A PROPOS DE LA DIVISIBILITE PAR 9

par Raymond GUINET

Le critère de divisibilité par 9 est le premier théorème d'arithmétique que les enfants rencontrent. Il est dommage que la plupart des manuels scolaires se contentent de donner la recette, au mieux de l'expliquer, alors que c'est l'occasion rêvée de présenter une situation assez facilement synthétisable et dont le résultat est fondamental. De plus le travail sera facilité pour la preuve par 9* et plus tard pour la divisibilité par 3.

Mais, faisons un peu de théorie pour en comprendre le mécanisme.

I – UN PEU DE THEORIE.

Le point de départ de cette méthode consiste en l'étude des restes de la division par 9 des puissances de 10 (1, 10, 100, 1000, ..., 10^n).

Il est aisé de voir que :

$$10 = 9 + 1 = \text{multiple de } 9 + 1$$

$$100 = 99 + 1 = \text{multiple de } 9 + 1$$

$$1000 = 999 + 1 = \text{multiple de } 9 + 1$$

et d'une manière générale,

$$10^n = \underbrace{99 \ldots 9}_{\text{n neuf}} + 1 = \text{multiple de } 9 + 1$$

Voyons à partir d'un exemple et avant de généraliser, les conséquences qui en découlent.

(*) *Voir dans Grand N n° 3 l'article «La preuve de la multiplication».*

Décomposons le nombre 3758 selon les différentes puissances de dix. On obtient :

$$\begin{aligned} 3758 &= 3000 + 700 + 50 + 8 \\ &= (3 \times 1000) + (7 \times 100) + (5 \times 10) + (8 \times 1) \\ &= 3 \times (\text{multiple de } 9 + 1) + 7 \times (\text{multiple de } 9 + 1) + 5 \times (\text{multiple de } 9 + 1) + 8 \\ &= \text{multiple de } 9 + 3 + \text{multiple de } 9 + 7 + \text{multiple de } 9 + 5 + 8 \quad (*) \\ &= \text{multiple de } 9 + 3 + 7 + 5 + 8. \end{aligned}$$

Il est clair que le premier terme est un multiple de 9, et que pour que 3758 soit divisible par 9, il suffit que 3 + 7 + 5 + 8 le soit, ce qui n'est pas le cas ici, mais nous permet de trouver le reste de la division par 9 de 3758 qui est 5.

Généralisons à présent en désignant par $\overline{m\,c\,d\,u}$, un nombre de quatre chiffres (mais le nombre de chiffres n'a aucune importance) où m, c, d et u désignent respectivement le chiffre des milliers, centaines, dizaines et unités.

$$\begin{aligned} \overline{mcdu} &= (m \times 1000) + (c \times 100) + (d \times 10) + u \\ &= m \times (\text{multiple de } 9 + 1) + c \times (\text{multiple de } 9 + 1) + d \times (\text{multiple de } 9 + 1) + u \\ &= (m + c + d + u) \text{ multiple de } 9 + (m + c + d + u). \end{aligned}$$

Le premier terme est nécessairement un multiple de 9. Pour que $\overline{m\,c\,d\,u}$ soit un nombre divisible par 9, il suffit que $m + c + d + u$ le soit.

II – DE LA THEORIE A LA PRATIQUE.

Il existe de nombreuses méthodes pour découvrir et aider à découvrir le critère de divisibilité par 9(**).

La méthode que nous proposons incite l'enfant à l'action, l'observation puis à la déduction, étant entendu que l'on procède ici par passage de cas particuliers au cas général c'est-à-dire par induction, procédé couramment employé dans l'enseignement élémentaire. Cette méthode serre de près la théorie vue au paragraphe précédent, et les quelques lignes qui suivent sont le compte rendu d'une séquence réalisée dans un C.M.

(*) Tout ceci en vertu du fait que le produit d'un multiple de 9 par un nombre est un multiple de 9 et que la somme de deux multiples de 9 est un multiple de 9. Il en résulte que la notation **multiple de 9** *désigne un quelconque multiple de 9.*

(**) Voir l'article «Recherche du caractère de la divisibilité par 9» dans Grand IN n° 4.

On demande aux enfants de faire la division euclidienne de 30 par 9 puis successivement 80, 50, 40 par 9 ce qui conduit à :

$30 = (9 \times 3) + 3$

$80 = (9 \times 8) + 8$

$50 = (9 \times 5) + 5$

$40 = (9 \times 4) + 4$

De nombreux enfants observent que dans chaque division, le quotient et le reste sont égaux. D'autres enfants, complètent l'observation en constatant que le chiffre des dizaines du dividende est aussi égal au quotient et au reste.

Afin de mettre l'accent sur le dividende et le reste, le maître demande s'il est possible sans faire la division de trouver le reste de 60 dans la division par 9. Certains enfants déjà devinent ce reste, d'autres n'ayant pas fait le rapprochement avec l'activité précédente hésitent, tous enfin font la division qui confirme le résultat anoncé, soit :

$60 = (9 \times 6) + 6$

Enfin, la même question est posée à propos de 20, 10, 70 et 90. La plupart des enfants prévoient que les restes respectifs sont 2, 1, 7 et ... 9.

Les quatre divisions sont quand même effectuées comme dans la phase initiale afin qu'ils découvrent leur erreur dans le cas de 90.

Dans la deuxième partie de la séquence, le maître demande de rechercher le reste de 400 dans la division par 9, et l'on écrit :

$400 = (9 \times 44) + 4.$

Puis vient le tour de 600. Par analogie à la situation précédente, quelques enfants prévoient le résultat. La division effectuée par tous, justifie ce résultat, soit :

$600 = (9 \times 66) + 6.$

Le même travail est effectué pour 700 puis 300, exprimé par :

$700 = (9 \times 77) + 7$

$300 = (9 \times 33) + 3.$

En ce qui concerne les nombres 100, 200, 300, 500, 800 et 900, pratiquement tous les enfants prévoient les résultats sans tomber dans le piège de 900, mais, quoi qu'il en soit, les six divisions sont effectuées.

Dans la troisième partie de la séquence qui a duré près de une heure et demie, on va essayer de faire la synthèse des deux premières parties.

On demande quel est le reste de 21 dans sa division par 9. Tous les enfants calculent et trouvent 3. Pouvait-on prévoir ? Personne ne peut répondre.

On repose les mêmes questions à propos de 32, mais un enfant remarque que le reste 5 égale 3 + 2.

A la demande d'explications, aucune réponse ne vient.

On recherche le reste de 53 dans sa division par 9, les réponses viennent rapidement : $8 = 5 + 3$, ce qui est confirmé par le calcul. Enfin, on amène les enfants à la décomposition décimale de 53 en $50 + 3$.

Un enfant remarque que le reste de la division de 50 par 9 est 5 et que par conséquent le reste de la division de $50 + 3$ est 8. C'est ici que l'on retire tout le bénéfice de la première partie de cette séquence.

Dans une dernière phase, on demande aux enfants de trouver sans faire l'opération, le reste de la division par 9 de 62 puis de 87 enfin de 125.

Dans les deux derniers cas, la décomposition décimale s'est avérée indispensable pour trouver le résultat cherché.

En effet, $87 = 80 + 7$.

Le reste de la division de 80 par 9 est 8. Enfin, le reste de la division de $8 + 7 = 15$ par 9 est 6.

Au cours d'une deuxième séquence, on a étudié le reste dans la division par 9 de 162, puis 387, 453, etc...

Par exemple, dans le cas de 162, on a écrit
$162 = 100 + 60 + 2$.

Les restes de 100, 60 et 2 dans la division par 9 sont respectivement 1, 6 et 2, celui de 162 est donc zéro.

La plupart des exercices suivants (pour ne pas dire tous) se sont faits oralement comme on procède en calcul mental.

C'est pendant cette séquence que le critère de divisibilité par 9 a été formulé.

CONCLUSION

Il peut être parfois fait reproche à la méthode qui vient d'être exposée, d'être une démarche d'adulte. A cette critique il peut être opposé au moins deux arguments.

Le premier est que la méthode repose en fait sur le principe simple suivant : Si l'on doit répartir deux paquets de bonbons entre des enfants, on peut soit répartir ces paquets l'un après l'autre, soit réunir ces deux paquets dans un troisième et faire le partage.

Quel que soit le mode de répartition adopté le nombre de bonbons restant est le même.

Le deuxième est que l'expérience prouve que non seulement cette démarche est très accessible aux enfants, mais aussi qu'elle peut préparer à des raisonnements de type logico-déductif.