RUPTURES DANS LE STATUT MATHEMATIQUE DES NOMBRES NEGATIFS[1]

Gert SCHUBRING
IDM, Université de Bielefeld

INTRODUCTION.

Les nombres négatifs constituent un exemple instructif pour les processus de développement des concepts mathématiques. A partir de notions empiriques, bien adaptées à la pratique de la vie quotidienne, se sont formés des concepts théoriques où on ne remarque plus une connection avec les débuts historiques et qui constituent des outils scientifiques importants. Mais ces concepts présentent de grandes difficultés d'apprentissage. Comme on le sait, alors qu'il est possible de représenter les nombres naturels par des objets ou des modèles empiriques, les nombres négatifs n'«existent» pas, dans le même sens, dans la vie quotidienne. Ainsi la didactique ne peut ignorer le caractère **théorique** de cette notion mathématique dont presque toute la jeunesse scolaire doit maintenant faire l'apprentissage. Les nombres négatifs présentent donc un défi à la didactique. Comment envisager le passage des **grandeurs** aux **nombres** dans le processus d'apprentissage scolaire ?

En parcourant quelques publications récentes sur l'apprentissage des nombres négatifs, il m'a semblé que la didactique obscurcit plus ou moins systématiquement la présence d'un obstacle à vaincre. J'ai remarqué deux tendances pour tourner la difficulté : — l'une nie le caractère théorique du concept de nombre négatif et réduit ce concept à des notions empiriques, directement accessibles à l'expérience quotidienne — l'autre ne parle que de grandeurs quand il s'agit de l'école élémentaire et suppose l'existence des nombres négatifs à partir de l'école secondaire : ainsi, on identifie le passage des notions concrètes aux notions abstraites soit avec la ségrégation scolaire soit avec l'atteinte d'une certaine «maturité d'esprit» et en tous cas avec des conditions vraiment externes au processus didactique.

Parmi les publications récentes[2], un cas révélateur pour la liaison de ces deux tendances est un article par G. Bélanger (1984) : l'auteur refuse que l'introduction des nombres négatifs soit reportée aux classes du secondaire — comme on le

«petit x» n° 12 pp. 5 à 32. 1986

recommande dans le programme de son pays (le Canada), à cause du concept mathématique assez exigeant (des classes d'équivalence), nécessaire pour justifier la nouvelle opération — et soutient leur enseignement dès l'école primaire, mais en s'appuyant sur un réductionnisme qu'il exprime bien dans l'énoncé de son objectif majeur :

> «Permettre aux élèves de prendre conscience de **l'existence** des nombres entiers relatifs **dans la vie** et d'en comprendre l'utilité» (p. 7 ; ital. par moi, G.S.).

Que dit la recherche en didactique sur l'histoire des nombres négatifs ? Glaeser (1981) a été le premier, à ma connaissance, à étudier la réfutation des nombres négatifs comme un problème non de la «pré»-histoire mais comme un problème d'une actualité assez récente : et pour la mathématique et pour la didactique[3]. Bien qu'il remarque des ruptures qui sont apparues dans le développement historique, Glaeser s'étonne de constater que la règle des signes (sur laquelle il centre son étude) ait pu poser de telles difficultés aux mathématiques et aux didacticiens.

J'aborderai ce sujet sous un autre angle : celui de controverses historiques autour de l'**existence** des nombres négatifs. J'essaierai aussi de mettre en évidence les enracinements culturels des épistémologies sous-jacentes à chaque position, afin de mieux cerner la nature même des ruptures qui sont en cause

En effet, dans cette histoire, ce n'est pas tant la règle des signes que l'existence même des nombres négatifs qui pose un problème, que ce soit en mathématique ou en didactique[4]. Par contre, la règle des signes a toujours constitué un obstacle manifeste pour les élèves. S'il en est ainsi c'est sans doute parce que les enseignants **ont longtemps essayé (et qu'ils essaient encore) de démontrer** cette règle. Rappelons que ce n'est que vers la fin du 19ème siècle que la didactique a réalisé, à partir du «principe de permanence» de H. Hankel[5], qu'on ne peut pas prouver cette règle et qu'elle n'est rien d'autre qu'une convention.

Il importe d'illustrer brièvement la pertinence de l'histoire des nombres négatifs en France en rappelant quelques faits de cette histoire. D'abord, le nom même de **nombres relatifs**, qui est employé pour l'ensemble des nombres positifs et négatifs, renvoie à L. Carnot et à sa réfutation du statut mathématique des nombres négatifs. Position à laquelle s'est rallié, presque unanimement, l'ensemble du public français. Par ailleurs, F.C. Busset (1843)[6], se plaignant de l'échec de l'enseignement mathématique en France et de la marginalisation des mathématiques dans la culture, en trouve toutes les causes réunies en une seule : l'admission de l'existence des quantités négatives. Il est même choqué de ce que l'on discute de savoir «s'il existe des **quantités plus petites que rien** !»[7]. Ainsi, dans le but d'améliorer l'enseignement des mathématiques et les manuels, Busset préconise de réviser la «théorie des nombres» et plus précisément tout ce qui touche à l'opération de soustraction. On trouve, dans le livre de Busset, l'énoncé d'un critère de qualité pour la rédaction des manuels :

«Les traités de la science... (ne doivent pas être) en désaccord avec les notions communes» (Busset 1843, p. 47). En somme, au lieu d'élever la culture générale, réduire les concepts théoriques aux notions de la vie pratique. Voilà une expression sans équivoque du réductionnisme dont il a été question plus haut.

Mon hypothèse principale est que les controverses autour de l'existence des nombres négatifs s'expliquent surtout par l'obstacle qu'il y a à passer de la notion de grandeur, qui est de nature substantielle (voir plus loin), à celle de nombre, qui est essentiellement théorique[8]. J'utilise ici la relation grandeur-nombre pour révéler les raisons épistémologiques de la réfutation de l'existence des nombres négatifs.

J'ai analysé le développement des conceptions sur les nombres négatifs après le 17ème siècle, l'époque d'acceptation de ces nombres dans les mathématiques (selon les assertions de l'historiographie). J'ai mené l'analyse comme comparaison de l'Angleterre, la France et l'Allemagne (les trois pays européens avec les plus grandes communautés mathématiques), en utilisant un très grand nombre de documents : des monographies de recherche mathématique, des traités sur la philosophie des mathématiques, des traités historiques, des sources archivales, des réflexions didactiques, mais surtout des manuels. En ce qui concerne les manuels, j'étais soucieux de ne pas me restreindre aux parties traitant explicitement les nombres négatifs mais de considérer aussi les parties renfermant leurs «applications», en analysant les manuels d'arithmétique, d'algèbre, de géométrie analytique, de trigonométrie etc., dont je ne peux citer ici que quelques ouvrages paradigmatiques. Je ne peux expliquer ici le problème assez complexe d'analyser un si grand nombre des manuels et je renvoie aux publications (Schubring 1986b, 1987). J'indique seulement que j'ai choisi pour la France comme des données de base les manuels d'arithmétique et d'algèbre adoptés pour les écoles secondaires entre 1795 et 1845. Dans le cadre de cet article je ne peux présenter le cas anglais (voir pour une présentation d'introduction la thèse de Pycior 1976, pp. 42-85) et je me restreins à présenter la discussion en France et en Allemagne sur la nature des nombres négatifs, à partir du milieu du 18ème siècle jusqu'au milieu du 19ème siècle, et les diverses causes de la réfutation de ces nombres. Je commence par un bref rappel de l'histoire, mathématique, de ces nombres.

UNE COURTE HISTOIRE DES NOMBRES NEGATIFS, DE LEURS ORIGINES AU 18ème SIECLE[9].

On trouve dans l'Antiquité et dans le Moyen Age oriental des approches différentes et une même résistance face aux nombres négatifs.

Chez les Grecs, Diophante parle de quantités soustraites et il explique la règle des signes. Mais en même temps il n'admet pas les équations telles que $4 = 4x + 20$ parce que leur solution est «absurde».

En Inde, Bhaskara II, au 12ème siècle, dit d'une équation du second degré telle que

$$\left(\frac{x}{5} - 3\right)^2 + 1 = x, \quad x_1 = 50, \quad x_2 = 5$$

qu'elle n'est «pas consistante» parce que les gens n'acceptent pas de considérer les nombres négatifs absolus comme -3. Les nombres positifs sont appelés «propriétés» ou «biens» alors que les nombres négatifs sont nommés «dettes» ; une valeur négative pour une partie d'une droite est associée à sa direction opposée.

Les mathématiciens chinois utilisaient les quantités négatives comme moyens intermédiaires dans leur calcul pour résoudre des problèmes, mais ces quantités n'étaient pas admises comme des solutions.

Chez les Arabes, non plus, on n'admet pas les quantités négatives ; ou plutôt, les mathématiciens choisissent, dans l'algèbre indéterminée, les constantes qui garantissent l'obtention exclusive de solutions positives.

Dans l'Europe du Moyen Age, les nombres négatifs pouvaient apparaître dans des systèmes d'équations linéaires. Ainsi dans son **Liber Abaci** Léonard de Pise considère l'éventualité d'une solution négative mais il la rejette comme non valable. Par contre, il utilise des valeurs intermédiaires négatives qu'il interprète comme des dettes. En somme, il n'admet que les problèmes dans lesquels il est possible d'interpréter les valeurs négatives comme quelque chose de positif.

Un manuscrit en provençal, datant d'environ 1430 et récemment découvert, est le premier texte connu dans lequel un résultat négatif est admis sans réserves : il s'agit de la résolution d'un problème parmi un système de cinq équations linéaires ; pour l'une des variables, le texte propose comme solution $-10^{3/4}$ (voir Sesiano 1984).

De son côté, Nicolas Chuquet (également français) admet des solutions négatives à des problèmes abstraits (c'est-à-dire comprenant de purs nombres et pas de grandeurs) où une valeur est considérée comme solution dans la mesure où elle satisfait l'équation. Plus encore, il élabore même des procédures pour additionner et pour soustraire de tels nombres[10].

Je passe au 18ème siècle pour donner quelques indications sur l'état le plus avancé de la science de l'époque, comme point de départ des analyses que je développerai ensuite. Le célèbre manuel d'Euler, composé en 1766, nous fournit un modèle de l'admission pour les nombres négatifs d'un statut d'êtres mathématiques véritables. Ici, la soustraction n'est pas restreinte au seul cas où le nombre à soustraire est plus petit que celui dont il est soustrait ; Euler affirme sans réserve que $25 - 40 = -15$ et que les nombres négatifs sont plus petits que zéro («Nichts»). Il considère même les deux séries

$$0, 1, 2, 3, 4, \ldots$$
$$\ldots, -4, -3, -2, -1, 0$$

pour les réunir sous un seul et même concept, celui de **nombres entiers** (Euler 1940, pp. 19 ss). Euler définit aussi les quatre opérations sur ces nombres. S'il utilise l'interprétation des quantités comme des biens ou des dettes, c'est dans le seul but de fournir une motivation au calcul fait avec les nombres entiers. Ces quantités concrètes ne servent pas de justification ontologique, chez Euler.

LE STATUT DES NOMBRES NEGATIFS, EN FRANCE, DE 1750 A 1850.

Dans les manuels français de la deuxième moitié du 18ème siècle, le calcul sur les quantités négatives est bien exposé, mais les nombres négatifs conservent quand même un statut quelque peu ambigu. L'exemple de l'Encyclopédie en est révélateur.

D'une part, il y a l'article «négatif» par d'Alembert. D'Alembert avait ailleurs critiqué que la théorie des quantités négatives ne soit pas encore parfaitement éclaircie. Il reprochait aux auteurs de manuels d'avoir regardé les quantités négatives «les uns comme au-dessous de rien ; notion absurde en elle-même[11] ; les autres comme exprimant des dettes ; notion trop bornée, et par cela seule peu exacte» (cité par Condillac 1981, p. 299). Par contre, il n'admet les quantités négatives que comme de fausses positions qui doivent être traduites par des quantités positives :

> «Ainsi les quantités négatives indiquent réellement dans le calcul des quantités positives, mais qu'on a supposées dans une fausse position. Le signe – que l'on trouve avant une quantité sert à redresser et à corriger une erreur que l'on a faite dans l'hypothèse... Il n'y a donc point réellement et absolument de quantité **négative** isolée : -3 pris abstraitement ne présente à l'esprit aucune idée ; mais si je dis qu'un homme a donné à un autre -3 écus, cela veut dire en langage intelligible, qu'il lui a ôté 3 écus» (Encyclopédie, v. 11, p. 73).

Cette conception persistera au 19ème siècle, où on la retrouve* sous les plumes de Bezout, Lacroix, Bourdon, et d'autres.

D'autre part, on trouve également dans l'Encyclopédie une acceptation des quantités négatives au même titre que les positives, les deux servant de notions fondamentales à l'algèbre. Ainsi l'article «Quantités (en terme d'algèbre)» explique :

*NdlR : on en trouvera un bon exemple avec l'extrait de l'algèbre de Tombeck (1878) reproduit dans le «Musée de petit x», numéro 3, 1983.

«Les quantités algébriques sont ou positives ou négatives. On appelle **quantité positive** celle qui est au-dessus de zéro, et qui est précédée, ou que l'on suppose d'être précédée du signe +,... **Quantités négatives** sont celles qui sont regardées comme moindres que rien, et qui sont précédées du signe -» (ibid. vol. 13, p. 655).

On peut supposer que l'auteur de cet article, l'abbé de la Chapelle, qui était professeur de philosophie, a enseigné les mathématiques selon cette conception dans ses classes de philosophie des collèges. En fait, il y a au moins un manuel de mathématiques, qui a été utilisé dans les classes de philosophie (où ont lieu les seuls cours de mathématiques alors offerts dans les universités françaises) dans lequel on admet les quantités négatives :

«Les quantités précédées du signe + sont appelées **positives** ; celles qui sont précédées du signe - sont dites **négatives** : elles ne sont pas moins réelles que les positives ; mais elles sont prises dans un sens opposé» (Sauri 1772, p. 39).

On remarquera le défaut dans cette définition : peut-être pour éviter l'allusion au «rien», il manque toute référence aux valeurs absolues. La définition ne portant que sur le signe, elle ne permet pas de décider de la valeur, positive ou négative, d'une quantité.

On a oublié qu'un essai d'éclaircissement des fondements des nombres négatifs, et de réfutation de la critique de d'Alembert, a été entrepris en France à cette époque ; mais en fait, c'est dans le célèbre ouvrage de Condillac «La Langue des Calculs», que l'on trouve un effort pour établir une théorie des nombres négatifs.

Condillac (pour qui l'algèbre constitue le fondement des mathématiques) développe, dans «La Langue des Calculs», une théorie des abstractions **successives**, à partir des notions empiriques, et une hiérarchie des étapes d'abstraction et de théorisation. En outre, il explique les liens entre les différentes étapes avec l'aide de sa conception d'**analogie** (donc la première formulation du «principe de permanence» (Hankel)). Ce qui constitue le progrès réalisé par Condillac est qu'il découvre le passage des quantités/grandeurs aux nombres comme le point décisif. On trouve donc chez Condillac, pour la première fois, une théorie génétique de la naissance du concept du nombre. Bien entendu, Condillac n'a pas entrepris d'études, soit historiques, soit expérimentales, sur la génèse du concept du nombre. Il ne s'agit que d'une reconstruction «rationnelle». Voyons de plus près comment il conçoit les nombres négatifs dans sa vision «opérationnaliste». Selon Condillac il y a eu quatre étapes dans le processus de formation du concept du nombre :

1. Le premier calcul effectué est le calcul avec les **doigts**. On énumère avec les doigts pour se représenter une suite d'unités (grandeurs). De ce premier calcul empirique avec grandeurs sont issues les quatre opérations de base. Par exemple,

l'opération qui «défait ce que l'addition a fait, est ce qu'on nomme **soustraction**» (Condillac 1981, p. 14). La notion est ainsi restreinte par ce premier type de calcul.

2. La deuxième étape est caractérisée par le passage aux **noms**. L'emploi des noms ouvre de nouveaux domaines au calcul mais, par-dessus tout, le passage des doigts aux noms est une condition nécessaire à l'apparition de l'algèbre ; parce que ce passage conduit à un autre passage : celui des grandeurs aux nombres abstraits : Condillac insiste très explicitement sur ce passage qui comporte un changement de statut du concept en même temps qu'une réduction de la dépendance des concepts aux substances du monde réel :

> «Ces idées que nous nous sommes faites avec les doigts, l'analogie nous les fait donc appliquer à des cailloux, à des arbres, à des hommes ; et parce que nous pouvons les **appliquer à tous les objets de l'univers, nous disons qu'elles sont générales, c'est-à-dire, applicables à tout**. Mais, lorsque nous nous bornons à les considérer applicables à tout, nous ne les appliquons **à aucune chose en particulier**, nous les considérons en elles-mêmes, et nous les **séparons** de tous les objets auxquels on peut les appliquer» (ibid., p. 48-49 ; ital. par moi, G.S.).

3. La troisième étape comprend l'invention de **signes**. Calculer avec des grands noms nécessite des signes simples. Ceci est réalisé par l'invention de caractères pour la numération, c'est-à-dire, par l'invention des chiffres (qui est à l'origine de l'**arithmétique**). Condillac distingue nettement entre les opérations sur des grandeurs (idées) et les opérations sur des nombres (signes), (voir ibid. p. 223).

4. Dans la dernière étape, se trouve la caractéristique de ce que sera l'algèbre : les opérations sur les **quantités littérales**. C'est ce passage des chiffres aux lettres qui rend possible l'émergence du concept de nombre abstrait. Condillac insiste sur le fait que les opérations impliquant ce concept théorique exigent une redéfinition des opérations ou, dans la terminologie qui lui est propre, suppose une révision de la **grammaire** nécessaire : «Ce dialecte (l'algèbre) a des règles qu'il faut connoître, et c'est une **nouvelle** grammaire à apprendre» (ibid., p. 275).

C'est justement dans le contexte de cette dernière étape que Condillac analyse les nombres négatifs, comme une **extension** à la notion, plus primitive, de soustraction qu'il redéfinit, à son tour, comme extension à l'**addition** :

> «Une lettre précédée du signe +, **indique** une quantité ajoutée, une addition, et je l'appelle une quantité en plus : lorsqu'elle est précédée du signe –, je l'appelle quantité en moins, puisqu'elle est une quantité soustraite, une soustraction ... Il importe peu que la quantité soit en plus ou en moins : car, en moins comme en plus, elle est une quantité» (ibid., p. 277-278).

Ici Condillac ne cherche pas à réduire les termes théoriques à des termes empiriques. Il insiste sur la **nouveauté** de ces opérations. Ainsi tente-t-il de rédéfinir toutes les opérations en vue de l'algèbre. C'est-à-dire d'élaborer une grammaire consistante qui convienne au «dialecte de l'algèbre» sans pour autant réduire ce «dialecte» à celui de l'arithmétique :

«Donc, à parler proprement, il n'y a point de quantités en moins dans les langues vulgaires, ni en arithmétique. Mais en algèbre, où les signes sont indéterminés, on **ne sauroit prononcer la différence** : on ne peut **que l'indiquer**, et a – b ou b – a est l'unique réponse à celui qui demande celle qui est entre a et b.

...

Tout cela est conséquent et il n'y a de contradiction que dans les mots somme et reste, qui ne sont pas de l'algèbre : mais ce qui est une addition en algèbre est nommé soustraction en arithmétique ;... Lorsqu'on allie ces deux dialectes il n'est donc pas possible de ne pas tomber dans des expressions contradictoires». (ibid., p. 295-296).

Condillac récuse aussi la critique que d'Alembert adresse à la théorie des quantités négatives, et il annonce l'exposé de sa propre conception opérationnelle des nombres négatifs dans son ouvrage : «Nous achèverons d'éclaircir cette théorie, lorsque nous traiterons les équations du second degré» (ibid., p. 300)[(12)]. Or, c'est justement pour le traitement des équations du second degré que les nombres négatifs apparaissent, inévitablement. Malheureusement, Condillac n'a pas achevé cet ouvrage et nous ne disposons d'aucune trace de la suite de ces réflexions sur les opérations et sur les nombres négatifs.

«La Langue des Calculs» (ouvrage posthume paru en 1798) a été vivement discuté en France, tout particulièrement par les Idéologues*. Ces philosophes, bien que la plupart d'entre eux aient été disciples de Condillac, n'ont guère apprécié ce traité. Ils attribuaient à Condillac (à tort à mon avis) l'idée que l'algèbre constitue «la langue» (donc le modèle et la finalité) de toutes les sciences et ils récusèrent, avec beaucoup d'emphase, un rôle méthodologique aussi général de l'algèbre. Personne n'a poursuivi la conception d'une évolution génétique des concepts scientifiques et des différents stades de l'abstraction, les Idéologues placent tous les concepts («les idées») à un seul niveau de théoréticité, de préférence en liaison étroite avec les «sensations», d'une substance empiriste. On trouve un exemple de cette conviction chez Maine de Biran, qui, en 1802, réclama pour l'idéologie la tâche d'«orienter» et de réformer les sciences et tout particulièrement de «nettoyer le champ de l'évidence» (c'est-à-dire la mathématique) de «toutes les obscurités» (Biran 1803 p. 15). Parmi les notions qu'il considérait comme obscures, il mentionna celle de quantité négative :

«L'idéologiste prouvera qu'il n'y a point réellement de **nombres négatifs**» (ibid., p. 22).

*NdlR : Idéologie désigne ici une doctrine philosophique que l'on peut caractériser par la décicion de remplacer la métaphysique traditionnelle par l'étude des idées au moyen d'une analyse scientifique visant à en saisir l'origine et les modes de composition. Ecole de pensée contemporaine de la Révolution et de l'empire elle comptait notamment Destutt de Tracy et Cabanis.

On ne trouve plus, chez Biran, l'idée de différentes étapes dans l'abstraction, ni celle d'une différence entre grandeurs et nombres. Les nombres sont interprétés comme des grandeurs géométriques, «susceptibles d'être construits ou traduits en lignes» (ibid.).

Dans les années du tournant du siècle, on assiste à un changement dans les conceptions des mathématiques chez les philosophes français, surtout en ce qui a trait à leur «architecture» (cf. p. 24). L'algèbre est mise à distance et c'est la géométrie qui est choisie comme fondamentale, devant conférer leur signification immédiate aux signes mathématiques, les mathématiques étant interprétées dans les termes de l'expérience sensible. Ce changement est bien visible dans l'œuvre de Destutt de Tracy, un des plus importants représentants des Idéologues : dans la version préliminaire de ses célèbres «Elemens d'Idéologie» (de l'an IV, resp. VI, 1796/98), il conçoit les mathématiques pures comme étant des conséquences de «deux idées abstraites... l'idée d'unité ; et ... l'idée des figures» (Destutt de Tracy 1798, p. 389-390). Cette conception selon laquelle sont juxtaposées l'algèbre et la géométrie, est supplantée dans la version ultérieure de l'ouvrage par une autre conception qui assure la dominance de la géométrie. Elle est soulignée expressément dans une note à la deuxième édition du premier volume :

> «Une quantité quelconque est donc calculable à proportion qu'elle soit réductible directement ou indirectement en mesures de l'étendue ; car c'est là la propriété des êtres, la plus éminemment mesurable» (Destutt de Tracy 1804, p. 216).

Ce changement de conception épistémologique (qui n'a pas encore été étudié) a été transmis de la philosophie aux mathématiques et y a effectué des changements de «mentalités» et de pratique (mathématique et didactique). Le premier à transmettre ces nouvelles visions épistémologiques aux mathématiques a été Lazare Carnot, d'abord en 1801[(13)], puis sous une forme plus développée en 1803. Carnot fait ainsi un double choix : il est convaincu de la prédominance de la géométrie sur l'algèbre, et il n'admet le statut d'êtres mathématiques que pour les nombres absolus, c'est-à-dire seulement ceux des nombres qui peuvent être reliés à des substances. Ainsi, Carnot ne retient la soustraction que pour l'arithmétique et ne la considère jamais comme opération algébrique. Il tente de remplacer l'algèbre par la géométrie, ou plutôt par un nouveau type de géométrie ; la géométrie des corrélations. Il restreint les opérations algébriques aux cas «exécutables» ; par exemple, l'équation $(a - b) . c = ac - bc$ est restreinte au cas où $a > b$. Il contourne une partie de ces restrictions en transposant l'algèbre en un calcul effectué à partir de lignes orientées :

> «De-là je conclus,... que toute quantité négative isolée est un être de raison, et que celles qu'on rencontre dans le calcul, ne sont que des simples formes algébriques, incapables de représenter aucune quantité réelle et effective. (p. xviij)...

> La géométrie de position est donc, à proprement parler, la doctrine des quantités positives et négatives, ou plutôt le moyen d'y suppléer, car cette doctrine y est entièrement rejetée. (p. 22)...
> Je dirais que la géométrie de position est celle où la notion des quantités positives et négatives isolées, est supplée par celle des quantités directes et inverses». (p. xxxiv) (Carnot 1803).

Il remplace la notion de nombre négatif par celle de corrélation des lignes directes et inverses. Cette substitution a effectué l'acceptation du refus des nombres négatifs et d'une algèbre puissante dans la communauté mathématique et dans le public, à un point tel que tout un chacun a repris les arguments de Carnot sans plus s'en référer à lui. Napoléon lui-même a contribué à répandre l'idée d'opérations restreintes aux cas «exécutables» (voir Schubring 1986a).

En France, rares ont été ceux qui ont contesté la vision de Carnot sur les quantités négatives. Gergonne a été du côté des contestataires, mais son article de 1814, dans lequel il favorise nettement la doctrine des quantités opposées alors en vigueur en Allemagne (et dont il sera question plus loin), affiche plutôt une position timide et défensive. Gergonne est conscient de ce qu'il y a eu une rupture et il parle de l'«ancienne théorie» à laquelle a été «substituée depuis quelques années» «la nouvelle», soutenue le mieux par Carnot (Gergonne 1814, pp. 19-20).

Cette rupture apparaît aussi à travers les différentes éditions des «Elémens d'algèbre» de S.F. Lacroix, un manuel longtemps prédominant parmi ceux adoptés pour les écoles secondaires. Les six premières éditions (1797-1807) empruntent largement au manuel de Bezout et correspondent à la conception ambiguë que l'on trouve dans l'Encyclopédie :

— Lacroix distingue signe de l'opération et signe de la quantité (Lacroix 1800, p. 31),

— il affirme l'existence des nombres négatifs : les quantités «négatives ont donc une existence aussi réelle que les (quantités) positives» (ibid., p. 32),

— les solutions négatives doivent être interprétées comme solutions positives : «toute solution négative... marque que la quantité cherchée doit être prise dans un sens tout opposé à celui dans lequel elle l'a été d'abord» (ibid., p. 33),

— les opérations algébriques ont des caractéristiques que n'ont pas les opérations arithmétiques : «l'extension que les signes généraux employés dans (l'algèbre), donnent aux résultats, ne permet plus leur comparaison exacte avec ceux (de l'arithmétique)... la soustraction de b - a, indiquée algébriquement, n'emporte pas nécessairement l'idée que b surpasse a» (ibid., p. 41-42).

Par contre, à partir de la septième édition (1808) (presque entièrement révisée) on ne trouve plus d'énoncés sur l'existence des quantités négatives ou de réflexions sur les opérations. Ces énoncés sont remplacés par un fréquent recours au mot «absurdité» pour qualifier les solutions négatives. Aussi, ce n'est plus que dans le contexte des systèmes linéaires d'équations que Lacroix entreprend de traiter de quantités négatives et d'établir la règle des signes. Il constate que «la théorie des quantités négatives est à la fois l'une des plus importantes et des plus épineuses de l'algèbre» (Lacroix 1808, p. 91-92). Il dénonce toute solution sous la forme d'une quantité négative isolée comme «absurdité», pour deux raisons :

La première raison apparaît au cours d'un problème où il s'agit de résoudre un système linéaire de deux équations : Lacroix constate que pour l'une des équations, $60 + 7y = 46$:

«La seule inspection de cette équation y fait reconnaître une absurdité. En effet, il n'est pas possible de former le nombre 46 en ajoutant quelque chose au nombre 60, qui seul surpasse déjà 46» (ibid., p. 86).

Au terme d'une longue discussion et après avoir substitué aux équations données d'autres équations «pour que le troisième problème proposé soit possible» — mais toujours semblant opérer sur des nombres abstraits — Lacroix obtient la solution «$x = 5^{fr}$, $y = 2^{fr}$», en ajoutant tout à coup les désignations de nombres concrets (ibid., p. 88). Voilà donc l'une des raisons de l'absurdité des quantités négatives : il s'agit, en réalité, de «choses», de grandeurs (de francs, en l'occurrence) et il ne peut y avoir de séparation entre les grandeurs et les nombres abstraits.

La deuxième raison vient de la restriction stricte de l'opération de soustraction au cas du «reste» positif ou zéro (ibid., p. 92).

Mais d'autre part, Lacroix sent bien qu'il ne peut maintenir ce rigorisme dans la pratique mathématique. Ainsi, il introduit un tout autre critère (la consistance interne) sans toutefois se rendre compte de cet éclectisme et de l'incompatibilité entre les deux points de vue qu'il soutient :

«L'Algèbre dispense de toute recherche à cet égard (sc. : de rectifier l'énoncé de la question), lorsqu'on sait opérer convenablement sur les expressions affectées du signe - ; car ces expressions étant déduites des équations du problème, doivent satisfaire à ces équations : c'est-à-dire, qu'en les soumettant aux opérations indiquées dans l'équation, on doit trouver, pour le premier membre, une valeur égale à celle du second» (ibid., p. 88).

Pour les équations du second degré Lacroix maintient l'approche «substantialiste» qu'il avait adoptée pour celles du premier degré : si l'on obtient deux solutions négatives, on doit alors «modifier l'énoncé de la question pour en ôter l'absurdité» (p. 100, voir p. 168) ; s'il y a des solutions mixtes, la solution négative n'est en fait que la solution d'une autre question (p. 175).

Dans le chapitre «Théorie générale des équations», Lacroix ne relâche ses exigences que pour les équations de degrés supérieurs (matière que couvre le dernier tiers du manuel et qui est apparemment destinée à un niveau supérieur de l'enseignement). C'est là qu'il applique (sans même en prévenir le lecteur) le critère de satisfaction interne (ex. pp. 306-307).

La réfutation des nombres négatifs ne s'est pas limitée à l'enseignement et surtout pas au seul enseignement des écoles secondaires mais elle a englobé aussi l'enseignement scientifique supérieur(14)

Je n'ai pas analysé systématiquement les manuels français de la deuxième moitié du 19ème siècle mais, selon J. Itard, c'est Carlo Bourlet qui, le premier, en 1896, introduisit dans un manuel, «en tête de l'algèbre (l'exposé complet) de la théorie des nombres négatifs» (Itard 1984, p. 356)(15).

EN ALLEMAGNE.

A l'opposé de la France, l'Allemagne n'a pas connu ce rejet du statut mathématique des nombres négatifs, du moins pas jusqu'aux années 1820. Ce qu'on y voit plutôt c'est, dès le milieu du 18ème siècle, la mise en place d'un cadre théorique pour justifier les opérations algébriques sur tous les entiers : c'est la «doctrine des quantités opposées». Par ailleurs, ni cette théorie, ni la notion de «quantités opposées» n'ont été retenues ni même (à ma connaissance) discutées en France(16). Voyons brièvement de quelles façons les manuels allemands ont présenté les nombres négatifs.

A.G. Kästner (1719-1800), professeur de mathématiques à l'Université de Göttingen, est l'auteur d'une série de manuels destinés à l'enseignement universitaire qui ont connu un grand succès et ont beaucoup influencé l'enseignement des mathématiques durant toute la deuxième moitié du 18ème siècle en Allemagne. Le premier ouvrage de cette série (1755), portant sur les éléments d'arithmétique et de géométrie, développe (**avant** de traiter l'opération de soustraction) le concept de quantités opposées, en empruntant sa terminologie à la logique. «On appelle quantités opposées telles quantités de la même espèce, qu'on peut considérer dans de telles conditions que l'une diminue l'autre» (Kästner 1792, p. 71). L'auteur donne, comme exemples, les biens et les dettes ; il appelle l'une de ces quantités «positive» ou «affirmative», et son opposée «négative» ou «niante», tout en soulignant que le choix de départ est tout à fait arbitraire. Quant aux relations entre ces quantités, il précise que la quantité niante peut surpasser l'affirmative, et que ce «négatif» qui en reste est une quantité réelle («wirkliche Größe»). La niante est opposée à celle que l'on décide de considérer comme positive (ibid., p. 72). Dans les chapitres suivants, Kästner développe tout son calcul arithmétique avec des quantités opposées.

Cet exposé est repris par le célèbre philosophe I. Kant, dans son «Essai d'introduire les quantités négatives dans la philosophie» (1763), pour justifier philosophiquement la doctrine des quantités opposées. Kant y donne, comme exemples de différenciation indispensable, la contradiction **logique** (A et non-A ne sont pas vrais en même temps) et la contradiction réelle dans laquelle les déterminations se nient («aufheben»)(17) mutuellement, c'est-à-dire donnent comme résultat rien/zéro. Ainsi, la différenciation a-t-elle pour conséquence la différenciation entre le rien absolu (ou concept philosophique) et le rien relatif (dont le zéro mathématique), et l'admissibilité des quantités «moindres que rien».

Les exemples de cas où l'on adopte la doctrine des quantités opposées en Allemagne abondent. Pour n'en citer qu'un, qui provient de la culture protestante, et qu'un qui provient de la culture catholique, je parlerai brièvement du manuel de J.G.E. Maaβ et de celui de A. Metz.

Pour Maaβ, professeur de philosophie et de mathématiques à l'université protestante de Halle, la notion d'«opposition» est fondamentale et il l'introduit au début de son traité (1796) avant même d'aborder les opérations arithmétiques. Il pose cette notion comme conséquence de la logique et de sa théorie des relations. Eu égard à la qualité, il y a deux relations distinctes entre les nombres, unanimité et opposition. Selon Maaβ, deux quantités sont opposées quand elles se «nient» («sich aufheben») si on les unit. (On appelle alors **positives** celle des quantités opposées qu'on considère comme «niée» et **négative** celle qu'on considère comme «niante». Maaβ définit et pratique sans restriction particulière toutes les opérations sur les **nombres** négatifs (qui ne sont donc pas des grandeurs).

A. Metz, professeur de philosophie à l'université, catholique, de Würzburg, part aussi des nombres entiers et développe le calcul sur les nombres négatifs après avoir exposé la doctrine logique sur la notion d'opposition. Il y affirme entre autre, qu'on peut comparer les quantités négatives à une série ordonnée : «Suivant cette conception il est maintenant aisé de comprendre que $-7 < -3$» (Metz 1804, p. 53). Notons que cette proposition aurait été tout à fait incompréhensible dans la France contemporaine !

Parallèlement à la production de manuels, il s'est développé en Allemagne, à partir de la fin du 18ème siècle, une réflexion méthodologique et didactique qui ambitionnait de préciser la doctrine des quantités opposées et, de là, le calcul sur les nombres négatifs. Voici quelques éléments de cette réflexion présente dans de nombreux articles et monographies.

L'une des premières publications consacrées à cette réflexion théorique est un article de G.S. Klügel (1739-1812), professeur de mathématiques à Halle, connu surtout pour ses contributions aux fondements des mathématiques et pour ses travaux de vulgarisation. Cet article contient, à mon avis, la description la plus précise qui soit du refus d'exploiter à fond toute la richesse des outils algébriques : on n'y trouve qu'une algèbre, assez limitée, qui n'est guère plus qu'une géométrie élémentaire transposée. Klügel remarque qu'on ne connaît pas les quantités opposées dans «la mathématique des Anciens et dans celle moderne qui est traitée selon leur méthodes» parce que, dans ces deux cas, les mathématiques sont considérées du point de vue de la «méthode synthétique»[18]. Or, la méthode synthétique ne reconnaît que les cas isolés ; même là où la méthode analytique réunit plusieurs cas apparentés par le truchement d'une seule formule, la méthode synthétique aborde chaque cas séparément. Tandis que la méthode analytique utilise la symbolisation des quantités, par des signes, et tire profit, pour la résolution des problèmes, de la généralisation que procurent les relations entre les signes, la méthode synthétique doit toujours chercher, pour chaque problème une voie de solution particulière. En fait, avec la méthode synthétique, on n'a pas besoin de quantités négatives, parce qu'on peut toujours trouver, pour un cas isolé, les moyens d'éviter une solution négative, (Klügel 1795, p. 311 ss). Klügel met donc en garde les «analystes allemands» contre cette méthode (ibid., p. 471) que pratiquent et propagent les anglais, à l'imitation des anciens (ibid., p. 316).

Klügel avait d'autant plus raison de faire cette mise en garde que la rupture que l'on observe, en France, quelques années plus tard, semble attribuable à une «transmission» de la méthode anglaise (au même moment que la «transfusion» de la philosophie anglaise de «common sens», une des raisons de l'ascension du spiritualisme et de la chute de la philosophie des Lumières, voir Schubring 1984, p. 372). En fait, à l'approche synthétique correspond une mathématique tout à fait différente de celle qui a l'arithmétique et l'algèbre comme double fondement : la mathématique synthétique est une «mathématique de problèmes» dans laquelle on ne s'intéresse pas aux structures.

P.J. Hecker, professeur de mathématiques à l'université de Rostock, qui discute l'enseignement de la doctrine des quantités opposées dans trois dissertations en 1799 et 1800, est le premier à envisager une véritable révision des éléments d'arithmétique : il démontre que les opérations mathématiques changent de signification quand on passe des opérations sur des nombres positifs aux opérations sur des entiers, et qu'on doit redéfinir ces opérations, savoir les étendre, pour les rendre applicables à tous les entiers (Hecker 1799, pp. 9-12). Il est aussi le premier à découvrir les différences entre les opérations sur des nombres ou sur des grandeurs, et les opérations mixtes (par exemple, la multiplication et la division des grandeurs avec des nombres, ibid., pp. 16-17).

H.D. Wilckens, professeur de mathématiques dans une académie forestière, approfondit la notion logique d'opposition et introduisit des distinctions très nettes entre le signe d'opération, le signe d'un nombre et la valeur obsolue d'un nombre. Pour exprimer cette différence, il proposa une notation selon laquelle l'opposée d'une quantité a est notée $\bar{a}$ et les quantités opposées se trouvent définies par l'équation $a + \bar{a} = 0$. (Wilckens 1800).

C'est dans le cadre de cette discussion sur les fondements qu'ont été réfutées, en Allemagne, les thèses de Carnot. F.G. Busse, professeur de mathématiques à l'école des mines de Freiberg, publie, dès 1804, une réponse à Carnot. Busse explique que si les signes d'opération n'avaient été conçus, historiquement, qu'à l'usage exclusif des nombres absolus, il convient maintenant de distinguer ces signes d'opération des signes des nombres eux-mêmes. Selon Busse, l'erreur principale de Carnot consiste justement en ce qu'il ne fait pas cette distinction(19). Pour Busse, l'algèbre constitue le fondement des mathématiques alors que la géométrie n'est qu'une sorte d'algèbre appliquée. Les contradictions qui apparaissent dans le domaine de la géométrie n'atteignent donc pas l'algèbre et doivent être résolues en géométrie (Busse 1804).

La réfutation la plus radicale des thèses de Carnot(20) se trouve dans la première présentation vraiment précise d'une théorie des **nombres négatifs, publiée en 1817 et due à W.A. Förstemann, professeur de mathématiques au Gymnasium** de Danzig. A ma connaissance, ce livre est aussi le premier à établir systématiquement une séparation entre quantités et nombres. Il critique la notion de quantité, trop générale, selon lui, et il propose de la remplacer par les deux concepts de grandeur et de nombre. Seuls les nombres constituent la base de l'arithmétique. C'est seulement avec les nombres qu'on peut exécuter les opérations algébriques (donc pas avec les grandeurs) :

> «**Grandeurs** sont : des lignes, des angles, des étendues, des plans, des solides, des poids, des étendues du temps, ensembles des personnes ou des livres. **Nombres** pourtant en sont seulement de expressions du rapport des quantités de la même espèce» (Förstemann 1817, p. 1).

On peut multiplier les nombres et les élever à des puissances mais on ne peut pas faire de même avec des grandeurs. Il n'y a donc pas de quantités (ou grandeurs) négatives, mais il peut y avoir des nombres négatifs(21). Förstemann s'abstient de donner une définition philosophique de l'opposition mais transpose cette notion en des termes mathématiques :

> «Deux nombres sont opposés additivement quand la soustraction de l'un effectue le même résultat que l'addition de l'autre» (ibid., p. 8).

En utilisant $\bar{a}$ comme signe du nombre opposé de a, il parvient à la définition suivante : pour un nombre entier quelconque b, son opposé $\bar{b}$ est donné par l'équation $b + \bar{b} = 0$; la soustraction générale sur des nombres entiers est donc définie par :

$$a - b = a + \bar{b} \quad \text{(ibid., p. 9).}$$

Förstemann établit ensuite, il est ici aussi le premier, les règles du calcul restreint qu'on peut effectuer avec les grandeurs et celles du calcul mixte avec des nombres et des grandeurs (par exemple, la multiplication scalaire).

Malgré cette forte tendance en faveur des nombres négatifs, en Allemagne, les mathématiques allemandes n'ont pas complètement échappé à l'influence de l'épistémologie française et de la réfutation des quantités négatives. Cette importation a donné lieu à des «distorsions cognitives» et à une variété de positions sur la question du négatif. Un exemple éloquent d'une importation directe est celui de la conception de l'algèbre défendue par J.P.W. Stein, ancien élève de l'école polytechnique (promotion 1813), qui avait d'abord travaillé dans le corps des ingénieurs-géographes puis, «rapatrié» de Prusse en 1815, devint professeur de mathématiques au **Gymnasium** de Trèves. Dans son manuel d'algèbre (1828/29), Stein analyse les diverses conceptions des nombres négatifs qui prévalent alors et les regroupe en trois catégories.

1. Les nombres positifs et négatifs sont les désignations de quantités qui existent réellement mais qui ont des qualités opposées.

2. Les quantités négatives et tout ce qui n'est pas un «nombre normal» (i.e. absolu) ne sont que des signes arbitraires qu'ont peut utiliser comme moyens intermédiaires au cours du calcul mais qui doivent plus figurer dans le résultat du calcul.

3. On rejette l'emploi de quantités négatives isolées et on ne les utilise qu'en relation avec des quantités normales, c'est-à-dire comme «indications» d'une opération non exécutable de soustraction, par exemple $a - b$, où $b > a$ (Stein 1828, p. VII).

Stein lui-même est partisan de la deuxième catégorie de positions, qui est typiquement française. Il ne rejette pas seulement l'existence des nombres négatifs, il refuse aussi de considérer «zéro» comme nombre. Il explique assez clairement ce choix épistémologique : il n'utilise les nombres que comme les **représentants** des grandeurs et refuse de leur donner un statut théorique. Stein explique les équations algébriques en termes de grandeurs du «monde physique» (en francs, en mêtres, en dettes, en biens), et surtout à l'aide de grandeurs positives. Il se garde bien d'utiliser la doctrine des quantités opposées, parce qu'elle a pour lui un caractère métaphysique.

La troisième position esquissée par Stein est celle qu'adopte le mathématicien allemand M.Ohm (1792-1872). Bien que L. Novy ait accordé à Ohm un apport original aux fondements de l'algèbre (L. Novy 1973, p. 85-89), on peut dire de lui aussi que sa conception est le résultat d'une transmission des conceptions françaises. Ceci est tout particulièrement marqué par le rôle privilégié qu'il attribue aux nombres, absolus ou naturels. De même, Ohm n'a jamais recours à la doctrine des quantités opposées et l'usage caractéristique de l'expression «opération indiquée» relève les influences de Condillac et de Carnot. Dans la pratique mathématique, la première et la troisième position ne diffèrent pas beaucoup, la troisième n'étant guère plus qu'une «réserve mentale». Néanmoins, cette position s'érige en obstacle au passage des opérations sur les nombres naturels, aux opérations sur les nombres réels.

Il resterait à analyser comment les positions «traditionalistes» allemandes et les positions «importées» de la France ont interagi, en Allemagne, et comment la définition weierstrassienne des nombres négatifs l'a emporté. Je ne peux le faire dans les limites du présent article.

EFFETS DU REJET DES NOMBRES NEGATIFS, LIES A L'ALGEBRE.

Le refus d'accorder un statut mathématique aux nombres négatifs ayant pris une telle ampleur, les controverses n'ont pas pu rester restreintes à l'algèbre. En fait, étudier les effets de ce refus sur le développement mathématique (et didactique) constitue un problème très intéressant pour des recherches historiques mais, en même temps, c'est un problème d'une très grande complexité.

Pour en donner une idée, voici quelques indications : les conséquences du refus des nombres négatifs apparaissent dans toutes les situations où il est question d'appliquer l'algèbre à la géométrie. Fait pas encore remarqué (à ma connaissance), c'est autour de la **trigonométrie** que les luttes les plus acharnées se sont livrées sur l'acceptation (ou le rejet) des nombres négatifs ! Ceci ne devrait avoir rien d'étonnant puisque, en trigonométrie, les nombres négatifs n'interviennent pas seulement au terme d'une résolution quand apparaissent les solutions des équations, mais ils servent à l'exécution de diverses procédures et sont ainsi de véritables instruments mathématiques. Cependant, il ne faudrait pas en conclure que les nombres négatifs se sont imposés comme indispensables en trigonométrie.

Il faut donc des précautions pour ne pas interpréter précipitamment des développements qui nous semblent être «nécessaires». Ainsi, dans les manuels de trigonométrie de la première moitié du 19ème siècle, en France comme en Allemagne, on trouve des planches et des figures mais rarement on voit des figures avec la croix des coordonnées, les quatre quadrants ; et j'ai jamais vu à l'époque dans les manuels français des nombres indiquant les coordonnées sur des axes (on évita donc l'usage effectif des nombres négatifs pour les coordonnées dans deux directions)[22]. Même les formules trigonométriques pour les angles entre 0 et 2π qui, pour nous, requièrent les concepts de fonction et de variable, peuvent être abordées par la méthode synthétique qui traite les quatre quadrants comme autant de cas particuliers.

EFFETS DES CHOIX EPISTEMOLOGIQUES SUR LES MATHEMATIQUES EN GENERAL.

Le rejet des nombres négatifs a aussi eu des répercussions assez importantes sur les mathématiques dans leur ensemble. L'accent mis sur une géométrie **pure**, sans mélange avec l'algèbre, a fait naître un nouveau type de «géométrie synthétique», établie par Carnot, Poncelet et J. Steiner. De plus cette réfutation a donné une singulière impulsion à l'apparition d'une nouvelle discipline mathématique : la géométrie vectorielle. La géométrie traditionnelle s'étant avérée impuissante à traiter les questions de position dans leur généralité. Il y a eu plusieurs tentatives pour introduire et préciser la notion de direction en géométrie, notamment pour interpréter géométriquement les nombres imaginaires. Mourey semble avoir été le premier à introduire le vecteur comme nouveau concept fondamental. Dans un ouvrage de 1828 (réédité en 1861), «dédié aux amis de l'évidence», Mourey (un personnage presque inconnu) introduit la notion de «chemin», devant unifier les deux notions de longueur et de direction en un seul nouveau concept fondamental. Il établit aussi un calcul des opérations sur des chemins. Ce qui est directement pertinent pour notre propos, c'est que Mourey parvint à cette théorie par le biais de sa réfutation des nombres négatifs. Parce que, dans le cas d'un terme indéterminé comme dans x - a ou a - x, on ne peut prévoir si le résultat sera «absurde» ou non, Mourey exclut la soustraction de l'algèbre.

> «Il suit de là que le signe -, considéré comme exprimant la soustraction, ne peut pas être admis en algèbre» (Mourey 1861, p. 1).

L'algèbre étant ainsi trop gravement amputé, Mourey cherche un «moyen de suppléer à la soustraction» (ibid., p. 2) et c'est ainsi qu'il découvre une nouvelle géométrie, la géométrie des chemins. Il est à remarquer que Hermann Grassmann (censé être le découvreur de la géométrie vectorielle) réclama en 1844 que l'essence de sa découverte résidait justement dans la fusion des deux concepts de longueur et de direction en celui de vecteur (H. Grassmann 1844, p. 145-146)[(23)]. De plus, il souligna que la motivation principale de son travail résultait de «la considération du négatif dans la géométrie» (ibid., p. iii). Comme la géométrie vectorielle est à l'origine de l'algèbre linéaire, on peut dire que le refus d'une algébrisation directe a tout de même permis une certaine algébrisation au sein de la géométrie.

RETOUR SUR LA NOTION D'OBSTACLE EPISTEMOLOGIQUE.

Les principales causes de la contestation du statut mathématique des nombres négatifs appartiennent à trois grandes catégories que je définis comme suit :

A. Les obstacles internes aux mathématiques.

Le problème central consiste à différencier le concept de **quantité** et à établir celui de **nombre** comme nouveau concept fondamental et indépendant ; il s'agit donc de l'apparition du triplet : quantité - grandeur - nombre, où :

— **quantité** est, historiquement, le concept de base pour toutes les mathématiques mais, aujourd'hui, «quantité» ne représente plus un concept mathématique concret. Il se réduit plutôt à un élément de rhétorique apparaissant, à l'occasion, dans des discours sur la mathématique[(24)].

— **grandeur** emprunte une partie des significations originelles de «quantité»[(25)], par exemple celle de «nombre concret» ou (dans la traditionnelle terminologie scolaire) «nombres complexes» («benannte Zahlen», comme 5 kilomètres ou 2 francs) et est utilisée, dans les programmes scolaires, comme notion à partir de laquelle sont développés, par abstraction, les «nombres abstraits», donc 5 ou 2 (on peut donc dire que «grandeur» constitue le concept de base pour l'arithmétique scolaire) ;

— **nombre** est le concept central de l'une des parties des mathématiques, l'arithmétique.

Il semble donc qu'en France la différenciation entre quantité et nombre soit apparue assez tard et que l'on ait longtemps utilisé «quantité» comme concept intégrateur, à la fois de l'arithmétique, de l'algèbre et de l'analyse. Ce manque de différenciation a fait obstacle à celle des concepts de variable et de fonction, du concept de quantité, et à leur admission comme concepts de base de l'algèbre et de l'analyse. Une conséquence de l'indifférenciation de «quantité» a été un manque de différenciation explicite entre grandeurs et nombres. Un obstacle particulier était la différenciation entre : valeur absolue d'un nombre, signe d'un nombre et signe d'opération sur des nombres [(26)].

Notons que cette catégorie d'obstacles ne semble pas avoir causé de ruptures, à proprement parler, et qu'elle aurait plutôt contribué aux (lents) progrès marqués par des différenciations conceptuelles.

B. Les obstacles épistémologiques.

C'est une tout autre catégorie, en effet, qui est plutôt responsable des ruptures qui sont apparues. On trouve ici les épistémologies sous-jacentes à la transmission du savoir scientifique à la société en général. Par «épistémologie» on peut comprendre les conceptions entretenues sur les conditions de l'«existence» des entités mathématiques. Ces épistémologies se présentent dans l'alternative suivante :

— une épistémologie substantialiste (ou ontologique) selon laquelle les concepts sont justifiés par une réduction à des êtres auxquels on accorde une existence comme à celle du monde physique ;

— une épistémologie systémique, où l'existence est justifiée par la cohérence du champ conceptuel, les concepts ne devant satisfaire qu'à des conditions **internes** aux mathématiques.

A mon avis, l'option en faveur de l'une ou l'autre de ces épistémologies, dans une culture donnée, relève de conditions sociales (desquelles dépendent aussi le «goût» ou le «dégout» pour les sciences pures) et est ainsi susceptible de changer et de connaître des ruptures.

C. L'architecture des mathématiques.

Il y a une troisième catégorie de causes aux obstacles auxquelles viennent se mêler et interagir des causes internes au développement mathématique et des causes proprement épistémologiques. Il s'agit des conceptions sur l'«architecture des mathématiques» et, tout particulièrement, des conceptions sur le poids relatif de l'algèbre et de la géométrie, eu égard aux fondements des mathématiques. Plusieurs options sont présentées, chacune ayant pour conséquence une différenciation particulière :

— si l'algèbre et la géométrie sont également fondamentales, en droit, on doit alors avoir des notions fondamentales qui puissent servir à la fois en algèbre et en géométrie. Ceci a pour effet d'empêcher une différenciation de la notion de quantité, puisqu'il est supposé que cette notion comprend celle de nombres (comme «quantité discrète») et celle de ligne (comme «quantité continue») ;

— ou, si l'une de ces deux parties domine l'autre :

si donc la géométrie est considérée comme la discipline la plus fondamentale et qu'elle inclut en quelque sorte l'algèbre (c'est la position des Grecs et d'Euclide), alors la quantité sert de notion de base et celle de nombre est dérivée ;

ou si c'est l'algèbre qui est vue comme la discipline fondamentale et si, en retour, la géométrie n'est plus qu'un champ d'application de l'algèbre, alors on a la conception qui sous-tend l'entreprise dite «l'arithmétisation des mathématiques» avec le nombre comme notion de base.

Les questions qui sont posées sur l'architecture des mathématiques sont primordiales, pour la didactique comme pour l'élaboration des programmes d'enseignement, parce qu'elles touchent les problèmes de transposition du savoir scientifique aux «séquences didactiques», suivant un ordre soit «logique», soit «naturel», soit «psychologique». C'est aussi autour de ces questions que se sont exprimées les visions des mathématiques entretenues chez le grand public. Ainsi, il me semble, que c'est cette catégorie qui a réalisé un apport assez déterminant aux cas de ruptures.

Avant de conclure je tiens à faire quelques remarques sur la notion d'obstacle épistémologique, comme explicative de l'apparition de ruptures dans le statut conféré à certains concepts mathématiques. Au début de cette recherche, j'étais convaincu de ce que la notion d'**obstacle épistémologique** était la catégorie explicative adéquate (et j'avoue que cette terminologie est assez séduisante), mais (sans me mêler de la discussion des didacticiens français (voir Brousseau 1983, Glaeser 1984)) après un retour aux sources bachelardiennes (Bachelard 1938/1975) j'ai des doutes sur la possibilité d'appliquer cette notion. Mes doutes ne viennent pas de ce que Bachelard ait exclu la connaissance mathématique du domaine d'application de sa notion d'obstacle épistémologique en disant :

> «L'histoire des mathématiques est une merveille de régularité. Elle connaît des périodes d'arrêt. Elle ne connaît pas des périodes d'erreurs» (Bachelard 1975, p. 22).

A mon avis cette remarque engage une vision trop étroite de l'erreur. Là où la position de Bachelard devient vraiment problématique, c'est qu'elle envisage «la formation de l'esprit scientifique» comme un processus téléologique, c'est-à-dire, dirigé **nécessairement** vers un progrès en théoréticité, vers la victoire ultime de la raison. On y reconnaît la vision rationaliste de la mathématisation supposée nécessaire et souhaitable, des sciences dans leur procès évolutif. De ce point de vue, le processus de formation de l'esprit scientifique se réalise en trois étapes successives (assez analogues à celles de Piaget) : un stade concret, préscientifique, où règnent les phénomènes ; un stade concret-abstrait où l'expérience physique est complétée d'abstractions ; enfin, le stade abstrait proprement dit (identifié à notre époque) où domine la raison théorique. Pour Bachelard, il n'y a pas de rupture dans le progrès de la raison humaine : s'il y a des reculs dans notre époque, ils sont ponctuels et provisoires, ils ne représentent qu'une «somnolence du savoir» chez des individus (ibid., p. 7), et non pas un choix délibéré. Par «obstacles épistémologiques» on peut donc comprendre les expressions de telles «somnolences» individuelles (d'où l'attention que leur porte la didactique).

Mais l'histoire «sociale» des nombres négatifs nous offre des exemples où le choix pour une épistémologie semble avoir été fait (comme décision «collective», pas seulement de quelques individus !) avec une pleine connaissance des épistémologies concurrentes. Pour l'étude de tels cas, on ne peut pas recourir à la notion d'obstacle qui suppose, au contraire, une certaine incapacité, intellectuelle ou autre. Si donc un choix est fait en connaissance des diverses possibilités on ne peut disqualifier l'épistémologie qui sous-tend cette position en l'étiquetant comme «obstacle».

Néanmoins, les réflexions de Bachelard peuvent être utilisées pour clarifier les difficultés dans des développements conceptuels (donc particulièrement dans la première catégorie de causes). Bachelard a bien montré comment la «connaissance générale» et une épistémologie «substantialiste» peuvent s'ériger en obstacles à la connaissance scientifique, dans son stade préscientifique. Par «connaissance générale», Bachelard entend des concepts qui sont «corrects et utiles» mais qui peuvent constituer un obstacle «en offrant à la pensée une forme générale prématurée» (ibid.,

p. 66). Comme exemple, il analyse le concept de fermentation du 18ème siècle comme non différencié et donc non opérationnalisé[27].

Ainsi, la notion de quantité a-t-elle présenté ce même caractère universel, général et intuitif (voir ibid., p. 79) qui empêche la spécification des idées qu'elle recouvre. D'Alembert critique la définition couramment retenue de la «grandeur» (partout ailleurs à son époque prise comme définition de la «quantité») comme trop générale et ne convenant pas à la recherche.

> «Suivant la définition qu'on vient d'apporter, on devrait appeler **grandeur** tout ce qui est susceptible d'augmentation et de diminution ; or la lumière est susceptible d'augmentation et de diminution ; cependant on s'exprimeroit fort improprement en regardant la lumière comme une grandeur» (Encyclopédie, vol. 7, p. 855).

De plus, en parlant d'obstacle «substantialiste», Bachelard analyse toute une série de tendances de la pensée scientifique, où on lie directement à une substance les qualités diverses d'un concept (ibid., pp. 97 ss). Nous avons dans cet article mis en évidence plusieurs argumentations contre l'existence des nombres négatifs qui se nourrissent d'un substantialisme de ce type. Comme, entre autres, l'identification de la géométrie (euclidienne, à trois dimensions) à l'espace de notre expérience sensible qui suppose que la géométrie peut être saisie par l'évidence ou par l'intuition directe.

REMARQUES DE CONCLUSION.

Les conceptions bachelardiennes semblent sous-entendre le développement cognitif et scientifique indépendant des mentalités et des voies spécifiques des nations, comme un invariant culturel. Or, l'étude présentée ici donne des indications sur des dépendances manifestes entre les contextes culturels et nationaux et les épistémologies favorables (resp. défavorables) à certains développements scientifiques. Ces dépendances mettent en garde contre une transposition immédiate d'une certaine étape de l'évolution scientifique au processus d'apprentissage, soit qu'on désigne cette étape comme un «obstacle», soit qu'on le privélégie comme étape nécessaire par chaque individu d'une nouvelle génération.

Cependant, dans le même temps ces dépendances impliquent une responsabilité de la didactique qui doit prendre en compte les épistémologies sous-jacentes et les suppositions parfois implicites de ses propres propos sur l'enseignement.

NOTES.

1. Version rédigée d'un exposé au colloque «Histoire et Epistémologie des Mathématiques», Montpellier 31.5 - 1.6.1985.
Je remercie la bonne fée (elle préfère rester annonyme) qui a entrepris le travail énorme de transposer ce texte en un français compréhensible.

2. D'autres exemples en sont : le numéro 15-3 (mai) 1984 du **Journal for Research in Mathematics Education**. Bien que le numéro soit entièrement consacré aux problèmes de la soustraction, aucun des articles ne discute des nombres négatifs. La thèse de Ph.D. de R.G. Clason (1968) qui étudie beaucoup d'anciens manuels d'arithmétique passe aussi sous silence les nombres négatifs.

3. Entre-temps , il y a eu d'autres études de didactique portant sur l'histoire. Une étude fort intéressante décrit comment les auteurs ont utilisé l'histoire des nombres négatifs pour développer chez des enseignants une certaine sensibilité aux obstacles inhérents à ce concept. Ils ont mis un point particulier sur l'éclaircissement de la nature **conventionnelle** de la «règle des signes». L'histoire des mathématiques semble, selon les auteurs, progresser d'une marche lente mais continue (Arcavi et al., 1982). Un autre article discute les problèmes des nombres négatifs dans l'histoire des mathématiques en relation avec les modèles, actuellement utilisés aux Etats Unis pour enseigner les quatre opérations sur les entiers (Crowley/Dunn 1985).

4. En fait, je ne connais qu'un seul exemple de réfutation de la règle des signes, J. Klostermann (Petersbourg). Associé correspondant de la société royale des sciences de Göttingen, il a établi en 1804 et 1805 le «théorème» suivant : moins multiplié par moins donne moins. Remarquablement il ne réfute pas l'existence des nombres négatifs. Pourtant, il accepte le calcul avec les «quantités opposées». L'erreur principale de sa «démonstration» réside dans le fait qu'il ne distingue pas entre le signe d'opération et le signe du nombre (Klostermann 1804 et 1805).

5. Selon le principe de permanence, il n'y a pas un seul système de lois qui régisse les opérations sur tous les systèmes de nombres mais plutôt une hiérarchie :
L'extension progressive du système des naturels aux systèmes (plus larges) des entiers, rationnels, réels est définie d'une telle manière que l'ensemble des lois en vigueur dans le système inférieur continue d'être en vigueur dans le prochain système supérieur.

6. Ce livre d'un Ingénieur-Topographe et «Géométre-en-chef du Cadastre de la côte-d'Or» n'est que le deuxième traité de didactique de mathématique en France, avec celui de Lacroix, pour toute la première moitié du 19ème siècle !

7. Busset blâme particulièrement Euler, d'avoir «résolu cette question par l'affirmative ! Or, je ne crains pas de le dire, malgré mon respect... pour le génie d'Euler..., cette doctrine est pour moi le comble de l'aberration de la raison humaine, et à elle seule elle suffirait soit pour éloigner de l'étude des mathématiques une foule d'excellents esprits, soit pour accréditer toutes les fausses idées que l'on débite sur ces sciences» (Busset 1843, p. 47).

8. Glaeser mentionne ausssi la dimension épistémologique des rapports des mathématiques avec la réalité physique (Glaeser 1981, p. 339), mais la relation grandeur-nombre ne figure pas dans sa liste d'obstacles (ibid., p. 308).

9. Pour la période allant des origines au Moyen Age, je me suis servi principalement de l'article de J. Sesiano (1985), qui décrit le développement des nombres négatifs durant cette période comme un passage du concret à l'abstrait.

10. Luca Pacioli prend une position ambiguë : on remarque chez lui une réfutation, instinctive, des nombres négatifs cependant il admet une fois un prix négatif dans un problème commercial et une autre fois il considère la solution négative dans un problème abstrait comme un «bellissimo caso».

11. D'Alembert ne distingue donc pas le **zéro** mathématique du **rien** absolu de la philosophie.

12. L'éditeur de la publication posthume avait changé «équation» en «opération». Un changement qui ne fait aucun sens et qui a obscurci les intentions de Condillac.

13 Carnot a très clairement différencié, dans le texte de 1801, la quantité de sa «valeur absolue», la valeur positive, et la valeur négative (Carnot 1801, p. 2). Donc on ne peut pas lui reprocher de n'avoir pas maîtrisé des obstacles, dans le sens d'un manque de connaissances mathématiques.

14. Un exemple éloquent en est un manuel de Francœur, destiné aux élèves de l'Ecole Polytechnique et aux facultés de sciences. Dans le cadre de la résolution des équations, en algèbre, il discute longuement la solution $x = \frac{b-d}{c-a}$ selon les cas : $b > d$ ou $b < d$ et/ou $c > a$ ou $c < a$. Evidemment, il discute de cette question d'algèbre selon la méthode de la géométrie «des anciens» ; considérant des cas tous isolés et indépendants. Enfin, il exclut deux cas comme solutions impossibles parce que : «Toute solution négative dénote une absurdité» (Francœur 1819, vol. 1, p. 149-150). Pareillement révélatrice est la note «sur la théorie des quantités positives et négatives» — assez étendue — du fameux manuel «Cours d'Analyse» de Cauchy (Cauchy 1821, p. 333-359) : elle montre la nécessité, pour Cauchy, de présenter aux élèves de l'Ecole Polytechnique les éléments d'algèbre de manière à ce que les nombres négatifs soient acceptés.

15. Après m'être procuré un exemplaire de ce livre (une procédure d'assez longue durée) j'ai été très surpris de constater qu'avant ce premier chapitre «Nombres positifs et négatifs» il y a comme vraie «tête» un chapitre d'«Introduction» de géométrie. C'est une exposition de la doctrine de segments orientés, ou plutôt des «chemins» (on reprend donc la terminologie de Mourey, voir plus loin). Elle est utilisée comme justification ontologique du concept de nombre négatif. En se référant aux propriétés des chemins (respectivement des segments), on pose les règles du calcul avec le nouveau type de nombres. Il faut ajouter que c'est un des rares manuels où l'on souligne le caractère conventionnel de la règle des signes (Bourlet, 1896, p. 21).

16. On n'a pas remarqué cette différence, jusqu'à présent, dans l'historiographie. Il est donc difficile d'avancer des hypothèses sur les raisons de cette différence manifeste. Cependant, la doctrine des quantités opposées se dérivant des réflexions philosophiques, il me semble qu'il y a eu en Allemagne des débats et des échanges plus étroits et plus fructueux entre mathématiques et philosophie. De plus, il y a des différences profondes entre la philosophie allemande et la philosophie française, qu'on peut caractériser, entre autres, par la méfiance (dans de nombreux courants de philosophie) de systèmes transcendants discrédités, en France, vis-à-vis de leur rattachement au parti catholique-jésuite.

17. Malheureusement, il n'existe pas une traduction adéquate du mot «aufheben» (ce qui est déjà assez indicatif !). Chez Hegel, par exemple, «aufheben» a à la fois le sens de **nier** et celui de **conserver**.

18. Le couple «méthode analytique» — «méthode synthétique», a connu, au cours de l'histoire, une assez grande variété de significations (que j'ai expliquée dans mon exposé de la 3ème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques, juillet 1984, Orléans). Cependant, la signification attribuée ici aux deux méthodes par Klügel a beaucoup d'avantages parce qu'elle nous amène au fond des débats idéologisés sur la «méthode».

19. Cette critique est correcte mais Carnot ne l'acceptera pas comme réfutation parce qu'elle implique l'admissibilité des nombres entiers, tandis que pour Carnot il n'y a que des nombres absolus et la seule signification des signes X et - est que ce sont des signes d'opérations.

20. Une autre réfutation exhaustive se trouve dans le livre de W.A. Diesterweg (1831) qui opère sur le même niveau de «mathématique de problèmes» mais qui réclame, malgré sa tendance favorable à la méthode synthétique, l'indépendance de l'algèbre.

21. Le premier texte français où l'on différencie d'une manière analogue entre nombres et grandeurs est un mémoire de 1843 : M. Marie est prêt à admettre des nombres négatifs (dans le cadre d'une «algèbre pure»), mais une théorie des grandeurs négatives ne fait, pour lui, aucun sens mathématique (Marie 1843, pp. 11-12).

22. Même Klügel se limite dans son «Mathematisches Wörterbuch» sous la rubrique «Coordinate» à ne visualiser dans les planches que le premier quadrant.
Et Biot (1805) qui utilise la croix des coordonnées, désigne les deux directions d'un axe par le **même** signe : x et y respectivement. Après, on trouve à travers tout le 19ème siècle dans les manuels français, comme une expression d'un «compromis», la désignation X, X' et Y, Y' respectivement pour les quatre axes. On désigne les points par des lettres dans les figures mais pas par des nombres.

23. Je ne voudrais pas exclure la possibilité que Grassmann ait vu le livre de Mourey, car on trouve ce livre cité, déjà en 1834, dans un livre sur des équations algébriques de M.W. Drobisch, mathématicien et philosophe à Leipzig et bien connu à cette époque.

24. Le terme «quantité» ne représente pas seulement la conception traditionnelle des mathématiques («Les mathématiques sont la science de la **quantité**», Encyclopédie, vol. 13, 1765, p. 653), d'où le caractère «général» (au sens de Bachelard) de ce concept — mais il implique aussi une connotation philosophique : il fait en même temps allusion au couple de catégories philosophiques qualité-quantité.

25. En fait, les définitions respectives de «quantité» et de «grandeur» dans l'Encyclopédie montrent que les deux termes pouvaient presque être utilisés l'un pour l'autre. Même aujourd'hui, on ne distingue pas toujours clairement ces deux termes (en allemand, il n'existe pas deux mots différents comme en français). Pour une discussion didactique de la notion de «grandeur» et de son contexte voir Rogalski 1979.

26. L'émergence du concept de valeur absolue chez les mathématiciens est assez tardive. Le concept n'était pas encore clair et même pas défini au début du 19ème siècle. Voir l'étude de A. Duroux (1983) sur les obstacles liés à ce concept, étude qui contient aussi des avis sur l'histoire du concept.

27. Bachelard commente : «La pensée scientifique moderne s'acharne à préciser, à limiter, à purifier les substances et leurs phénomènes. Elle cherche le ferment spécifique, objectif, et non la fermentation universelle... Si **tout fermente**, la fermentation est bien près d'être un phénomène sans intérêt. Il est donc bon de définir ce qui ne fermente pas, ce qui peut arrêter la fermentation» (Bachelard 1975, p. 71).

BIBLIOGRAPHIE.

A. ARCAVI, M. BRUCKHEIMER, R. BEN-ZVI, (1982). May be a Mathematics Teacher can Profit from the Study of the History of Mathematics. For the learning of Mathematics, 3.1, 30-37.

G. BACHELARD, (1938). La formation de l'esprit scientifique, Paris J. Vrin 1975.

G. BELANGER, (1984). Une approche intuitive pour l'enseignement des entiers relatifs. Instantanés Mathématiques, XXI.2, 5-12.

J.B. BIOT, (1805). Essai de géométrie analytique, appliqué aux courbes et aux surfaces du second ordre. **Paris, Bernard. Seconde édition.**

MAINE de BIRAN, (1803). Mémoire sur les rapports de l'idéologie et des mathématiques. œuvres. **éd. P. Tisserand, Paris : Alcan, t. III, 1924, 1-26.**

C. BOURLET, (1896). Leçons d'algèbre élémentaire. **In : Cours complet de mathématiques élémentaires, publié sous la direction de M. Darboux. Paris, A. Colin.**

G. BROUSSEAU, (1983). **Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématique,** Recherches en Didactique des Mathématiques, 4.2. 164-198.

F.G. BUSSE, (1804). Vergleichung zwischen Carnots und meiner Ansicht der Algebra und unserer beyderseitig vorgeschlagenen Abhelfung ihrer Unrichtigkeit. **Freyberg, Craz und Gerlach.**

F.C. BUSSET, (1843). De l'enseignement des mathématiques dans les collèges, considéré sous le double point de vue des prescriptions réglementaires de l'Université, et des principes fondamentaux de la science. **Paris, Chamerot.**

L. CARNOT, (1801). De la Corrélation des Figures de Géométrie. **Paris, Duprat, an IX.**

L. CARNOT, (1803). Géométrie de Position. **Paris, Duprat, an XI.**

A. CAUCHY, (1821). Cours d'Analyse de l'Ecole Royale Polytechnique. Première partie, Analyse algébrique. **Paris, Imprimerie Royale.**

R.G. CLASON, (1968). Number Concepts in Arithmetic Texts of the United States from 1880 to 1966, with related psychological and mathematical developments. **Ph.D. Thesis University of Michigan. Ann Arbor, University Microfilms.**

E.B. de CONDILLAC, (1981). La Langue des Calculs. **Texte établi et présenté par Anne-Marie Chouillet. Introduction et notes de Sylvain Auroux. Lille, Presses Universitaires.**

M.L. CROWLY, K.A. DUNN. (1985). **On Multiplying Negative Numbers.** Mathematics Teacher, 78, 252-256.

A.L.C. DESTUTT de TRACY, (1798). **Mémoire sur la faculté de penser.** Mémoires de morale et politique (institut), an 6, 283-450.

A.L.C. DESTUTT de TRACY, (1804). Elemens d'Idéologie. Première partie. Idéologie proprement dite. **Seconde édition, Paris, Courcier, an XIII.**

W.A. DIESTERWEG, (1831). **Beiträge zu der Lehre von den POSITIVEN und NEGATIVEN GRÖSSEN. Bonn, Habicht.**

A. DUROUX, (1983). **La valeur absolue ; difficultés majeures pour une notion mineure.** petit x numéro 3, 43-67.

Encyclopédie, ou Dictionnaire Raisonné des Sciences, des Arts et des Métiers. Article Grandeur **(«O»), t. 7 (1757), 855 ;** Négatif **(«O»), t. 11 (1765), 72-74 ;** Quantités, en terme d'algèbre **(«E»), t. 13 (1765), 655.**

L. EULER, (1766). Vollständige Anleitung zur Algebra. **Leipzig, Reclam jun. 1940.**

W.A. FÖRSTEMANN, (1817). **Ueber den Gegensatz positiver und negativer Größen. Nordhausen.**

L.B. FRANCOEUR, (1819). Cours Complet de Mathématiques Pures. Tome premier, seconde édition. Paris, Courcier.

J.D. GERGONNE, (1814). Réflexions sur le même sujet (i.e., La théorie des quantités négatives). Annales de Mathématiques Pures et Appliquées, 4, 6-20.

G. GLAESER, (1981). Epistémologie des nombres relatifs. Recherches en Didactique des Mathématiques, 2.3, 303-346.

G. GLAESER, (1984). A propos des obstacles épistémologiques. Réponse à Guy Brousseau. Recherches en Didactique des Mathématiques, 5.3, 229-234.

H.G. GRASSMANN, (1844). Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik. Leipzig, Wigand.

P.J. HECKER, (1799). Uber den gewöhnlichen Vortrag der Anfangsgründe der Lehre von den entgegengesetzten Größen. (Weihnachtsprogrammschrift der Universität Rostock). Rostock.

J. ITARD, (1972). L'évolution de l'enseignement des mathématiques en France de 1872 à 1972. Essais d'Histoire des Mathématiques, réunis et introduits par R. Rashed. Paris, Blanchard 1984, 353-359.

A.G. KÄSTNER, (1755). Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie, und Perspectiv. Der mathem. Anfangsgründe Iten Theils erste Abth. Göttingen. Vandenhoek und Ruprecht, Fünfte vermehrte Auflage, 1792.

I. KANT, (1763). Versuch den Begriff der negativen Größen in die Weltweisheit einzuführen. Werkausgabe Band II, Vorkritische Schriften bis 1768 : 2, Hg. W. Weischedel. Frankfurt am Main. Suhrkamp, 1977, 777-819.

J. KLOSTERMANN, (1804). Le carré d'une quantité négative est négatif et non positif. St. Petersbourg.

J. KLOSTERMANN, (1805). Démonstration que la règle : moins multiplié par moins donne plus, induit en erreur et qu'elle ne s'accorde pas avec les opérations de l'esprit humain. (Avec permission de la censure). St. Petersbourg.

G.S. KLÜGEL, (1795). Über die Lehre von den entgegengesetzten Größen. Archiv der reinen und angewandten Mathematik, I, 3 : 309-319, et 4 : 470-481.

S.F. LACROIX, (1800). Elémens d'algèbre, à l'usage de l'Ecole Centrale des Quatre-Nations. Seconde édition, revue et corrigée. Paris, Duprat, an IX ; septième édition, revue et corrigée, Paris. Courcier, 1808.

J.G.E. MAASS, (1796). Grundriß der reinen Mathematik zum Gebrauche bei Vorlesungen und beim eigenen Studium. Halle, Renger.

M. MARIE, (1843). Discours sur la nature des grandeurs négatives et imaginaires, et interprétation des solutions imaginaires en géométrie. Paris, Carilian-Goeury et V^or^ Dalmont.

A. METZ, (1804). Handbuch der Elementar-Arithmetik in Verbindung mit der Elementar-Algebra. Zum Gebrauche für Anfänger. Bamberg/Würzburg, Göbhardt.

C.V. MOUREY, (1828). La vraie théorie des quantités négatives et des quantités prétendues imaginaires. **Dédié aux amis de l'évidence. Paris, Mallet-Bachelier, deuxième édition 1861.**

L. NOVY, (1973). Origins of Modern Algebra. **Leyden/Prag : Nijhoff.**

H.M. PYCIOR, (1976). The role of Sir William Rowan Hamilton in the development of British modern algebra. **Ph.D. thesis Cornell University. University Microfilms, Michigan.**

J. ROGALSKI, (1979). **Quantités physiques et structures numériques. Mesures et quantifications : les cardinaux finis, les longueurs, surfaces et volumes.** Bulletin de l'APMEP numéro 320, 58, 563-586.

J. SAURI, (1770). Institutions Mathématiques, servant d'Introduction à un Cours de Philosophie à l'usage des Universités de France. **Paris, deuxième édition 1772.**

G. SCHUBRING, (1984). **Essais sur l'histoire de l'enseignement des mathématiques, particulièrement en France et en Prusse.** Recherches en Didactique des Mathématiques, 5.3, 343-385.

G. SCHUBRING, (1986). **L'apport des recherches en histoire de l'enseignement des mathématiques à la didactique des mathématiques.** Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique. **IMAG Grenoble, année 1984-1985. (1986a).**

G. SCHUBRING, (1986). L'Histoire de l'Enseignement des Mathématiques comme sujet de Recherches en Didactique des Mathématiques. **IREM Université Paris VII, cahier de didactique des mathématiques. Numéro 26. (1986b).**

G. SCHUBRING, (1987). **On the methodology of analysing historical textbooks — The œuvre of Lacroix as textbook autor. Forthcoming.**

J. SESIANO, (1984). **Une Arithmétique médiévale en langue provençale,** Centaurus, 27, 26-75.

J. SESIANO, (1985). **The Appearance of Negative Solutions in Mediaeval Mathematics,** Archive for History of Exact Sciences, 32.2, 105-150.

J.P.W. STEIN, (1828-29). Die Elemente der Algebra. **Trier : Lintz, Erster Cursus. 1828, Zweiter Cursus. 1829.**

H.D. WILCKENS, (1800). Die Lehre von den entgegengesetzten Größen in einem neuen Gewande. **Braunschweig.**