées de points ou de segments occupant différentes positions par rapport à l'axe de symétrie. La réussite

excellente de chaque binôme a montré que ces élèves de l'école japonaise n'éprouvaient pas les difficultés rencontrées par les élèves français de 13 à 15 ans dans ce type de tâche. En particulier, un comportement rare pour l'élève français s'est avéré naturel pour l'élève japonais : celui qui consiste, lorsque l'axe est «oblique», à tourner la feuille de manière à placer l'axe dans la position «verticale».

Ces résultats nous ont conduites à mener une observation auprès d'élèves japonais plus jeunes, dans une situation de travail individuel. Elle a mis en évidence, chez les élèves japonais de 10 à 12 ans, des erreurs déjà repérées chez les élèves français. Les figures proposées étaient celles qui avaient été données aux binômes, excepté la figure 2 qui n'avait posé aucun problème dans les deux populations d'élèves : nous les reproduisons dans la planche 2 ci-dessous. Les différents résultats obtenus fournissent une première comparaison d'une part entre les réussites des élèves japonais et celles des élèves français (tableau 2) et, d'autre part, entre les différents types d'erreurs rencontrées dans les deux populations.

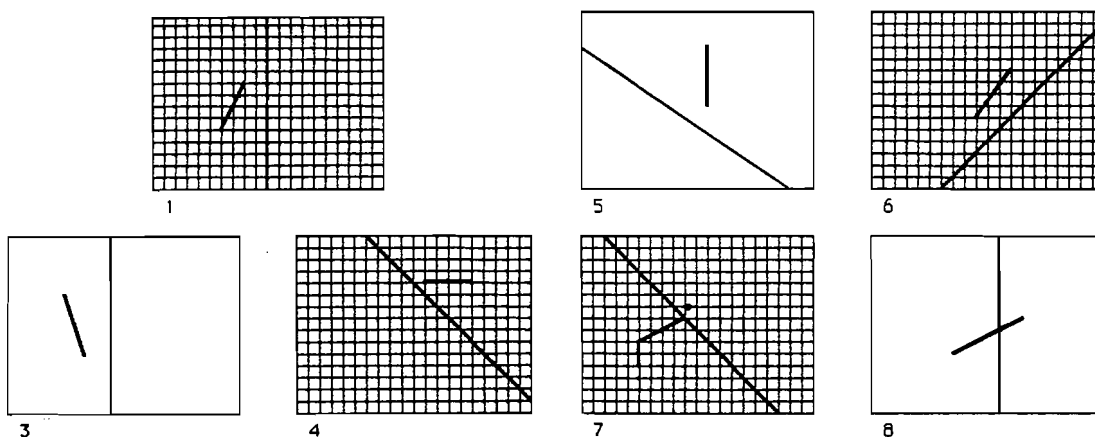


planche 2

tableau 2 : nombre de bonnes réponses

n° item	élèves japonais			élèves français
	10-11 ans	11-12 ans	12-13 ans	11-15 ans
1	22/26	35/37	24/24	20/22
3	21/26	34/37	24/24	21/23
4	10/26	25/37	22/24	12/23
5	10/26	20/32	23/24	12/23
6	11/26	30/37	23/23	16/23
7	8/26	17/32	22/24	8/23
8	10/26	28/36	21/24	8/28

Les résultats essentiels qui ressortent de cette expérimentation sont les suivants (ils ne sont pas tous visibles sur le tableau précédent) :

1 – Il semble que, dans cette tâche, les performances de l'élève de 12 ans de l'école japonaise de Paris soient comparables à celles de l'élève français de 14 ans de niveau moyen. Mais il faut noter que la tâche de construction proposée est plus proche des travaux usuels des élèves japonais que de ceux des élèves français.

2 – Des erreurs de même type ont été repérées de part et d'autre, mais à des âges différents.

3 – Cependant, si l'enseignement de la symétrie orthogonale ne permet pas aux élèves japonais de 11 ans de surmonter toutes les difficultés, du moins, en deuxième année d'école moyenne (13 ans), les erreurs disparaissent presque totalement (voir tableau 2).

Ces résultats nous ont incitées à une expérimentation plus affinée, d'une part pour vérifier le constat de la très grande réussite, dans cette tâche, des élèves japonais de 13 ans (ce qui n'est pas le cas pour les élèves français de 15 ans) et, d'autre part, pour tenter de comparer plus précisément les erreurs des élèves des deux populations.

III – L'EXPERIMENTATION.

1. Présentation de l'expérimentation.

Cette deuxième série d'observations a eu lieu à l'école japonaise de Paris à la suite d'une nouvelle expérimentation, réalisée à Grenoble, proposant le même exercice de construction à main levée à un grand nombre d'élèves de collège en situation de résolution individuelle. Il s'agissait de vérifier de façon plus systématique l'influence de certaines variables sur les réponses des élèves, et, pour cela, de fixer les valeurs des autres variables.

Ainsi, nous n'avons gardé qu'un seul type de figure-objet : le segment, qui est une figure relativement simple et, en tout cas, classiquement proposée comme exemple dans les manuels scolaires pour illustrer la symétrie d'une figure. D'autre part, la position de la figure globale dans la feuille avait été choisie pour permettre les réponses de types «rappel horizontal» et «rappel vertical» (c'est-à-dire qu'il était possible de tracer les images de ce type dans le cadre de la feuille).

Les résultats ont montré l'influence sur les réponses des élèves français des variables suivantes :

- l'orientation de l'axe dans la feuille (verticale, horizontale, oblique à 45°) ;
- la position relative du segment et de l'axe de symétrie (intersection du segment et de l'axe, grandeur de l'angle du segment et de l'axe) ;
- le type de papier (blanc ou quadrillé).

Parmi les items de cette expérimentation dans les classes françaises, nous en avons retenu douze qui nous ont semblé particulièrement pertinents pour comparer, dans les réponses des élèves des deux populations, le rôle des variables choisies.

Ainsi, l'orientation de l'axe dans la feuille a été fixée «oblique à 45 degrés gauche» ou «oblique à 45 degrés droite», car les items avec orientation «verticale» ou «horizontale» de l'axe avait été très bien réussis par les élèves japonais.



Par contre, ces items comprenaient toutes les positions relatives du segment et de l'axe de symétrie et les deux types de papier. Les douze figures choisies sont présentées dans la planche 3 du paragraphe 4, ainsi qu'une analyse des difficultés qu'elles présentent et des résultats attendus.

2. Le dispositif expérimental et la consigne.

Ce livret de douze items a été proposé aux élèves japonais de 11 à 14 ans, c'est-à-dire en sixième année d'école élémentaire, première et deuxième année d'école moyenne. L'analyse laissant prévoir des résultats excellents dès la deuxième année, l'expérimentation n'a pas été réalisée en troisième année d'école moyenne. Ces douze items avaient été proposés à des élèves français de quatre niveaux différents (6ème à 3ème) choisis dans des collèges très divers de la région grenobloise.

La consigne a été donnée oralement ou par écrit par le professeur japonais. En voici la traduction littérale :

«La symétrie, c'est le fait d'avoir des formes identiques, formées de points, lignes, etc., par rapport à la ligne grosse et longue. Tracer une forme identique à celle qu'on trouve dans la figure de l'autre côté de la ligne grosse et longue».

Les élèves japonais soumis à cette expérimentation avaient tous reçu un enseignement de la symétrie orthogonale⁽³⁾.

Pour les élèves français, la consigne, écrite sur la première page du livret distribué aux élèves avait été lue par le professeur à voix haute à toute la classe : «Pour chaque figure, tracer le symétrique du segment par rapport à la droite».

Les élèves des classes de 6ème et 5ème n'ayant pas eu d'enseignement de la symétrie orthogonale, il fallait se mettre d'accord sur la signification de l'expression

«figure symétrique d'une figure donnée». La «définition» proposée aux élèves des quatre classes était la suivante : «Quand on plie le long de la droite, la figure donnée et la figure symétrique se superposent parfaitement. Vous pouvez imaginer le pliage, mais vous ne devez pas plier».

On trouve dans les livres japonais la définition dont voici une traduction : Lorsqu'on plie en deux une forme suivant une ligne droite et que les parties des deux côtés se superposent complètement, on dit que cette forme est une symétrie-droite. De plus, cette ligne droite s'appelle axe de symétrie.

En France, la définition usuelle que nous pouvons trouver dans les manuels de la classe de quatrième présente la symétrie comme une transformation ponctuelle du plan. Mais la «définition» donnée aux élèves français dans cette expérimentation était proche de celle proposée dans les livres japonais.

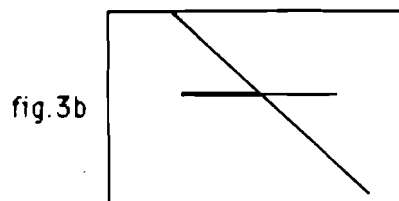
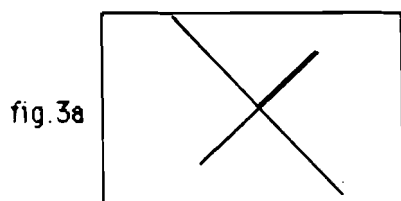
3. Une typologie des réponses des élèves.

Pour décrire les figures et rendre compte des réponses attendues, nous avons utilisé la typologie décrite par D. Grenier (1985b). Cette typologie est un essai de classement des différentes procédures utilisées par les élèves français dans cette tâche de construction à main levée. Nous la reproduisons dans le tableau 3 ci-dessous.

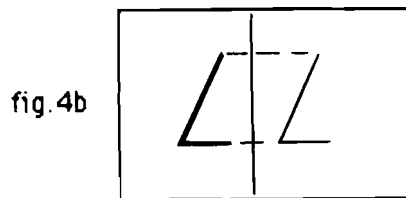
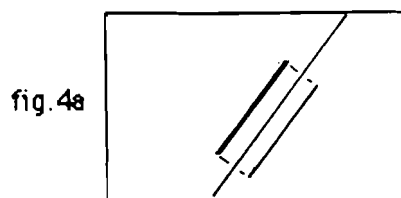
tableau 3

Principaux types de procédures utilisées par les élèves dans cette tâche	
<p>– Réponses de type «orthogonalité» : la détermination des sommets de la figure-image se fait le long des droites orthogonales à l'axe et passant par ces sommets (fig. 1a, 1b). Ces réponses sont correctes dès que le report de la distance à l'axe de symétrie est exact (fig. 1a).</p>	
fig.1a	
fig.1b	
<p>– Réponses de type «recouvrement partiel ou total» qui donnent pour image une figure recouvrant partiellement ou totalement la figure-objet (fig. 2a, 2b).</p>	
fig.2a	
fig.2b	

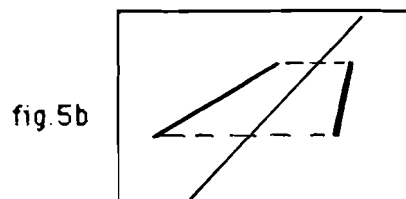
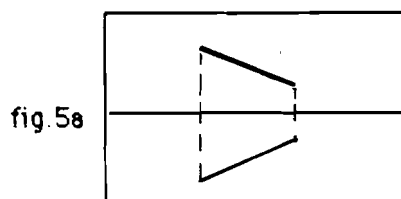
– Réponses de type «prolongement» qui donnent pour image une figure située dans le prolongement de la figure-objet (fig. 3a, 3b) ; ce prolongement peut s'accompagner d'un recouvrement partiel ou total de la figure-objet.



– Réponses de types «parallélisme» ou «translation» qui donnent pour image une figure translaturée globalement de la figure-objet (fig. 4a, 4b).



– Réponses de types «rappel horizontal» ou «rappel vertical» qui donnent pour image une figure dont les sommets sont obtenus par translations horizontale ou verticale des sommets de la figure-objet (fig. 5a, 5b).



Les réponses de type «orthogonalité» sont correctes dès que le report de la distance à l'axe de symétrie est exact. Les quatre autres types de procédures de résolution peuvent donner lieu à des réponses exactes (fig. 2a, 3a, 4a, 5a) ou à des réponses fausses (fig. 2b, 3b, 4b, 5b).

4. Analyse des figures.

La planche 3 ci-dessous donne les 12 figures de l'expérimentation*.

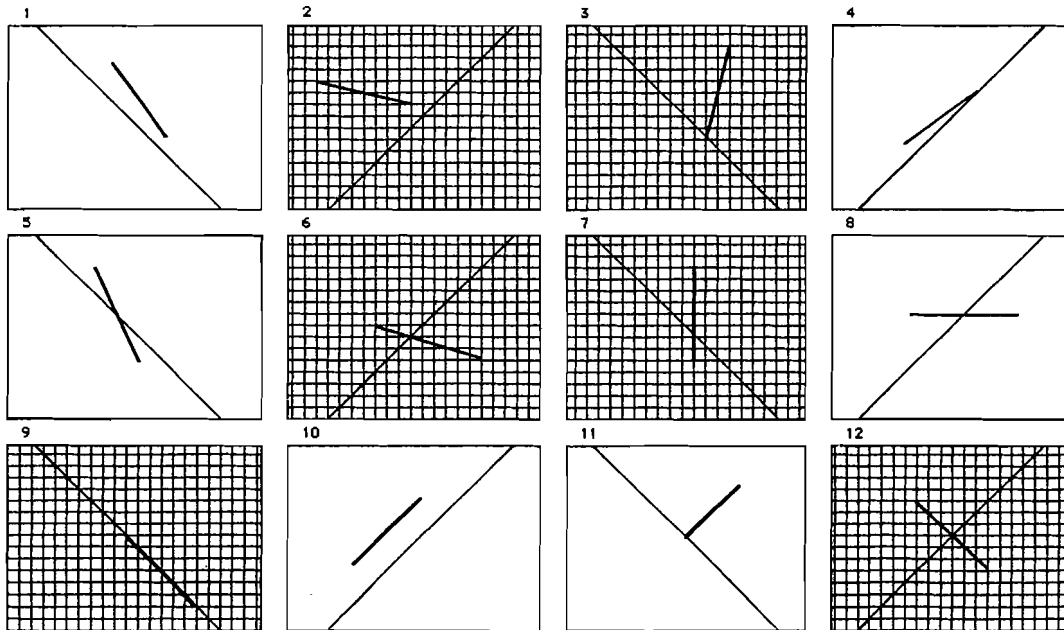


planche 3

Nous avons analysé des figures en fonction des variables dont nous voulions observer l'influence. Les résultats des précédentes observations nous permettaient de proposer une classification a priori des valeurs de chacune de ces variables.

tableau 4 : classification des valeurs des variables

variable	valeurs par ordre de difficulté croissante	valeur non classée
«intersection segment-axe»	T (touche) NC (ne coupe pas) C (coupe) S (superposition)	
«valeur de l'angle (s, a)»	D (droit, 90°) P (petit, entre 0° et 45°) G (grand, entre 45° et 90°)	R (remarquable, 0° et 45°)
«type de papier»	B (blanc) Q (quadrillé)	
«orientation du segment»	V (verticale) H (Horizontale) O (oblique)	

* Pour vous permettre de suivre facilement cette analyse, une feuille détachable (reproduisant ces figures est mise à votre disposition en fin d'article (recto de la feuille).

Quelques commentaires sur cette classification.

Pour la variable «intersection segment-axe», nous pensons que la détermination du symétrique est plus difficile si le segment donné coupe l'axe, et plus encore s'il est porté par l'axe. Par contre, si le segment touche l'axe, le point de contact sert d'appui pour la construction et, en ce sens facilite la tâche.

Nous appelons «angle (s, a)» l'angle aigu formé par les droites portant le segment et l'axe. Lorsque la valeur de cet angle est grande (entre 45° et 90°), les procédures de prolongement apparaissent (revoir la typologie des réponses). Lorsque l'angle (s, a) vaut 90° , la procédure de «prolongement» se confond avec la procédure «d'orthogonalité» et peut donc aboutir à un résultat juste.

Nous avons déjà vu l'incidence du papier quadrillé sur les procédures de comptage et les difficultés que le quadrillage soulève dès que l'axe n'est ni vertical, ni horizontal.

La valeur 45° de l'angle (s, a) est remarquable car, dans les figures 7 et 8, le segment prend une orientation verticale ou horizontale. Ces orientations particulières peuvent provoquer des procédures erronées de types «parallélisme» ou «prolongement» et rendre la tâche plus difficile.

Enfin, la valeur (s, a) égale à 0° peut donner lieu à un item facile si le segment est strictement parallèle à l'axe (fig. 10), mais qu'en est-il si le segment est porté par l'axe ?

Description des figures.

Le tableau ci-dessous donne les valeurs de ces variables pour chacune des figures.

tableau 5 : figures et variables

n° figure	angle (s, a)	intersection segment-axe	type de papier	orientation du segment
1	P	NC	B	0
2	G	NC	Q	0
3	G	T	Q	0
4	P	T	B	0
5	P	C	B	0
6	G	C	Q	0
7	R	C	Q	V
8	R	C	B	H
9	R	S	Q	0
10	R	NC	B	0
11	D	T	B	0
12	D	C	Q	0

Dans les items 1, 2, 3, 4, le segment se trouve dans un seul demi-plan par rapport à l'axe de symétrie. Nous voulions particulièrement observer la variable «angle segment-axe» : son influence est-elle analogue sur les réponses des élèves français et celles des élèves japonais ?

Dans les items 5, 6, 7, 8, le segment coupe l'axe de symétrie. Nous voulions savoir si la réelle difficulté provoquée par cette position du segment par rapport à l'axe de symétrie, difficulté observée chez les élèves français, se retrouve chez les élèves japonais.

Dans les items 9, 10, 11, 12, la variable «angle segment-axe» prend deux valeurs particulières : 0° et 90° , valeurs pour lesquelles le segment-image a même direction que le segment-objet. Nous pensons que les items 10 et 11 ne présentaient pas de difficultés. Par contre, les items 9 et 12 posent le problème de la superposition des segments objet et image.

Dans chacun des trois groupes de quatre figures, nous avons fait varier le type de papier (blanc ou quadrillé).

5. Analyse des résultats.

Les résultats qui suivent concernent les douze items choisis pour l'expérimentation à l'école japonaise de Paris et les mêmes items issus de l'expérimentation française qui avait précédé. Les effectifs étant de 80 élèves français et 110 élèves japonais, ces résultats sont à prendre en compte de manière plus qualitative que quantitative.

tableau 6 : nombres de bonnes réponses obtenues par item et par classe

n° item	figure	papier	classes françaises				classes japonaises		
			6ème	5ème	4ème	3ème	6ème	1ère	2ème
1		B	19/21	21/21	20/21	19/21	42/47	32/36	24/25
2		Q	9/20	8/20	14/20	12/20	34/46	29/36	22/25
3		Q	13/20	8/21	16/20	13/21	26/47	25/36	23/25
4		B	19/20	20/21	20/21	21/21	43/47	33/36	24/25
5		B	13/20	20/21	19/21	19/21	42/47	34/36	25/25
6		Q	2/20	7/20	13/20	11/20	18/47	27/36	22/25
7		Q	6/20	11/20	15/20	12/20	29/47	28/36	24/25
8		B	12/20	10/20	12/20	12/20	37/47	29/36	24/25
9		Q	12/21	15/22	18/21	17/22	22/47	21/35	25/25
10		B	14/20	18/20	18/20	18/20	42/47	35/36	25/25
11		B	18/20	19/21	20/20	21/21	44/47	33/36	25/25
12		Q	10/21	10/21	12/21	14/21	18/46	18/36	23/25

tableau 7 : pourcentages des réussites des élèves par classe.

classes françaises	6	5	4	3
	61%	68%	80%	76%
classes japonaises	6	1	2	
	71%	80%	95%	

a) Trois constatations s'imposent en premier lieu.

— Le **taux de réussite** des élèves japonais est, dans l'ensemble nettement supérieur à celui des élèves français. Les performances de l'élève de 12 ans de l'école japonaise de Paris (début de 1ère année au moment où l'expérimentation a été faite) sont comparables à celles de l'élève français de 14 ans (fin de la classe de 4ème de collège).

— La **progression du taux de réussite** avec le niveau de la classe est très nette à l'école japonaise où la réussite en deuxième année d'école moyenne (14 ans) est presque totale. Par contre, pour les élèves français, la progression est moins évidente entre les classes de 6ème et de 3ème, de plus, elle est inexistante entre la 4ème et la 3ème.

— Le **taux de réussite sur papier quadrillé** est, dans l'ensemble, nettement inférieur au taux de réussite sur papier blanc, tant pour les élèves japonais que pour les élèves français. Dans le cadre de cette expérimentation, il n'y a pas eu cependant de comparaison de la même figure sur papier blanc et sur papier quadrillé.

Les deux premières constatations confirment le processus de maturation qui se produit chez les élèves japonais entre la 1ère et la 2ème année d'école moyenne. Plus précisément, regardons les résultats aux items 2, 3, 6, 7, 8 et 12 qui semblent les plus significatifs. Ces items ne sont bien réussis, ni par les élèves français (même en classe de 3ème), ni par les élèves japonais en 1ère année, alors qu'ils le sont parfaitement par les élèves japonais en 2ème année d'école moyenne.

En examinant les valeurs des variables décrites ci-dessus, nous avons été amenées aux remarques suivantes :

— d'une part, les items 2, 3 et 6 sont les seuls pour lesquels l'angle (s, a) est grand,

— d'autre part, les items 7, 8 et 12 ont en commun une valeur remarquable de l'angle (s, a) et, pour chacun d'entre eux, le segment coupe la droite de symétrie.

Nous pouvons conclure que les variables «angle (s, a)» et «intersection segment-axe» influencent les réponses des élèves français même après enseignement en classe de la notion, alors que les difficultés soulevées par ces variables sont surmontées par les élèves japonais dès la 2ème année d'école moyenne.

b) Le tableau suivant nous donne le **pourcentage de bonnes réponses** obtenues par l'ensemble des élèves de chaque population pour chaque figure.

tableau 8 : pourcentage des bonnes réponses pour l'ensemble des élèves.

n° de la figure	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
élèves français	94	54	62	96	87	41	55	57	72	85	95	53
élèves japonais	91	79	69	93	94	62	75	83	64	95	94	55

Ce tableau donne une «moyenne» des réussites à chaque figure, toutes classes confondues. Il met en évidence les différences de réussite entre élèves français et élèves japonais, particulièrement importantes pour les items 2, 6, 7 et 8, puisqu'elles sont de 20% et plus. Nous en tentons une analyse plus loin. Par contre, il faut se reporter au tableau 6 pour voir la très grande réussite des élèves de 2ème année de l'école japonaise et la faible réussite au contraire des élèves français de la dernière année de collège.

Propositions de classement des items.

A partir des résultats du tableau 8, nous pouvons donner un classement des items par ordre décroissant de réussite chez les élèves français et chez les élèves japonais.

tableau 9 : classement des items par ordre de réussite décroissante.

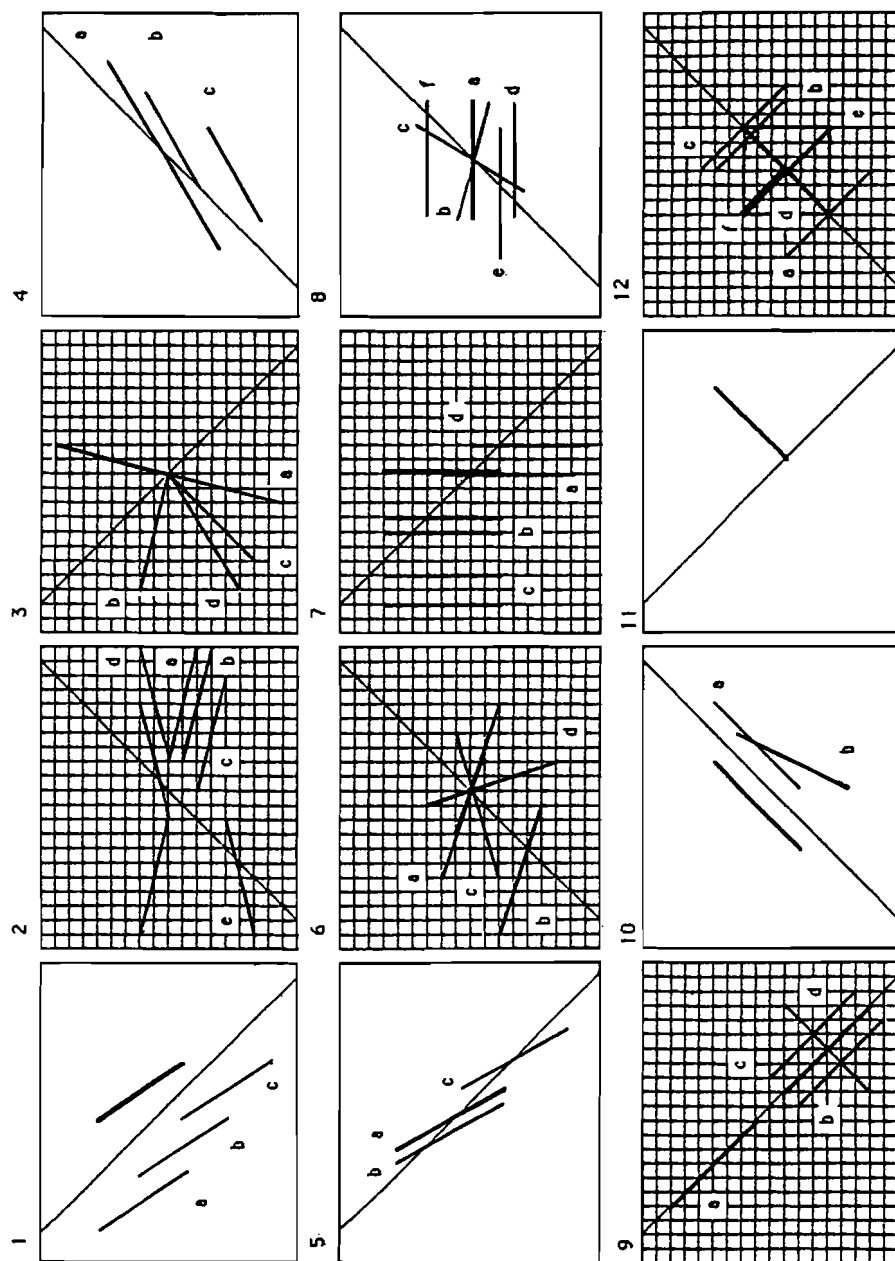
élèves français	4 - 11 - 1 - 5 - 10	- 9 - 3 - 8 - 7 - 2	- 12 - 6
élèves japonais	10 - 5 - 11 - 4 - 1	- 8 - 2 - 7 - 3 - 9	- 6 - 12

Les figures 4, 11, 1, 5, 10 forment un groupe d'items qui sont les mieux réussis par les élèves des deux populations ; ces items sont tous sur papier blanc, ce qui va dans le sens de la remarque faite ci-dessus. Il semble que le papier quadrillé perturbe la perception globale de la figure, ce qui est confirmé par les résultats obtenus auprès des élèves français auxquels chaque figure avait été proposée sur les deux types de papier. L'item 8, le dernier sur papier blanc, suit immédiatement dans le classement japonais, mais non dans le classement français. Les élèves français semblent plus sensibles à la variable «orientation du segment dans la feuille», qui prend ici une valeur particulière, la valeur «horizontale».

Il apparaît aussi que les items 6 et 12 sont les moins bien réussis pour les élèves des deux populations.

c) Comparaison des erreurs.

Pour tenter de comprendre ces ressemblances et ces différences de réussite, nous avons regardé plus précisément quelles étaient les erreurs faites par les élèves français et les élèves japonais*.



Les principaux types d'erreurs

* Le verso de la fiche détachable, donnant un exemple de chaque type d'erreur mentionné dans le tableau 10, vous permettra d'en suivre plus facilement l'analyse.

tableau 10 : comparaison des principaux types d'erreurs.

n° figure	types d'erreurs	classes françaises	classes japonaises	exemple de types d'erreurs
1	translations	1/84	5/108	(a), (b), (c)
2	prolongements ou autres translations rappels horizontaux ou verticaux	13/80 16/80	13/107 3/107	(a), (b), (c) (d), (e)
3	prolongements pentes fausses	16/80 14/82	29/108 1/108	(a) (b), (c), (d)
4	prolongements autres translations	2/83 0/83	2/108 4/108	(a) (b), (c)
5	identité translations	3/83 5/83	0/107 1/107	(a) (b), (c)
6	prolongements avec ou sans recouvrement autres translations rappels horizontaux ou verticaux symétrie/axe perpend. axe donné demi-symétries	13/80 4/80 4/80 3/80 6/80	8/108 2/108 10/108 5/108 6/108	(a) (b) (c) (d) (e), (f)
7	prolongements translations avec rappel horizontal autres translations	8/80 6/80 7/80	7/108 1/108 7/108	(a) (b), (c) (d)
8	identité pentes fausses translations	10/80 9/80 7/80	0/108 6/108 6/108	(a) (b), (c) (d), (e), (f)
9	images sur l'axe de symétrie autres translations symétrie/axe vertical	6/86 3/86 0/86	16/107 4/107 7/107	(a) (b), (c) (d)
10	translations et rappels horizontaux images non parallèles à l'objet	5/80 3/80	2/108 1/108	(a) (b)
11	erreurs non remarquables			
12	translations symétrie/axe vertical ou horizontal tracés d'un carré demi-symétries impossibilité ou non-réponse	7/84 6/84 0/84 10/84 10/84	10/107 14/107 6/107 1/107 6/107	(a), (b), (c) (d) (e) (f)

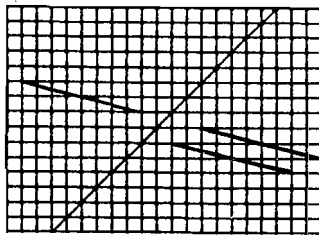
note : les lettres figurant dans la colonne «types d'erreurs» correspondent, pour chaque item, aux notations figurant dans les figures situées au verso de la feuille détachable. Il convient donc de se référer à cette page pour la lecture de ce tableau.

Les items les mieux réussis.

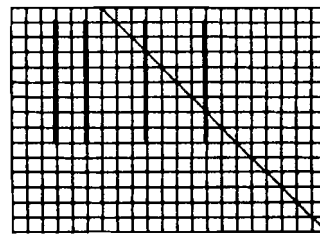
Les items 1, 4, 5, 10 et 11 ont été très bien réussis tant par les élèves français que par les élèves japonais. Or dans les items 1, 4 et 5, l'angle (s) est petit : ce résultat confirme que la valeur P de cette variable rend la tâche facile, pour les trois valeurs T , NC et C de la variable «intersection segment-axe». Pour les items 10 et 11, il nous est difficile de décider si la réussite, bonne dans les deux populations d'élèves, vient de la procédure correcte ou de procédures de prolongement ou de parallélisme, à cause des valeurs particulières de l'angle (s , a) pour lesquelles ces procédures sont confondues.

Les plus grandes différences de réussite.

Les items 2, 6, 7 et 8 ont provoqué une différence de taux de réussite de 20 à 26% de plus pour les élèves japonais. Pour les items 2 et 7, l'erreur la plus fréquente consiste à tracer un segment parallèle au segment donné, comme indiqué ci-dessous.



item 2



item 7

Mais la différence de réussite provient essentiellement des erreurs de types «rappel horizontal» ou «rappel vertical» des élèves français.

Par contre, pour l'item 8 où le segment donné est horizontal, les erreurs sont différentes : l'erreur de pente est beaucoup plus fréquente pour les élèves français que pour les élèves japonais et, surtout, l'erreur de type «identité» est très répandue chez les élèves français et n'apparaît pas chez les élèves japonais, nous analysons plus loin ce dernier type d'erreur, en même temps que les réponses aux items 9 et 12.

Un item qui cumule toutes les difficultés.

L'item 6 a été mal réussi tant pour les élèves français que par les élèves japonais, pour cet item, le papier est quadrillé, l'angle segment-axe est supérieur à 45 degrés et le segment coupe l'axe. Nous trouvons ici une confirmation du rôle joué, dans les deux populations, par les trois variables : type de papier, angle segment-axe, intersection du segment et de l'axe. Les erreurs sont de même type de part et d'autre, mais la différence de réussite d'ensemble (21% de plus pour les élèves japonais) est due essentiellement à la réussite presque totale des élèves japonais de 2ème année d'école moyenne.




L'item 3, un peu mieux réussi par les élèves japonais, a provoqué des erreurs différentes : pour les japonais, dans presque tous les cas, il s'agit du prolongement du tracé donné, alors que, pour les français, il s'agit tantôt de prolongements, tantôt d'erreurs de pente. Précisons à quoi correspondent ces erreurs de pente. Une procédure de comptage des carreaux (2 - 8) peut être cause des réponses fausses de type (a) ou (b). Les réponses de types (c) ou (d) proviennent sans doute du fait que le quadrillage du papier fausse la perception globale de la figure et de son symétrie.

Pour l'item 9, le taux de réussite des élèves japonais est inférieur à celui des élèves français, avec une réussite moyenne de part et d'autre. Cette réussite moyenne peut venir de la difficulté pour l'élève de tracer l'image d'un segment porté par l'axe de symétrie. La différence du taux de réussite est peut-être à corrélérer avec les réponses de type «identité» obtenues chez les élèves français à l'item 8. Nous retrouvons cette difficulté de superposer le segment-image et le segment-objet dans les réponses à l'item 12 qui a provoqué des résultats médiocres pour les uns et les autres.

Un type de réponse particulier : l'identité.

Examinons plus précisément les items où la réponse de type «identité» est apparue (item 8, 9 et 12).

tableau 11 : les réponses de type «identité».

figures	n° items	pourcentages de réussites		pourcentages de réponses «identité»	
		français	japonais	français	japonais
	8	57%	83%	13%	0%
	9	72%	64%	72%	64%
	12	53%	55%	53%	55%





Dans l'item 8, deux variables ont des valeurs qui rendent l'item difficile.

- L'orientation horizontale du segment (pour une orientation oblique de l'axe de symétrie, cette orientation de la figure-objet est perturbante).
- L'intersection par l'axe de symétrie du segment en son milieu.

Cet item est celui qui donne le plus grand écart de réussite entre les élèves japonais et les élèves français. Nous pouvons constater d'après le tableau ci-dessus le nombre important des réponses fausses de type identité chez les élèves français (13%) et l'absence de ces mêmes réponses chez les élèves japonais. Il semble donc que ces deux variables influent davantage sur les procédures des élèves français.

Les taux de réussites aux items 9 et 12 montrent qu'il est plus facile à un élève français de recouvrir tout ou partie de la figure donnée, dans une tâche de construction. En effet, ces deux items sont les seuls de la série où la bonne réponse est l'identité, et ce sont les seuls où la réussite des élèves français est aussi bonne que celle des élèves japonais. L'erreur la plus fréquente faite par les élèves japonais consiste à tracer un segment formant une «croix» avec le segment donné, comme l'indique le tableau et les figures ci-dessous.

tableau 12.

n° items et rappel des figures	nombre d'élèves français	nombre d'élèves japonais	réponse proposée
9 	0/86	7/107	
12 	6/84	20/107	

IV – CONCLUSION.

L'analyse des résultats précédents met en évidence la manière dont les variables choisies agissent dans une tâche de construction à main levée. Nous reprenons ici les effets produits par certaines valeurs des trois variables étudiées : l'orientation de l'axe de symétrie dans la feuille, la position du segment-objet par rapport à l'axe et le type de papier.

La conception du parallélisme du segment donné et de son image dans la symétrie orthogonale est très présente et elle est source d'erreurs chez les élèves des deux populations. Elle apparaît non seulement dans les erreurs de type «identité», «prolongements» et «autres translations», mais aussi en combinaison avec des erreurs de type «rappels horizontaux ou verticaux».

Les élèves japonais semblent moins perturbés que les élèves français par les orientations horizontale ou verticale du segment-objet. Ces orientations du segment proviennent de la conjonction des valeurs de deux des variables observées, à savoir l'orientation «oblique à 45°» de l'axe dans la feuille et la valeur 45° de l'angle segment-axe. Ces orientations du segment sont moins remarquables pour l'élève japonais qui n'hésite pas, comme nous l'avons constaté dans les premières observations par binôme, à tourner sa feuille pour donner à l'axe de symétrie l'orientation «verticale» par rapport à lui-même.

Les élèves japonais semblent éviter les réponses de type «identité», qu'elles soient correctes ou erronées. Il semble que cet évitement l'emporte sur la conception du parallélisme d'un segment et de son image.

Enfin, à propos de la variable «type de papier», nous pouvons dire que le papier quadrillé perturbe la vision globale de la figure et de son symétrique, et amène des procédures de comptage pour les élèves des deux populations.

La remarquable progression du taux de réussite des élèves japonais nous a incitées à chercher des éléments d'explication. La réussite presque totale des élèves japonais de deuxième année d'école moyenne à la tâche proposée est peut-être due à l'utilisation de la symétrie orthogonale dans les activités de géométrie dans l'espace proposées en première année. La géométrie dans l'espace semble occuper dans les programmes japonais une place privilégiée, plus importante que dans les programmes français. L'un des objectifs des programmes japonais de la première année de l'école moyenne est de développer chez les élèves une manière intuitive d'observer les figures géométriques de l'espace, par la manipulation et les mesures de ces figures. Plus précisément, ce programme comporte :

- construction de figures de l'espace obtenues par «mouvement» de figures planes,
- section, projection, développement de figures de l'espace.

La géométrie dans l'espace apparaît dans les programmes français des classes de 5ème de collège, mais, le plus souvent, elle n'est effectivement enseignée qu'en classe de 5ème. D'autre part, le nombre et la diversité des activités de géométrie dans l'espace dans les classes françaises sont moindres.

Le type d'enseignement est sans doute l'une des raisons de ce phénomène, mais nous pensons que des variables de type culturel interviennent également. Des activités telles que les origami (pliage de papier) et la calligraphie jouent probablement un rôle non négligeable : ces pistes restent à explorer.

NOTES.

(1) 2 000 caractères kanji environ sont acquis au cours de la scolarité obligatoire et il faut en connaître environ 3 000 pour lire un journal.

(2) L'école élémentaire s'adresse aux élèves de 6 à 11 ans en France, de 6 à 12 ans au Japon, l'école moyenne s'adresse aux élèves de 11 à 15 ans en France (collège), de 12 à 15 ans au Japon.

(3) Cette consigne écrite avait déjà été utilisée pour la première expérimentation, en particulier pour les élèves de 10 ans qui n'avaient pas reçu d'enseignement de la symétrie orthogonale.

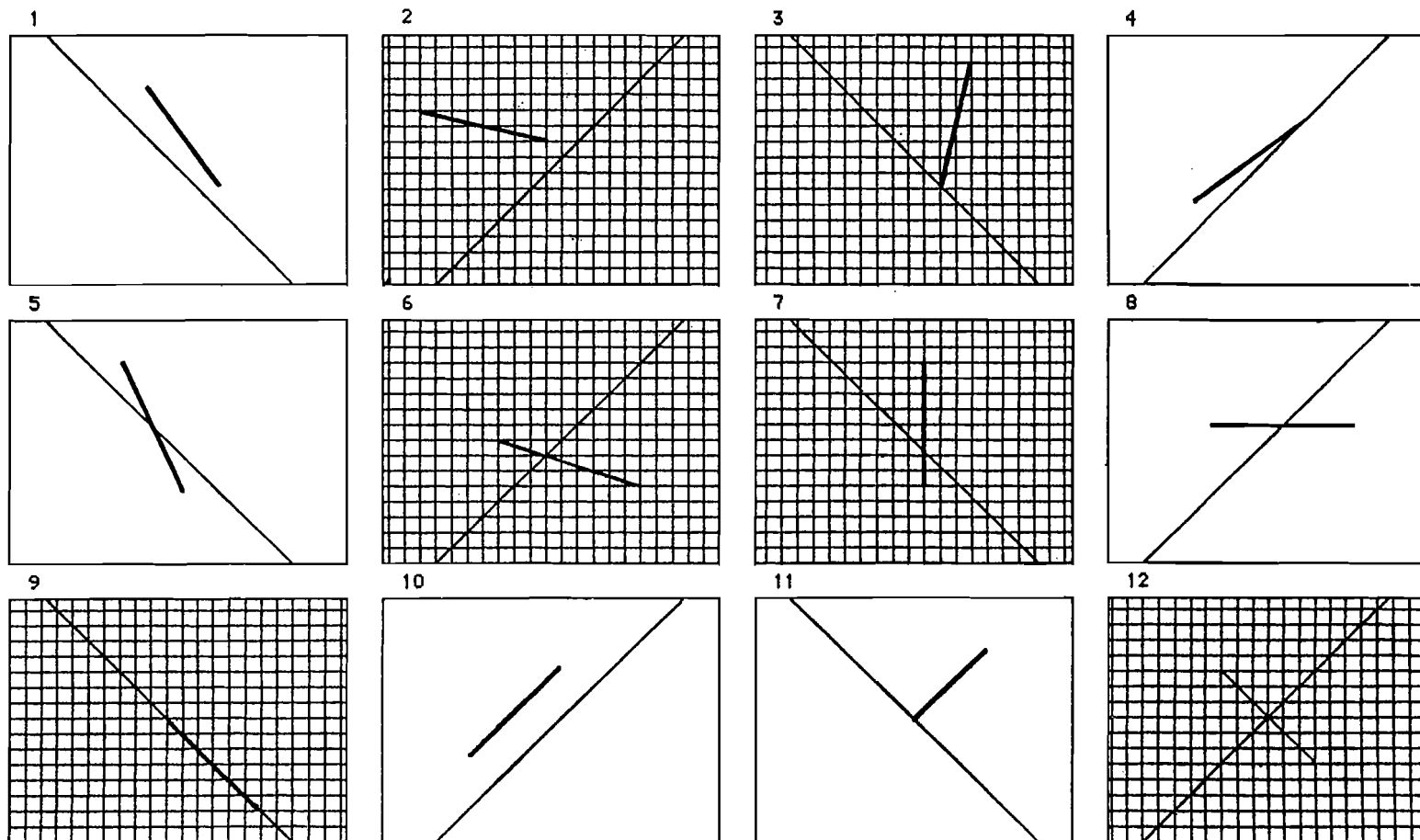
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.

- A. BERQUE (1982). Vivre l'espace au Japon. **P.U.F., Paris.**
- B. DENYS (1985). The teaching of reflection in France and in Japan. Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Noordwijkerhout.
- R. GRAS (1983). Instrumentation de notions mathématiques. Un exemple : la symétrie. **petit x, n° 1, I.R.E.M. de Grenoble.**
- D. GRENIER (1985a). Quelques aspects de la symétrie orthogonale pour des élèves de classes de 4ème et 3ème. **petit x, n° 7, I.R.E.M. de Grenoble.**
- D. GRENIER (1985b). Conceptions des élèves de collèges à propos de la symétrie orthogonale. **Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique, I.M.A. Grenoble.**
- K.M. HART (1981). Children's understanding of mathematics : 11-16 (in ch. 10, reflections and rotation by D. Küchemann), **John Murray Publishers, London.**
- M. MAUVIEL (1984). Les français et la diversité culturelle. **Education Permanente 75, p. 67-82, Paris.**
- M. MAUVIEL (1984). L'idée de culture et de pluralisme culturel. Aspects historiques, conceptuels et comparatifs. **Thèse de 3ème cycle . Université de Paris V.**

Symétrie orthogonale : des élèves français et japonais
face à une même tâche de construction

Bernadette Denys
Denis Grenier

Les douze items de l'expérimentation



Les principaux types d'erreurs

