L'ADDITION AU COURS PREPARATOIRE

par Micheline BURGON - DELAYRE

Il y a plusieurs façons d'introduire l'addition au C.P. Deux d'entre elles ont donné lieu, à notre connaissance, à un certain nombre de travaux.

★ L'une préconise l'introduction et l'emploi du signe «+» avant l'introduction et l'étude de tout système de numération, dans le but de permettre aux enfants de désigner rapidement et simplement de nombreux nouveaux naturels. Ainsi «Les naturels et l'addition servent à construire de nouveaux naturels» comme l'écrit Guy BROUSSEAU dans «Un exemple de processus de mathématisation : L'Addition dans les naturels» (La Mathématique à l'école élémentaire - A.P.M.E.P. - Paris 1972). Le lecteur intéressé pourra trouver un exposé détaillé de la progression suivie dans les classes dans le fascicule «L'addition au C.P.» rédigé par G. DERAMECOURT, P.E.N. à Périgueux, et édité par l'I.R.E.M. de Bordeaux.

★ L'autre consiste au contraire à introduire d'abord le système de numération de position et à attendre que celui-ci soit bien assis pour introduire l'addition.

C'est cette deuxième voie que nous avons choisie et que nous allons essayer de décrire dans le détail, dans cet article.

Pourquoi ce choix ?

Les enfants, confrontés à de grandes collections, font certes assez spontanément des groupements par paquets pour communiquer aux autres le nombre d'éléments de telles collections. Mais on peut, à notre avis, exploiter cette situation aussi bien pour introduire les activités d'échange (ou de groupement) conduisant à la numération que pour introduire le signe «+».

Par ailleurs, quand l'introduction du signe «+» est faite en premier, les enfants, pouvant coder de façon additive les grands nombres, sont, nous semble-t-il, moins motivés pour la recherche puis l'apprentissage d'un système de numération.

Nous préférons dans l'équipe Elémentaire de l'IREM de Grenoble, exploiter la motivation certaine des enfants à la désignation des naturels pour les aider à prendre conscience de la nécessité de conventions de communication, ce qui nous conduit à privilégier dans le temps la numération de position par rapport à l'addition.

Ce choix nous permet de plus de laisser aux enfants le temps nécessaire pour découvrir, utiliser et commencer à assimiler les principes de cette numération.

(Le lecteur intéressé pourra se reporter à l'article «Introduction de la numération au CP» paru dans Grand $\mathbb{N}$ n° 5).

L'étude de l'addition qui vient par la suite permet alors de renforcer les acquis précédents.

I – UN PEU DE THEORIE.

L'addition est une loi de composition dans l'ensemble des entiers naturels ; c'est-à-dire qu'à tout couple d'entiers (a, b), elle fait correspondre un naturel unique appelé somme de a et de b et noté a + b.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ (a, b) & \longrightarrow & a + b \end{array}$$

Cette loi possède les propriétés suivantes :

– Elle est commutative : pour tout couple (a, b),

$$a + b = b + a.$$

– Elle est associative : pour tout triplet (a, b, c),

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

– Elle admet zéro comme élément neutre, pour tout a

$$a + 0 = 0 + a = a.$$

Remarque : Pour plus de précisions sur les lois de composition, le lecteur pourra relire l'article «Loi de composition» dans Grand $\mathbb{N}$ n° 8.

II – RAPPEL DES ACTIVITES PREALABLES A L'ADDITION.

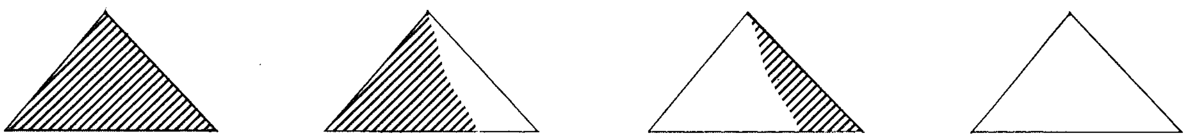
Le nombre a été introduit entre autres comme cardinal d'ensembles, c'est-à-dire que l'on a construit des boîtes (voir l'article dans Grand IN n° 11 «A propos de la notion de nombre au C.P.).

A ce moment de l'année, ont été fabriquées dans la classe une vingtaine de boîtes, contenant chacune des sacs d'objets et elles ont été rangées.

D'autre part, les enfants ont étudié des lois de composition sur des ensembles finis car l'addition étant une loi de composition dans un ensemble infini, il est bon que les enfants aient pu, avant de l'aborder, être familiarisés avec d'autres lois plus simples. En effet, se placer dans un ensemble fini que les enfants peuvent eux-mêmes construire, dans le cas d'exemples non numériques, permet de mieux dominer la situation et de faire apparaître différentes représentations de la loi ; en particulier, les enfants commencent à se familiariser avec la construction, puis l'observation et l'utilisation d'une table. De plus, par des exemples non numériques, on évite une définition trop abstraite du composé de deux éléments, la règle de composition pouvant être liée à une manipulation.

Exemples de lois de composition non numériques sur des ensembles finis :

- «les maisons» compte-rendu de Georges REVOL dans Grand IN n° 8 page 38.
- «les poupées» compte-rendu de François DIEDERICHS dans Grand IN n° 11.
- «les triangles» extrait de la fiche 15 du GALION 6ème. Sur du papier calque, quatre triangles superposables sont dessinés :



Dans l'ensemble de ces quatre triangles, on définit la loi de composition suivante : on pose un triangle sur un autre, et on reproduit le triangle obtenu en regardant par transparence. On dresse la table de Pythagore et on fait toutes les remarques possibles.

III – INTRODUCTION DU SIGNE +.

1ère étape : manipulations.

La somme de deux nombres va se définir sur les nombres eux-mêmes, et non pas sur deux ensembles donnés. On choisit donc une boîte et on prend un sac dans cette boîte, puis une autre boîte (éventuellement la même) et un sac dans cette boîte. On vide les deux sacs sur une table et on réunit leurs contenus ; on forme ainsi un nouveau sac. On cherche alors dans quelle boîte mettre ce nouveau sac. On continue en prenant d'autres sacs dans ces deux mêmes boîtes et on constate que le sachet construit appartient toujours à la même boîte.

Cette propriété d'indépendance du choix des sacs dans les boîtes est fondamentale. Pour la faire comprendre aux enfants, on peut proposer, entre autres, les exercices suivants :

– Faire répéter la manipulation aux enfants avec d'autres sacs pris dans les mêmes boîtes ; les enfants constatent que la boîte «arrivée» est toujours la même ; l'objectif est atteint lorsque les enfants refusent une nouvelle manipulation parce qu'ils prévoient le résultat ; on peut penser en effet qu'ils commencent à raisonner sur les cardinaux des ensembles et non plus sur les ensembles eux-mêmes.

– Choisir collectivement deux boîtes et distribuer par groupes d'enfants un sac de chacune de ces deux boîtes ; chaque groupe manipule ; dans une phase de mise en commun, les enfants constatent que les sacs obtenus par chaque groupe appartiennent tous à la même boîte.

– Prolonger l'exercice précédent en distribuant de la même manière les sacs de deux nouvelles boîtes et en demandant aux enfants de prévoir, après une seule manipulation, à quelle boîte appartiendront les autres sacs qu'ils pourront construire.

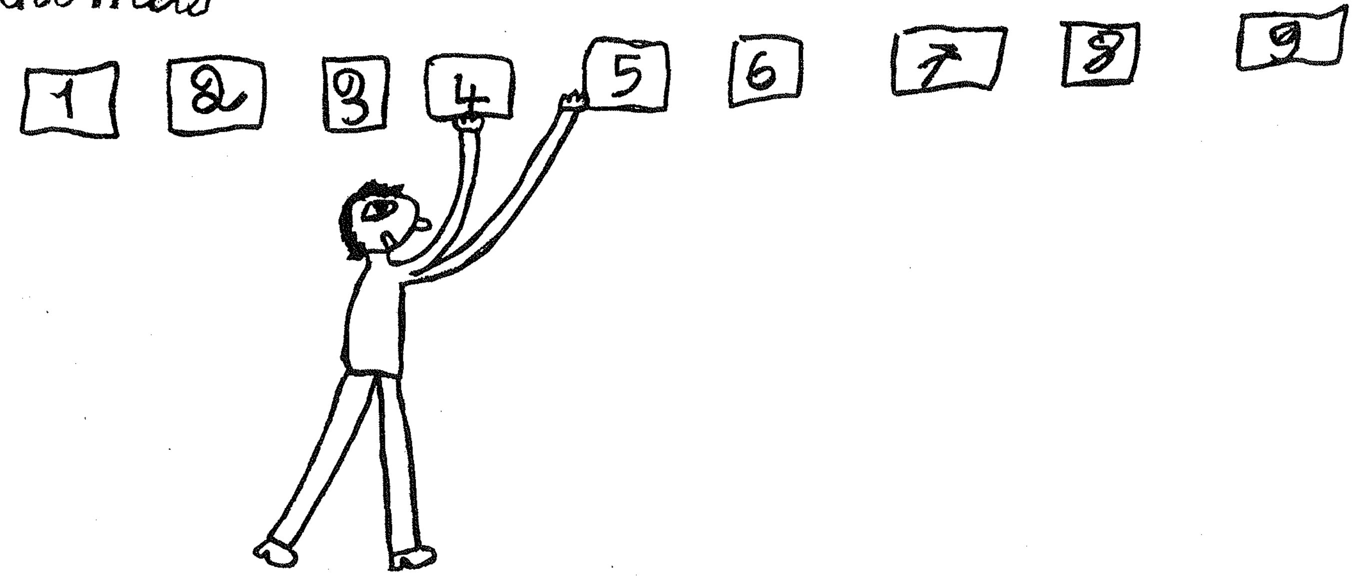
Remarque importante : Contrairement à ce qu'on trouve dans de nombreux livres, on ne se contente pas de réunir ainsi deux ensembles particuliers (un de cinq éléments, un de trois éléments, par exemple), mais on sait que, chaque fois qu'on aura un ensemble de cinq éléments et un ensemble de trois éléments, disjoints, en les réunissant, on obtiendra un ensemble de huit éléments.

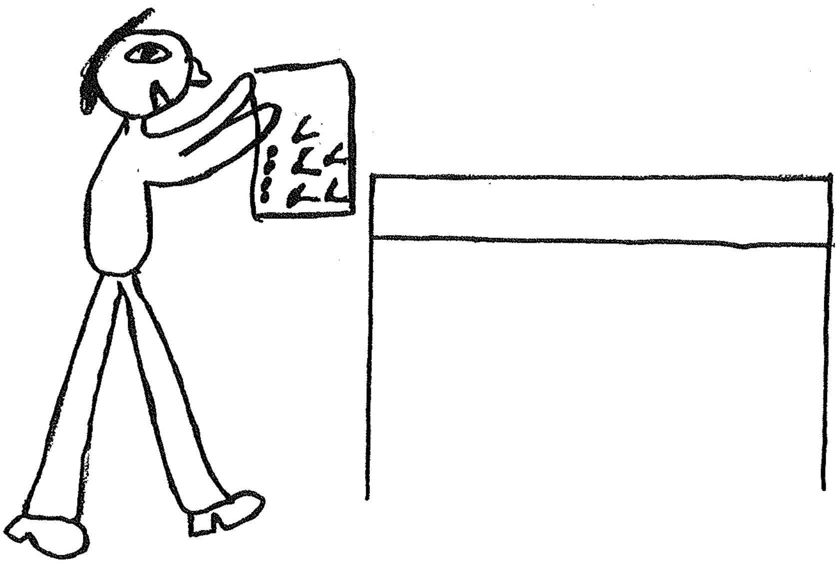
2ème étape : phase écrite.

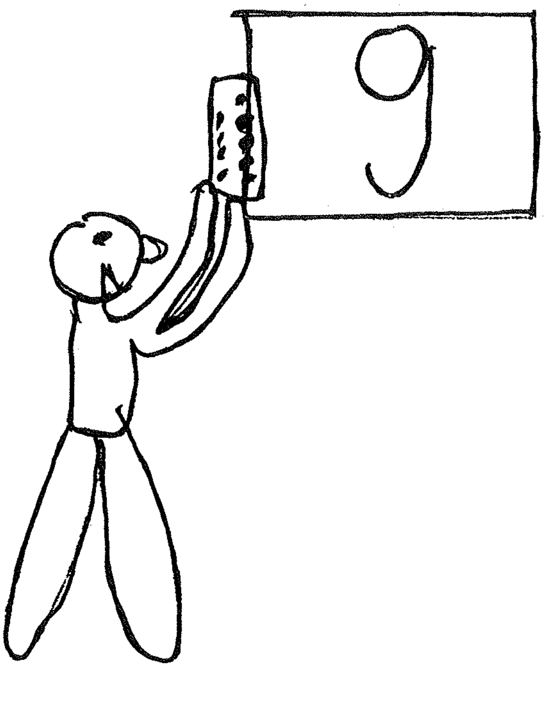
A la suite d'une manipulation analogue à celles décrites ci-dessus, on demande aux enfants d'«expliquer» sur leur feuille ce qu'ils ont fait (on emploie à dessein un mot vague comme «expliquer» pour ne pas les orienter). On rassemble au tableau toutes les propositions ; ce sont des phrases, des dessins, des nombres écrits, ...

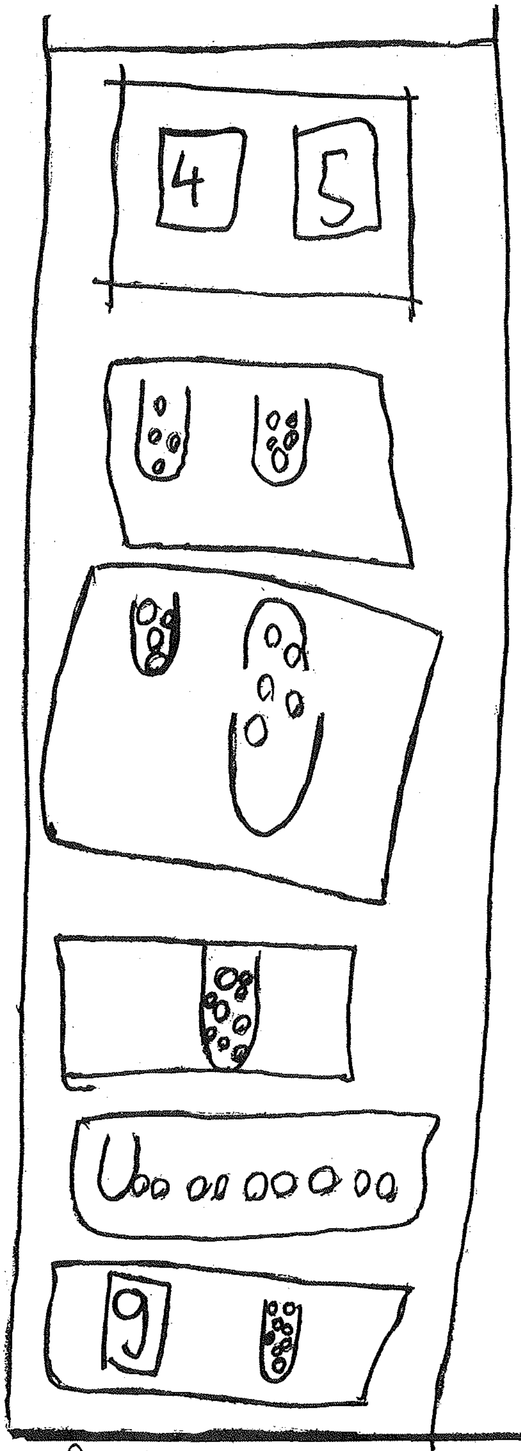
Exemples de ce qui a été obtenu dans les classes :

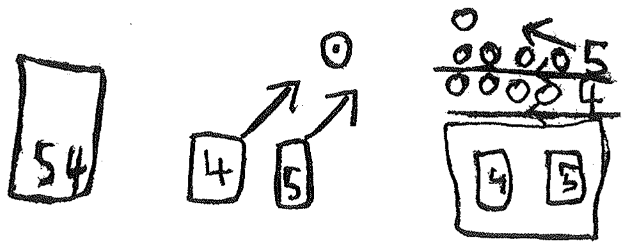
catherine
thomas



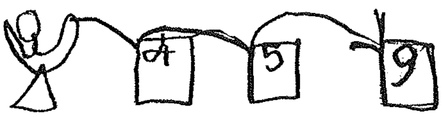




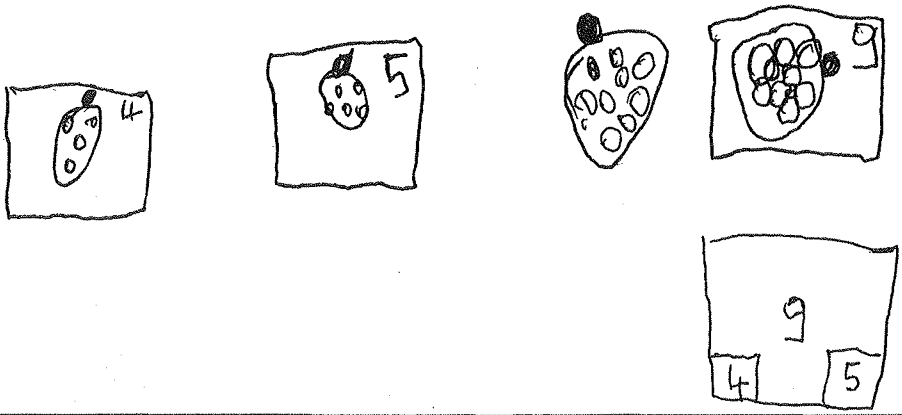


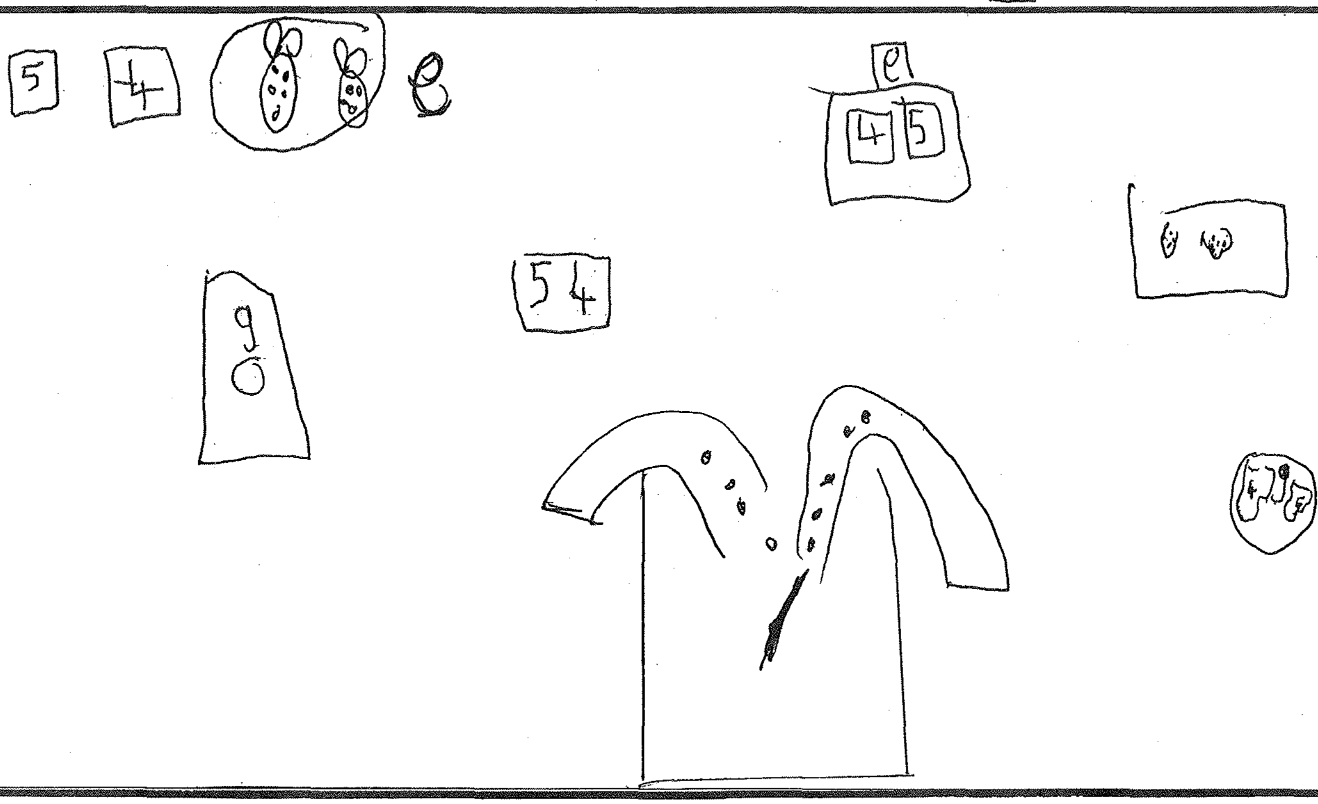


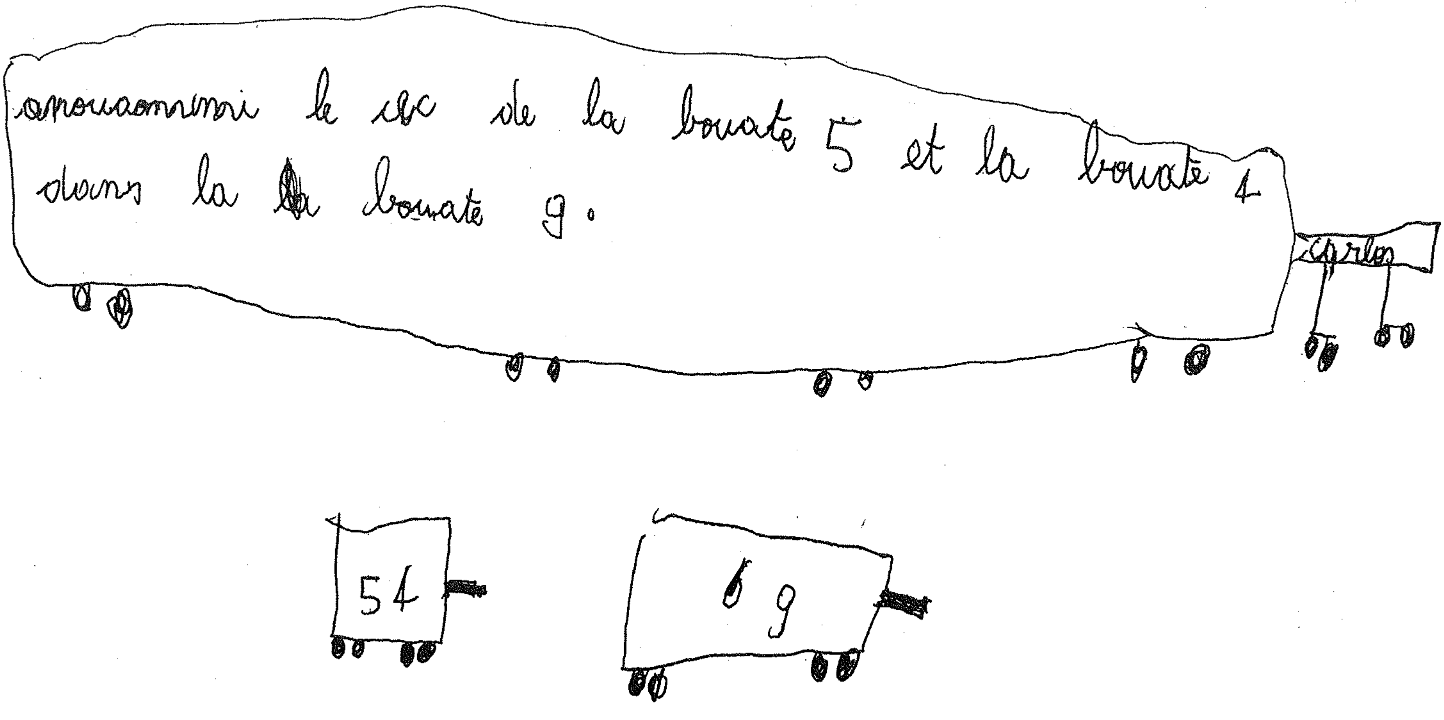
christine




philippe





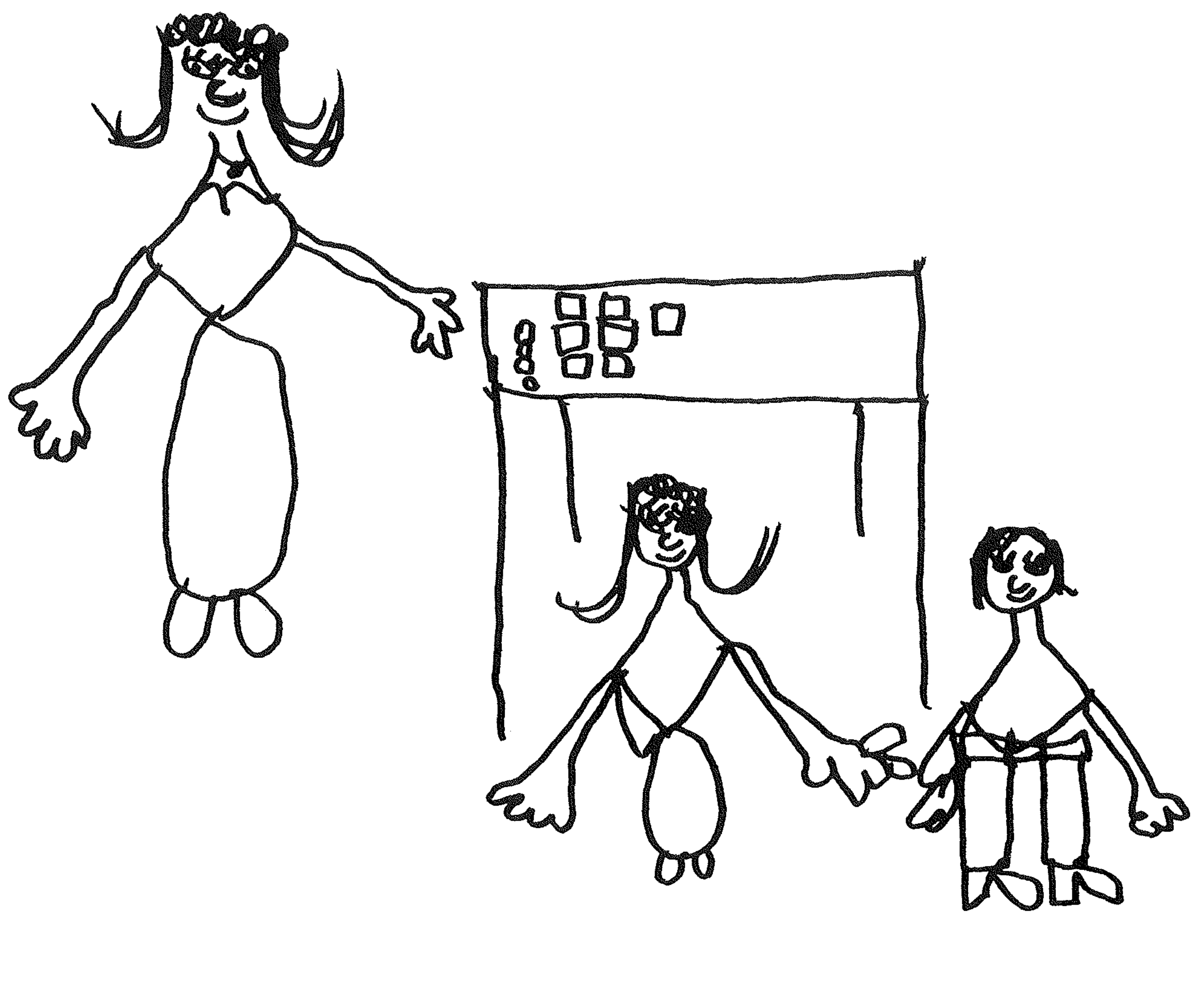

amouaomenni le coc de la bouate 5 et la bouate 4
dans la ~~la~~ bouate 9.
carlos
54
9

catherine

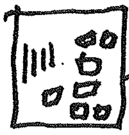
stéplane et moi catherine on na pri dans
une boite un sac stéplane a pri un sac dans la
boite quatre et catherine ses moi jai pri
un sac dans la boite sept. la maitrèse
a mi le sac de stéplane dans un
autre sac et elle a pri le min apré
on na di il son réuni apré la mai-
trèse nous a du dans la celle boile
on le mai se sac sété dans la
( ) boite 11

michèle

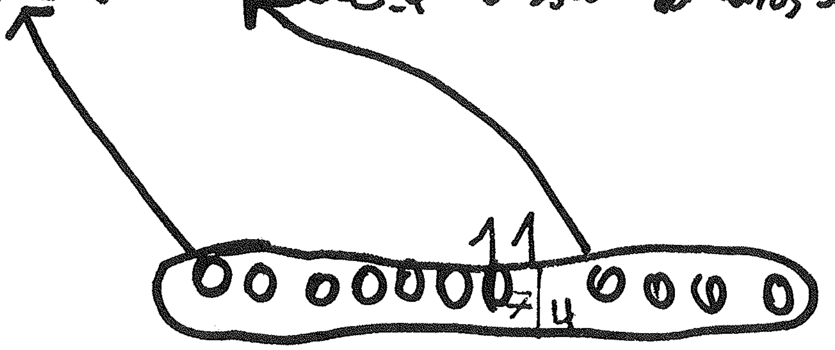
stéfane a prille dans la boite
quatre il a prille quatre gaublé
et cathrine a prillé dans la boit
sept elle a prille sept cube can
on ~~[illegible]~~ ni ~~[illegible]~~
~~[illegible]~~é les cube et les gaublé
jé trouvé con bint il on navé
séte onze = 11.

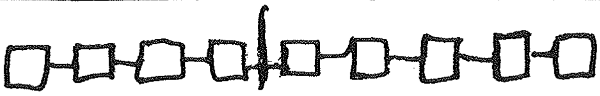


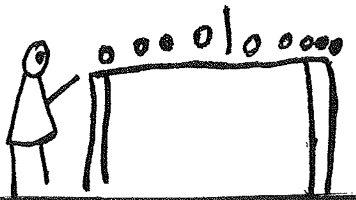
agnès giry

7 et 4  11

sept=7 . quatre=4 . sa va dans la boit 11 onze

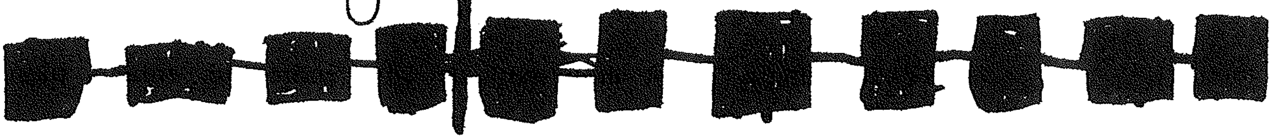


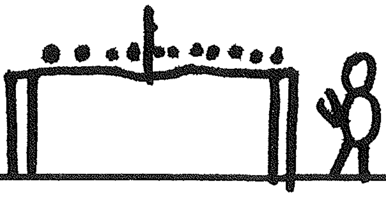




=9 5 4

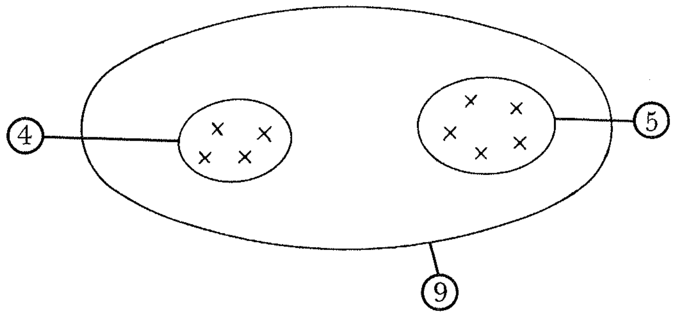
stéfane a pris dans la boit quatre
quatre etlesman et cahtrine elle au si
elle a pris dans la boit sept et sa
fait onze = 11





On amène alors les enfants à discuter ces diverses propositions : ils rejettent celles qui sont incomplètes, remarquent que certains ont écrit ou dessiné le quatre avant le cinq, d'autres le cinq avant le quatre, mais que le résultat était toujours neuf, ...

Remarque : On n'a jamais obtenu des dessins du style suivant, si répandu dans les ouvrages !



3ème étape : première désignation additive des boîtes.

On peut motiver cette désignation par la nécessité de bien mettre en évidence que dans la boîte neuf par exemple, certains sacs parviennent de la réunion de sacs des boîtes quatre et cinq, d'autres de la réunion de sacs des boîtes sept et deux.

Nous avions demandé aux enfants de proposer des désignations pratiques correspondant à ce besoin.

Nous avons obtenu les propositions suivantes :

45 ; 4,5 ; 54 ; 4 et 5 ; $\boxed{5}\boxed{4}$; ...

discussion collective : certaines sont à rejeter car elles désignent déjà autre chose (exemple 45 désigne en base dix le nombre quarante-cinq), d'autres pourraient convenir (4 et 5 par exemple).

Les enfants n'ayant pas proposé le signe +, le maître l'introduit alors.

La boîte neuf avait déjà comme étiquettes «neuf» et «9» ; deux nouvelles étiquettes «4 + 5» et «5 + 4» sont alors collées sur la boîte.

Dès cette étape, il est intéressant de faire écrire aux enfants plusieurs égalités possibles. Par exemple :

$5 + 4 = 9$

$9 = 4 + 5$

$9 = 5 + 4$

$4 + 5 = 5 + 4.$

4ème étape : utilisation du signe +.

On a fait le même travail pour d'autres boîtes, par exemple 2 et 5 ; 5 et 3 ; etc... et on a fabriqué ainsi de nouvelles étiquettes pour les boîtes.

Chaque fois des égalités ont été écrites dont celles du type

$$4 + 5 = 7 + 2$$

(égalité entre deux signes désignant la même boîte).

De même une boîte étant choisie, d'autres désignations de cette boîte, sous forme de sommes ont été cherchées (décomposition d'un nombre).

Ces divers exercices peuvent donner lieu à la constitution d'un répertoire que l'on complètera par la suite.

On laisse toute liberté aux enfants, s'ils en manifestent le désir, d'inventer de nouvelles étiquettes additives, c'est-à-dire de trouver les différentes décompositions d'un nombre en somme de deux nombres.

Remarques sur cette introduction de l'addition.

L'introduction ainsi décrite correspond bien à la définition de l'addition comme loi de composition. Intuitivement au C.P., c'est aussi la traduction de la réunion ; mais le cardinal d'un ensemble réunion n'est égal à la somme des cardinaux des deux ensembles que si ces deux ensembles sont disjoints ; c'est pourquoi il ne faut mettre dans les boîtes que des «ensembles matériels» qui sont forcément disjoints et non pas des représentations d'ensembles.

IV – L'ADDITION, LA SUITE DES NOMBRES ET L'ORDRE.

4.1 Activités mettant en évidence le lien existant entre l'addition et la suite des naturels.

Au cours des activités précédentes de désignation de nombres avec le signe +, les enfants ont, par exemple, trouvé 7 + 1 pour désigner la boîte huit, 5 + 1 pour désigner la boîte six...

Le passage systématique d'une boîte à la suivante permet d'insister sur le fait qu'ajouter un à un nombre fait passer au nombre suivant.

Cette remarque va amener à la désignation de chaque boîte à l'aide de la désignation la plus simple de la boîte précédente (exemple : on désigne la boîte 20 par 19 + 1).

4.2 Compter de deux en deux, de trois en trois.

Chaque enfant a une réserve de cubes ; il prend deux cubes et écrit 2, il en prend deux autres et écrit ce qu'il obtient 4.

Il note : $4 = 2 + 2$; et ainsi de suite.

L'enfant a donc ainsi écrit la suite des nombres pairs.

Il la fait apparaître sur le serpent numérique (voir dans Grand $\mathbb{N}$ n° 11, l'article «A propos de l'approche de la notion de nombre au CP») en coloriant les écailles correspondantes d'une même couleur (rouge par exemple).

Cette activité est reprise en démarrant avec un seul cube. L'enfant écrit ainsi la suite des nombres impairs et la fait apparaître sur le serpent en coloriant (en bleu par exemple).

Remarque. Il est évident que les mots «pair» et «impair» ne sont pas utilisés avec les enfants.

– Mêmes activités en comptant de trois en trois.

– On fait également des exercices individuels écrits :

compléter : $1 \to 3 \to 5 \to \bigcirc \to \bigcirc \to \bigcirc$ ... ;

compter de deux en deux en base trois (les enfants s'aident en manipulant) ; joindre des points numérotés de deux en deux pour retrouver un dessin caché.

4.3 Utilisation de la suite des naturels pour trouver la somme de deux nombres.

C'est une variante du «jeu de l'oie»; un pion est placé au début du jeu sur une case, on le déplace en suivant les indications d'un dé ; dans une première phase, l'enfant constate que si son pion était sur la case 3 et qu'il a fait deux sauts, il est arrivé à la case 5, car $3 + 2 = 5$; dans une deuxième phase, le jeu consiste à demander à l'enfant de prévoir la case d'arrivée connaissant la case de départ et les points marqués par le dé ; s'il prévoit bien, il a le droit d'avancer ; s'il prévoit mal, il passe son tour.

On peut aussi jouer en utilisant deux dés. Dans ce cas, les enfants peuvent proposer plusieurs règles de jeu ; on favorise les règles où la somme intervient, que ce soit sous la forme «4 + 5» ou «4 puis 5»... On constate que si on part de la case 0 le nombre indiqué sur l'écaille d'arrivée est égal à la somme des nombres indiqués par les dés.

4.4 Ecritures de diverses inégalités.

Rappels théoriques.

La somme de deux nombres non nuls est supérieure à chacun de ces deux nombres :

$$a + b > a \qquad ; \qquad a + b > b$$

Quels que soient les nombres a, b, c si a est supérieur à b, alors $a + c$ *est supérieur à* $b + c$. *Par exemple, puisqu'on sait que* $7 > 5$; *on peut écrire,* $7 + 9 > 5 + 9$.

Si deux nombres sont supérieurs à deux autres, la somme des deux plus grands est supérieure à celle des deux plus petits.

Avec les enfants, on utilise les boîtes, le serpent, le jeu de l'oie pour retrouver ces propriétés, sans, bien entendu, les expliciter. Par exemple, pour la première propriété, les enfants constatent en manipulant, les boîtes étant rangées dans l'ordre croissant, que la boîte obtenue pour une somme est plus à droite que les deux boîtes dont ils étaient partis.

On écrit donc des inégalités du type :

$2 + 5 > 5$

$3 + 5 < 9 + 5$

$2 + 5 > 1 + 3$

et aussi

$18 + 25 > 25$

$81 + 7 > 79 + 6$

Les enfants font aussi des exercices individuels, où ils doivent écrire, à la place des pointillés, le signe qui convient (à choisir entre <, >, =) ;

Exemple

$3 + 5$ ... 8

9 ... $2 + 5$

$2 + 4$ ... $2 + 5$

$2 + 6$ ... $1 + 7$

$4 + 7$ ... $3 + 6$

V – TABLE D'ADDITION.

5.1 Rappel théorique.

Si une loi de composition est définie dans un ensemble fini E, on peut construire le tableau du produit cartésien $E \times E$, *où l'image du couple (a, b) est indiquée dans la case correspondant à ce couple. C'est ce qu'on appelle la table de Pythagore de la loi de composition considérée. Pour l'addition dans* $\mathbb{N}$, *il est impossible de faire le tableau du produit cartésien* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, *puisque* $\mathbb{N}$ *est un ensemble infini. Mais, quand la technique opératoire de l'addition est connue, il suffit, pour trouver la somme de deux naturels quelconques, de connaître la* *somme des dix premiers naturels pris deux à deux. On construit donc un tableau ayant en entrées les naturels compris entre 0 et 9.*

5.2 Construction avec les enfants de la table d'addition.

Au fur et à mesure que les enfants écrivent des égalités du type $6 = 2 + 4$ avec des sommes, ils remplissent un petit répertoire de résultats et également construisent des tables partielles, du type :

+	1	3	4
2	*2*	*5*	*6*
3	*4*	*6*	*7*

Quand un répertoire assez grand est constitué et que plusieurs tables partielles ont été construites, les enfants commencent à remplir la table d'addition. Ils reportent d'abord dans cette table les résultats déjà rencontrés. Ensuite, le maître désigne quelques cases à remplir : les enfants utilisent des moyens différents pour trouver la somme (dessins, doigts, cubes, sacs pris dans les boîtes, ...). A ce stade, les enfants choisissent le procédé qui leur convient le mieux. Enfin, il reste à «boucher les trous» pour remplir la table toute entière.

Cette construction de la table se fait en plusieurs étapes pour éviter que l'enfant ne la remplisse mécaniquement, ce qui se produit, par exemple, lorsqu'il constate que dans une ligne tous les nombres se suivent d'un en un.

On peut multiplier les exercices d'observation de la table ainsi construite, à moins qu'on ne préfère attendre pour cela le début du CE1 (le lecteur pourra relire à ce sujet l'article «Exemples d'activités autour de la table d'addition» de Grand $\mathbb{N}$ n° 8).

5.3 Utilisation de la table.

Cette table reste à la disposition des enfants, au CP, et même au CE1, tant qu'ils n'ont pas mémorisé les résultats. Ce n'est qu'après de nombreux exercices de calcul mental, de jeux et de problèmes mettant en œuvre l'addition, qu'au CE1 les enfants parviendront petit à petit à se passer d'elle.

VI – CALCUL MENTAL, JEUX, PETITS PROBLEMES.

Afin que les enfants utilisent l'addition et commencent à mémoriser certains résultats de la table, des jeux divers et des petits problèmes mettant en œuvre l'addition sont proposés. Plusieurs jeux décrits ci-dessous ont été expliqués dans l'article «Révision animée et joyeuse de l'addition au CE1» de Grand $\mathbb{N}$ n° 2, mais ce numéro étant maintenant épuisé, nous les rappelons rapidement ici.

6.1 Jeux de cartes.

Le maître fabrique des cartons sur lesquels il écrit des nombres sous des formes différentes par exemple 9, 4 + 5, 6 + 3, 7, 4 + 3, 5 + 2, 11, 6 + 5, 10 + 1, ... Il faut beaucoup de cartons afin que chaque élève en ait au moins quatre ou cinq devant lui. Le maître en garde également dans sa main.

Il présente un de ses cartons, et tous les enfants qui ont un carton sur lequel est inscrit le même nombre se lèvent. Chaque enfant énonce l'égalité correspondante. Par exemple, si le maître a montré le carton 2 + 7, l'enfant qui a levé le carton 3 + 6 explique : «deux plus sept égale trois plus six».

Quand le jeu est bien compris, on peut demander aux enfants de retourner les cartons sur leur bureau au lieu de les lever ; a gagné celui qui a retourné tous ses cartons le premier.

6.2 La bataille.

Avec les mêmes cartes, on peut jouer à la bataille ordinaire, soit la classe entière contre le maître, soit deux par deux.

6.3 Jeu de loto.

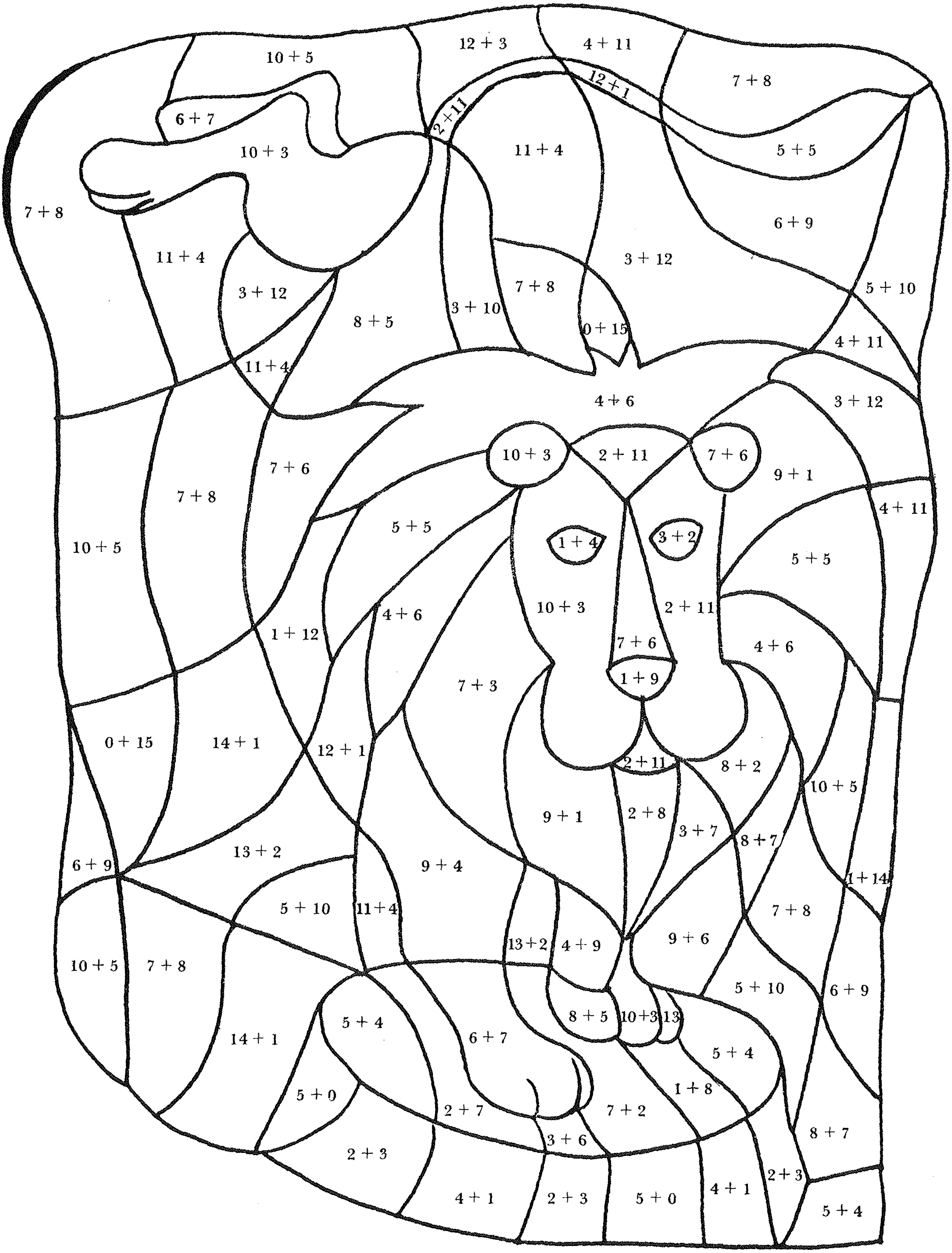
Voir article «Jeux Numériques» dans Grand IN n° 10.

6.4 Jeu du coloriage.

On distribue aux enfants le polycopié reproduit à la page suivante et on donne les consignes suivantes :

Colorier en

- jaune les cases sur lesquelles on lit le nombre 13
- marron les cases sur lesquelles on lit le nombre 10
- bleu les cases sur lesquelles on lit le nombre 5
- rouge les cases sur lesquelles on lit le nombre 9
- vert les cases sur lesquelles on lit le nombre 15


12 + 3
4 + 11
10 + 5
12 + 1
7 + 8
2 + 11
6 + 7
10 + 3
11 + 4
5 + 5
7 + 8
6 + 9
11 + 4
3 + 12
3 + 12
7 + 8
5 + 10
8 + 5
3 + 10
0 + 15
4 + 11
11 + 4
4 + 6
3 + 12
10 + 3
2 + 11
7 + 6
7 + 6
9 + 1
7 + 8
4 + 11
5 + 5
10 + 5
1 + 4
3 + 2
5 + 5
4 + 6
10 + 3
2 + 11
1 + 12
7 + 6
4 + 6
1 + 9
7 + 3
0 + 15
14 + 1
12 + 1
2 + 11
8 + 2
10 + 5
9 + 1
2 + 8
3 + 7
8 + 7
13 + 2
6 + 9
9 + 4
1 + 14
5 + 10
11 + 4
7 + 8
9 + 6
13 + 2
4 + 9
10 + 5
7 + 8
5 + 10
6 + 9
5 + 4
8 + 5
10 + 3
13
14 + 1
6 + 7
5 + 4
1 + 8
5 + 0
2 + 7
7 + 2
8 + 7
3 + 6
2 + 3
2 + 3
4 + 1
2 + 3
5 + 0
4 + 1
5 + 4

6.5 Petits problèmes.

L'enfant peut résoudre de petits problèmes. Mais comme la seule opération alors à sa disposition est l'addition, il faut éviter de lui poser uniquement des problèmes où il y a deux données, la réponse à trouver consistant à faire la somme de ces deux données, ce qui conduirait à un automatisme gênant.

Voici quelques exemples de petits problèmes que les enfants peuvent d'ailleurs proposer eux-mêmes :

– j'ai acheté quatre éclairs au chocolat et six tartelettes ; est-ce assez pour le goûter de sept enfants ?

– au zoo hier, j'ai vu cinq ours, trois girafes et deux serpents à sonnettes ; combien ai-je vu d'animaux à quatre pattes ?

– hier, maman m'a donné trois francs pour acheter du pain et un chausson aux pommes. Le pain coûte un franc ; j'ai tout dépensé ; combien coûte le chausson aux pommes ?

– j'ai treize billes, ma sœur en a dix-sept. Combien en a-t-elle de plus que moi ?

– j'avais dix bonbons, il m'en reste sept ; combien en ai-je mangé ?

– j'ai apporté un sachet de bonbons avec quinze caramels et quatorze bonbons acidulés. En ai-je assez pour distribuer aux vingt-cinq enfants de la classe ?

6.6 Ecritures d'égalités à compléter (possibles et impossibles) du type.

$3 + \ldots = 15$

$7 + 4 = \ldots$

$5 + \ldots = 3$

$14 = \ldots + 10.$

Remarque :

C'est volontairement que cet article ne traite ni de l'introduction de la technique de l'addition, ni de sa pratique, ni de l'étude des propriétés de cette loi (qui feront l'objet d'un prochain article intitulé «L'addition au CE»).

En effet, seule la somme de deux nombres était, jusqu'à maintenant, au programme du CP, la pratique de l'addition ne figurant qu'à celui du CE. Il nous semblerait par ailleurs néfaste d'interpréter dans un autre sens les nouvelles instructions ministérielles dont vous pourrez prendre connaissance dans ce même numéro.