REPERES - IREM. N° 129 - décembre 2022

UN PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE POUR CONJECTURER ET DÉBATTRE

Daniel ZIMMER
IRMP, GEM
Université catholique de Louvain
Louvain-la-Neuve, Belgique

Laure NINOVE
IRMP/IACS, GEM
Université catholique de Louvain
Haute École Léonard de Vinci
Louvain-la-Neuve, Belgique

Introduction

Les mathématiques sont trop souvent perçues par les élèves comme un royaume de vérités arrêtées et indiscutables, dont seul l'enseignant détiendrait les clefs. Nous pensons que le « débat scientifique » [1] est une bonne piste pour permettre aux élèves de donner du sens à leurs apprentissages en mathématiques, tout en étant partie prenante de ceux-ci.

Nous présentons dans cet article un problème de géométrie de l'espace propice au débat en classe, que nous avons eu l'occasion d'expérimenter à plusieurs reprises. Nous identifions plus loin un obstacle concernant la notion de plans perpendiculaires mis en lumière par ce problème.

Au-delà de la mise en évidence de cet obstacle, nous pensons que le problème présenté est particulièrement adapté pour permettre aux élèves d'entrer dans une démarche active d'argumentation et de recherche mathématique. Donner la parole aux élèves en classe leur permet d'adopter un rapport différent aux mathématiques et, nous l'espérons, de donner plus de sens à celles-ci. Les élèves n'ont bien sûr pas attendu qu'on leur donne la parole pour échanger avec leur voisin de classe et discuter du contenu du cours de mathématiques, mais le fait d'intégrer des temps de débat au sein même du cours donne plus de poids

1 Voir, à ce propos, les travaux de l'Irem de Grenoble dans Repères-Irem : Legrand (1993) et Lecorre (2015).

à leurs opinions et questionnements, somme toute légitimes.

Nous le verrons plus loin, l'activité a particulièrement motivé les élèves et a remis en question leur perception des mathématiques.

Nous pensons que le problème que nous présentons dans ces lignes peut être un bon premier contact avec la pratique du débat en classe, à la fois pour les élèves et pour un enseignant qui souhaiterait expérimenter avec cette pratique.

Dans la suite de ce texte, après la présentation et l'analyse *a priori* du problème proposé aux élèves, nous revenons sur quelques difficultés liées à la manipulation de représentations en perspective d'objets géométriques, puis effectuons un bref cadrage théorique à propos de l'argumentation et de sa relation à la démonstration mathématique. Ensuite, nous présentons et analysons plusieurs arguments surgis dans le discours des élèves lors de nos expérimentations du problème, avant d'évoquer le ressenti de ceux-ci par rapport à l'activité.

Présentation de l'activité

Avant de présenter l'énoncé, nous avons pris le soin de préciser aux élèves que le but de l'activité est de donner *leurs propres idées* sur le problème et d'échanger *entre élèves*. En particulier, les élèves doivent donc produire leurs propres *conjectures* liées à la situation. S'ils ne la connaissent pas, c'est peut-être l'occasion d'introduire la notion de conjecture, en leur précisant qu'ils peuvent proposer des énoncés dont ils ne sont pas absolument certains. Avant le début de l'activité, on donne également quelques règles[2] pour assurer le bon déroulement du débat :

— Tout le monde peut, mais personne ne doit, prendre la parole.

— On s'exprime pour être entendu de tous, en regardant ses auditeurs (pas l'enseignant).

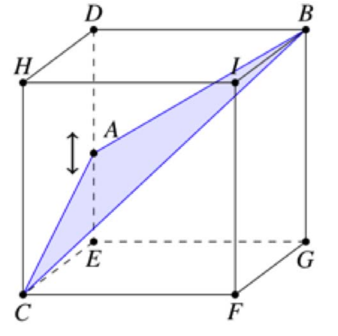
— On annonce sa thèse (« *Je pense que…* ») avant de l'argumenter (« *… parce que …* »).

— On écoute avec respect celui ou celle qui s'exprime.

— On s'interdit les arguments d'autorité (« *C'est vrai parce que je l'ai vu dans tel cours.* », « *C'est vrai parce qu'untel l'a dit.* », etc.).

Le but de ces règles n'est bien sûr pas de trop contraindre le débat mais, au contraire, de s'assurer qu'il se déroule de façon optimale et constructive. Une fois ces règles énoncées, le problème suivant[3] est présenté aux élèves, sous forme manuscrite au tableau. Pour faciliter l'entrée dans la réflexion, il peut aussi être utile de distribuer aux élèves une version photocopiée de l'énoncé.

Énoncé. La figure ci-dessous représente un cube. Le point A peut se déplacer sur l'arête $[DE]$. Que peut-on dire sur la nature du triangle ABC en fonction de la position du point A ? Quand sera-t-il rectangle, isocèle, acutangle, équilatéral, ... ?



2 Ces règles sont adaptées de celles de Gilbert (2020), elles-mêmes inspirées des règles du débat scientifique de l'IREM de Grenoble, voir Legrand (2017).

3 Le problème a été élaboré au sein du groupe de travail sur les débats scientifiques du Groupe d'Enseignement Mathématique (GEM) de Louvain-la-Neuve.

Après la présentation de l'énoncé, un bref temps de réflexion est laissé aux élèves, puis on leur propose de discuter un peu de leurs idées par petits groupes de deux, trois ou quatre, selon la disposition de la classe. C'est le moment de « débat privé » [4].

Vient ensuite l'annonce des conjectures, reprises au tableau par l'enseignant, animateur du débat. Nous avons veillé à ce que le temps de réflexion et de discussion « privée » qui précède cette récolte de conjectures ne dépasse pas cinq minutes, afin de garder la fraicheur et la naïveté des propositions des élèves : le débat en sera d'autant plus riche. On demande aux élèves de partager leurs conjectures sans les argumenter à ce stade, et de ne pas réagir s'ils ne sont pas d'accord avec une proposition, ceci afin que chacun puisse partager ses idées sans trop de pression : le but n'est pas *a priori* de trouver *la* bonne réponse, mais de proposer une réponse honnête, en accord avec sa propre opinion sur le problème. Cette phase de formulation des conjectures dure en général une dizaine de minutes environ.

Une fois les conjectures récoltées, on peut passer au débat proprement dit, le « débat public » [5], pour mettre en discussion la validité des différentes propositions. Le choix des conjectures à mettre en discussion et de l'ordre dans lequel s'effectue cette mise en débat peut être assumé par le professeur ou par les élèves. En cours de débat, nous procédons à de rapides votes à main levée concernant la valeur de vérité des propositions discutées, ceci afin de mettre en évidence les (dés)accords, et éventuellement aussi pour que les élèves qui ne se sentent pas suffisamment à l'aise pour prendre la parole participent quand même de façon active à l'activité. Pour cette partie, nous disposions d'un peu plus d'une heure.

Analyse *a priori* du problème

Le problème, tel qu'énoncé, s'adresse principalement à des élèves du secondaire supérieur (équivalent du lycée en France [6]). Il peut aussi s'adapter à des étudiants de l'enseignement supérieur, éventuellement dans une version plus « musclée », où l'on laisse varier un deuxième sommet du triangle (voir Zimmer (2023), à paraître).

Les deux caractéristiques variables intéressantes du triangle étudié sont, premièrement, l'amplitude de l'angle BAC et, deuxièmement, les longueurs des côtés $[AB]$ et $[AC]$.

Concernant les longueurs, il n'y a qu'un cas particulier : celui où le point A est le point milieu du segment $[DE]$. Dans ce cas, le triangle est isocèle. On peut le montrer en calculant les longueurs des deux côtés du triangle *via* une application du théorème de Pythagore, en comparant les triangles AEC et ADB ou, plus directement, en utilisant le caractère isométrique des faces du cube. Comme nous le verrons plus bas, développer une partie du cube permet de particulièrement bien visualiser la situation.

Ces arguments peuvent être adaptés pour montrer que les longueurs des côtés $[AB]$ et $[AC]$ ne sont en fait égales *que* lorsque A est le milieu de l'arête $[DE]$.

Concernant la valeur de l'angle BAC, une question très naturelle est de se demander quand le triangle sera rectangle. Ce n'est en fait le cas

4 Nous reprenons ici la distinction entre « débat privé » et « débat public » introduite par l'Irem de Grenoble. Voir par exemple Leroux et Lecorre (2007).

5 Cf. note précédente.

6 Nous adoptons dans ce texte le point de vue belge : le secondaire supérieur s'adresse en principe aux élèves de 15 à 18 ans. La sixième année secondaire correspond à la terminale (17-18 ans), la cinquième correspond à la première (16-17 ans) et la quatrième correspond à la deuxième (15-16 ans).

que lorsque $A = D$ ou $A = E$, c'est-à-dire quand le point mobile A se trouve en une extrémité du côté $[DE]$. Il y a de multiples façons de s'en convaincre : par exemple, calculer des longueurs de côtés avec le théorème de Pythagore et ensuite vérifier si ABC lui-même satisfait l'égalité du théorème, appliquer le théorème de Pythagore généralisé, effectuer le produit scalaire de deux vecteurs, ou, plus expérimentalement, manipuler une équerre dans l'espace. Le théorème de Pythagore généralisé permet de montrer que le cosinus de l'angle BAC dépend de la longueur de $[AD]$ (ou de $[AE]$), avec une amplitude maximum atteinte lorsque A est le milieu de $[DE]$. On trouve dans ce cas que le cosinus de l'angle BAC est égal à – 1/5, donc l'angle a une amplitude d'environ 101,54°. Ailleurs sur l'intérieur du segment $[DE]$, le cosinus reste négatif, donc l'angle reste obtus, hormis aux extrémités.

On peut également justifier que le triangle est rectangle en D et E en adoptant un point de vue de géométrie synthétique et en raisonnant en termes de droites et plans perpendiculaires. Toutefois, comme nous le verrons plus loin dans l'analyse des arguments proposés par les élèves, cette dernière méthode, utilisée à mauvais escient, peut induire en erreur.

Au cœur du problème se trouve en fait la notion de plans perpendiculaires et les propriétés des droites qu'ils contiennent. On peut naïvement penser que, puisque les côtés $[AB]$ et $[AC]$ du triangle ABC appartiennent à des plans perpendiculaires, ils sont forcément perpendiculaires. Faute d'arguments rapidement accessibles pour se convaincre du contraire, beaucoup d'élèves vont alors accorder du crédit à la conjecture « Le triangle est toujours rectangle ».

Tant que tous les élèves ne sont pas convaincus de la vérité de cette dernière conjecture, c'est tant mieux : la présence d'opinions contrastées exacerbe le besoin de produire des arguments et stimule la recherche.

En particulier, si une compréhension intuitive de la notion de plans perpendiculaires semble acquise par la plupart des élèves, les propriétés de droites contenues dans deux tels plans ne sont pas évidentes pour beaucoup d'élèves, comme le montrent nos observations.

Un contre-argument efficace pour avoir l'intuition que le triangle ABC n'est pas toujours rectangle est de laisser le point A sortir du côté $[DE]$ pour se mouvoir en dehors du cube, en restant sur la droite DE [7], comme sur la Figure 1.

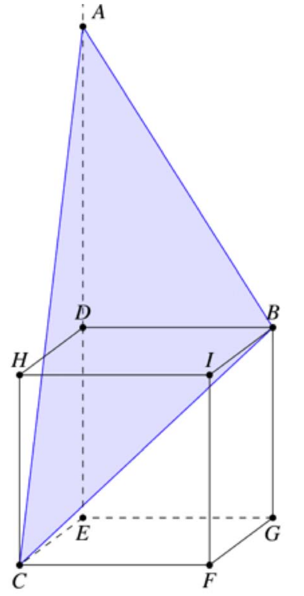


Figure 1 – Si le point A varie hors de $[DE]$ sur la droite DE, le triangle ABC est acutangle.

7 En France, on noterait cette droite (DE). En Belgique, on note une droite passant par deux points X et Y par XY. Pour dénoter la longueur du segment [XY], on écrit $|XY|$.

Dès que le point monte suffisamment haut, il apparait clairement que le triangle *ABC* est acutangle. En allant de plus en plus haut, l'angle se referme en fait de plus en plus. Ceci fournit un contre-exemple à opposer à l'argument stipulant que deux droites contenues dans des plans perpendiculaires sont perpendiculaires, puisque les côtés [*AC*] et [*AB*] du triangle *ABC* continuent d'appartenir respectivement aux plans perpendiculaires *BDEG* et *CEDH*. Étant donné que cet argument sort du cadre de l'énoncé, il y a toutefois peu de chance qu'il soit proposé par les élèves eux-mêmes. L'enseignant peut éventuellement l'utiliser comme relance si jamais les élèves tombent à court d'arguments sur la question de l'angle droit.

On pourra également s'intéresser au plan perpendiculaire au côté [*AB*] et passant par *A* et observer que, si *A* n'est pas une extrémité de [*DE*], ce plan est incliné et ne contient pas le côté [*AC*] (voir la Figure 2).

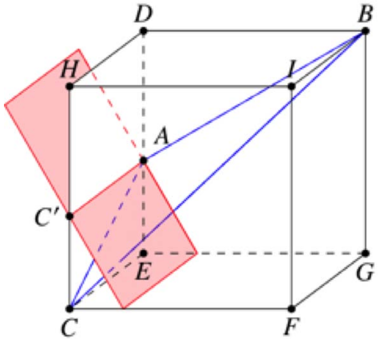


Figure 2 – En rouge, le plan orthogonal à la droite *AB*. On observe en particulier que [*AC*] n'appartient pas à ce plan : l'intersection du plan orthogonal avec *CEDH* est la droite *AC'*.

Un dernier argument que l'on peut mentionner est de se rappeler qu'un triangle est rectangle si et seulement si, lorsqu'on l'inscrit dans un cercle, un de ses côtés est un diamètre du cercle. Dès lors, dans le problème qui nous préoccupe, le triangle *ABC* ne sera rectangle en *A* que si *A* se situe sur un cercle de diamètre [*BC*]. On peut construire une sphère par la révolution d'un tel cercle autour de [*BC*]. Les seules intersections de cette sphère avec le cube sont les huit sommets de celui-ci, comme illustré à la Figure 3.

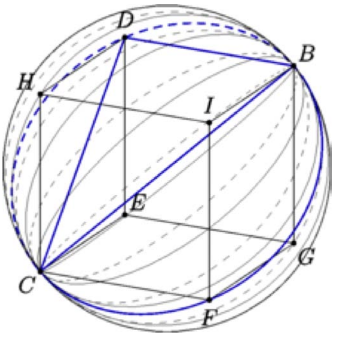


Figure 3 – Le cube peut s'inscrire dans une sphère dont le diamètre est une diagonale du cube. En bleu, le triangle *BCD* et le cercle, de diamètre [*BC*], dans lequel s'inscrit ce triangle.

Quelques difficultés liées à la représentation en perspective

Nous rappelons dans cette section quelques difficultés classiques liées à la géométrie de l'espace et en particulier à son appréhension *via* des représentations en perspective sur des supports bidimensionnels. Comme l'expliquent Bayart et *al.*, on peut résumer le principal défi du travail à partir de représentations en perspective comme suit :

« [C]ontrairement à ce qui se passe en géométrie plane, le fait de représenter une situation en 3D dans un plan en 2D se solde généralement par une perte d'informations accessibles à la vision. Par exemple, un angle droit n'apparaît pas nécessairement comme droit. » (1998, p. 20.)

À l'inverse, un angle droit sur une figure en perspective peut représenter un angle obtus ou aigu en réalité. En fait, il est impossible de conserver toutes les mesures d'angles lors d'une représentation en perspective dès lors que les droites représentées n'appartiennent pas toutes à un même plan. Dans le problème qui nous occupe, ceci a son importance concernant la mesure de l'angle BAC, au centre de nombreuses discussions.

De même, en perspective cavalière, les mesures de segments ne se trouvant pas dans un plan parallèle au plan de la représentation se trouvent modifiées. Cela aura son importance lorsqu'on cherchera à déterminer les positions du point A donnant lieu à des triangles isocèles ou équilatéraux.

La distinction des différents plans intervenant dans une représentation bidimensionnelle peut également poser problème chez les élèves. En particulier, certaines droites apparaissant comme sécantes dans leur représentation plane peuvent en réalité se trouver dans des plans parallèles distincts et n'avoir aucun point commun dans l'espace. Cette confusion a été observée dans certaines classes, comme nous le verrons plus loin dans le cas d'un élève situant un point à ce qu'il imagine être l'intersection des arêtes [DE] et [HI] du cube étudié.

En somme, le travail autour d'objets tridimensionnels oblige l'élève à se détacher de la représentation donnée sur la figure et à se représenter mentalement la situation étudiée. Plus encore qu'en géométrie plane, en géométrie spatiale la figure est à considérer en lien étroit avec ses propriétés énoncées. Les propriétés des objets étudiés n'apparaissant pas nécessairement de façon explicite sur le dessin, il devient particulièrement nécessaire de raisonner abstraitement et il est crucial d'associer la représentation de la figure à une image mentale plus complète. Une fois la figure associée à une bonne représentation mentale, l'élève peut raisonner à partir de celle-ci, par exemple pour envisager un autre point de vue que celui représenté sur la figure initialement présentée. Ce type de démarche a été mise en œuvre avec succès par certains élèves lors de nos observations.

Pour évoquer cette difficulté, on peut également parler d'un conflit entre le « vu » et le « su », comme l'évoque Parzysz (1988), cité (et traduit) par Bridoux et Nihoul (2015). Ce que la figure donne à *voir* n'est pas nécessairement en accord avec ce que l'on *sait* par ailleurs de l'objet géométrique étudié.

> Dès lors, « une difficulté des élèves en géométrie spatiale consiste très certainement à faire des allers-retours entre ce qu'ils interprètent à partir de l'observation de la structure géométrique et les propriétés mathématiques qui permettent de valider le raisonnement. » (Bridoux et Nihoul, 2015, p. 60.)

Argumenter, démontrer, convaincre ?

Selon la typologie de Raymond Duval (1993), reprise entre autres par Nicolas Balacheff (2019), on peut distinguer trois niveaux de discours intervenant dans la justification ou la défense d'une thèse : l'explication, l'argumentation et la démonstration, ces deux dernières étant deux avatars du raisonnement. Puisqu' « il n'est pas possible de convaincre sans donner à comprendre » (Duval, 1993, p. 38), la frontière entre argumentation et explication est poreuse, mais on peut différencier ces deux modes de discours en contexte par leurs motivations opposées. Selon cette typologie, la différence entre explication et raisonnement se situe dans leurs objectifs divergents : l'explication avance des raisons pour donner à comprendre une donnée que l'on a déjà accepté comme vraie *a priori*, alors que le raisonnement a précisément pour but d'asseoir la vérité de la thèse en jeu.

Au sein du raisonnement, la distinction entre argumentation et démonstration est essentiellement formelle, cette dernière étant nettement plus rigide. En effet, pour prétendre au titre de démonstration, un raisonnement se doit d'être *valide* : une démonstration est un enchaînement de pas de déduction, chacun recyclant les conclusions du précédent. En particulier, une telle rigueur d'organisation est possible parce que la démonstration se situe dans un cadre théorique : à chaque énoncé, en plus de son contenu, on associe une valeur de vérité héritée de son statut théorique (définition, théorème, etc.). C'est cette valeur de vérité théorique qui est utile au développement de la démonstration, le contenu des propositions passant en quelque sorte au second plan lors de l'organisation déductive du discours [8].

La démonstration mathématique s'organise par utilisation successive du *modus ponens*, aussi appelé opération de détachement : le champ théorique me dit, d'une part, que A implique B et, d'autre part, que A est vrai, donc j'en déduis la vérité de B. Peu importe dans ce développement le contenu des propositions A et B. Ce processus se répète alors jusqu'à l'obtention de la thèse visée comme conclusion d'un pas de déduction. Dans une argumentation, le discours n'étant pas encadré théoriquement, les modalités permettant à un argument d'étayer une thèse sont beaucoup plus complexes, bien qu'elles ne fassent intervenir que le contenu de ces arguments et pas une valeur de vérité abstraite qui leur serait reconnue par ailleurs. N'étant pas soumise au joug de la rigueur formelle, l'argumentation prend des formes multiples, se prêtant difficilement à une modélisation rationnelle simple. C'est ce qui fait sa richesse, mais complique son analyse systématique.

Dans l'article précité, Duval montre l'ampleur du fossé séparant argumentation et démonstration, et conclut que l'on ne peut espérer aboutir sans effort à l'intériorisation par les élèves de la démarche du raisonnement mathématique simplement par un travail sur l'argumentation :

> « Le développement de l'argumentation même dans ses formes les plus élaborées n'ouvre pas une voie vers la démonstration. [...] Cela ne signifie pas que l'argumentation n'ait pas sa place dans l'enseignement des mathématiques. Bien au contraire, elle doit même y être élargie, mais pour développer les compétences vis-à-vis de l'argumentation elle-même. » (1993, p. 60.)

Comme lui, nous sommes convaincus des bénéfices d'un travail autour de l'argumentation, et c'est là que nous situons la présente activité. Les échanges entre élèves, de par leur caractère informel, ressortent assez clairement de l'argumentation et non de la démonstration. Ce qui convainc les élèves d'une ou l'autre opinion est, selon toute vraisemblance, le contenu des arguments avancés et non un jeu formel de déduction logique. Pour autant, on espère que les échanges restent constructifs et pas trop éloignés d'une certaine rationalité mathématique.

Comme le souligne Balacheff (1991, 2019), c'est là ce qui constitue toute la fragilité du dispositif de l'argumentation mathématique en classe : le caractère social de l'activité peut favoriser le glissement des élèves d'une

8 À propos de cette duplicité du discours au sein de la démonstration, voir aussi Duval et Egret (1993).

finalité de démonstration vers une finalité de persuasion. Motivés par un objectif de compétition, certains élèves argumentent pour convaincre plutôt que pour démontrer rigoureusement. C'est pourquoi nous pensons qu'il faut rendre bien clair aux élèves, lors du cadrage initial de l'activité, que l'objectif du débat n'est pas d'emporter la conviction du plus grand nombre, mais bien d'approcher une vérité mathématique *via* un échange constructif d'idées. Nous aurons l'occasion de revenir sur cette problématique dans la section « Quelques freins au débat » ci-après.

La tension entre démonstration et conviction peut en fait déjà être détectée au sein même de l'activité de démonstration. Comme le met par exemple en évidence Gila Hanna (1990), on peut distinguer les « démonstrations qui démontrent » et les « démonstrations qui expliquent »[9]. Une démonstration formelle, malgré un caractère logiquement irréfutable, ne donne pas nécessairement à comprendre la thèse qu'elle démontre ; démontrer n'est pas toujours expliquer. De façon similaire, Evelyne Barbin (1988) attire notre attention sur la distinction entre « démonstration qui convainc » et « démonstration qui éclaire ». Pour Barbin, on peut être convaincu par la validité formelle d'une démonstration sans que celle-ci n'éclaire notre compréhension du résultat démontré. Elle explique, citant Bachelard (1949) :

> « Est-il facile de faire sienne la démonstration d'un autre ? Bachelard a écrit, à propos de la démonstration en géométrie : *"La démonstration a une autonomie si nette qu'on ne peut la recevoir du dehors, qu'il ne suffit pas d'en constater le résultat pour en saisir le sens (…). Pour comprendre il faut participer à une émergence"*. […] Chacun de nous en a fait l'expérience, a connu cette impression de ne pas avoir compris une démonstration qui coule de source et a senti le besoin de griffonner "sa" démonstration. *Il ne suffit pas d'être convaincu, on veut être éclairé.* » (Barbin, 1988, p. 28, nous soulignons la dernière phrase.)

Si l'on exprime cette tension dans les termes de Duval, on peut dire que la validité formelle du raisonnement développé dans une démonstration suffit pour convaincre, mais que c'est le contenu du raisonnement qui éclaire/explique. C'est-à-dire que c'est lorsqu'on lit une démonstration en tant qu'argumentation que l'on peut en saisir le sens.

Les deux autrices préconisent de privilégier autant que possible l'usage en classe de démonstration qui expliquent/éclairent. Dans le cas contraire, le risque est, selon elles, d'engendrer une perte de sens de l'activité de démonstration.

À la suite de ceux de l'Irem de Poitiers (Gaud et *al.*, 1988), les auteurs de l'Irem de Lyon (Arsac et *al.*, 1992, p. 6-7) distinguent également « démontrer pour convaincre » et « démontrer pour comprendre » (les auteurs de Poitiers écrivent « pour expliquer ») et précisent qu'ils inscrivent leurs travaux autour des problèmes ouverts et du débat mathématique dans le cadre de la démonstration pour convaincre uniquement. La catégorie « démonstration pour comprendre/expliquer » englobe cependant dans ces textes uniquement les démonstrations qui se rapportent à un résultat déjà évident par ailleurs, où le rôle de la démonstration est de montrer les liens logiques l'unissant à d'autres propositions connues. Il

9 Dans le texte original : « proof that proves » et « proof that explains ». Si Balacheff (2019) traduit par « preuve qui prouve » et « preuve qui explique », nous préférons utiliser le mot « démonstration », puisque c'est ce dont il s'agit, à la fois ici et dans le texte de Hanna. Le mot « preuve » peut renvoyer à d'autres types d'arguments asseyant la validité d'un énoncé, par exemple le résultat d'une expérimentation en physique. À propos de cette distinction entre preuve et démonstration, voir par exemple Gaud et al. (1988, p. 7-8).

nous semble que ceci ne recouvre pas entièrement le sens de démonstration qui explique/éclaire chez Hanna et Barbin.

Nous pensons que le désir de compréhension des élèves n'est pas à négliger. Lors de nos observations, les arguments des élèves visent à la fois à convaincre et à expliquer/éclairer. Nous verrons cependant qu'ils produisent aussi des arguments convaincants qui ne sont pas éclairants pour autant.

Échos des classes

Nous avons proposé l'activité dans quatre classes du secondaire général, trois de cinquième secondaire [10] et une de sixième secondaire [11], d'orientations assez diverses : deux classes suivent l'orientation scientifique avec six heures de mathématiques par semaine, une autre en a seulement deux.

Dans l'ensemble, les élèves se sont bien impliqués : ils ont proposé suffisamment de conjectures (entre cinq et huit par classe, que nous présentons en annexe ci-après) et les échanges d'arguments étaient animés.

Notons qu'il s'agissait à chaque fois de la première activité de débat en classe de mathématiques pour les élèves.

Sans surprise, les conjectures du type « Si $A = D$, alors le triangle est rectangle. » ou « Si $A = D$ ou E, alors le triangle ABC est rectangle. » sont énoncées chaque fois, ainsi que la conjecture « Si A est le milieu de $[DE]$, alors le triangle ABC est isocèle. » Ces conjectures ont ensuite été validées par le débat, par des arguments plus ou moins forts.

La question de savoir si le triangle est rectangle ou pas en général, lorsque le point A se trouve ailleurs qu'aux extrémités du côté $[DE]$, qui est elle aussi revenue au cœur des quatre débats, est plus compliquée à trancher.

Les élèves proposent bien entendu également des conjectures fausses, comme par exemple « Si $A = E$, alors le triangle ABC est isocèle. » ou « Si $A = D$, alors le triangle ABC est équilatéral. » La conjecture « Si A est le milieu de $[DE]$, alors le triangle ABC est rectangle. » a également été formulée plusieurs fois. Certains proposent « Le triangle est toujours rectangle » ou « Le triangle est toujours isocèle. » Dans une classe, un élève pense que le triangle ABC sera isocèle si A se trouve au point Y représenté sur la Figure 4. On voit ici la difficulté de distinguer les différents plans représentés dans une figure en perspective évoquée plus haut.

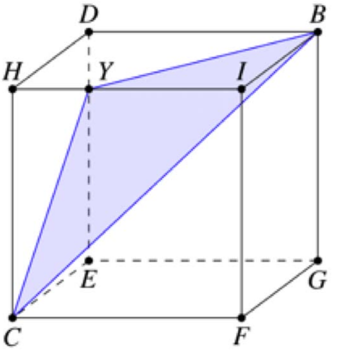


Figure 4 – Pour certains élèves, l' « intersection » de $[DE]$ et $[HI]$, appelée ici Y, semble être une position privilégiée.

Un élève propose « Plus A se rapproche de D, plus la distance $|AC|$ [12] augmente, et plus la distance $|AB|$ diminue. » Dans le même ordre d'idée, dans une autre classe, un élève conjecture que « Plus A se rapproche de D, plus l'angle CAB diminue. » et « Plus A se rapproche de E,

10 La première au lycée en France, cf. note 6 ci-dessus.

11 La terminale au lycée en France, cf. note 6 ci-dessus.

12 En Belgique, ceci est la notation usuelle pour la mesure d'un segment, cf. note 7 ci-dessus.

plus l'angle BAC diminue. » Malgré cette bonne intuition, il se dédira plus tard, momentanément convaincu que l'angle est toujours droit.

On observe occasionnellement des conjectures légèrement excentriques, par exemple « Si $A = D$, alors le triangle recouvre 50% du volume du cube ». Ces conjectures sont soit peu discutées, soit carrément écartées par la classe car jugées vides de sens, comme c'est le cas de celle-ci, car « *un triangle, c'est une aire* » !

Les élèves ont proposé un plus grand nombre de conjectures au départ dans les deux classes de « maths fortes », mais le débat n'en a pas moins été bien animé dans toutes les classes. En particulier, dans la classe de sixième, qui a peu d'heures de mathématiques à l'horaire, plusieurs conjectures sont encore apparues au cours du débat.

Observons que la classe de cinquième générale ayant quatre heures de mathématiques par semaine est celle qui a produit le moins de conjectures, mais c'est la seule qui est arrivée à déterminer clairement quand le triangle est rectangle et quand il n'est pas rectangle, d'abord avec un argument de manipulation d'équerre dans l'espace qui leur a fait pressentir que le triangle n'était pas rectangle pour toute position du point A sur $[DE]$, puis un argument de calcul de longueurs utilisant le théorème de Pythagore, qui leur a permis de conclure avec certitude.

Ajoutons qu'aucune classe n'est arrivée à un consensus entérinant une conjecture fausse ou rejetant une conjecture vraie, ce qui est plutôt rassurant.

Quelques démarches et arguments remarquables

Nous présentons à présent quelques arguments récurrents ou remarquables qui sont apparus lors de nos expérimentations en classe.

Proposer une meilleure solution

De façon assez récurrente dans nos observations, les élèves novices au débat ont tendance, pour contre-argumenter, non pas à démonter l'argument adverse et à pointer la faille dans celui-ci mais, plus prosaïquement, à proposer un argument meilleur à leurs yeux. Ils ne disent donc pas « Je ne suis pas d'accord avec toi parce que ceci dans ton raisonnement est faux », mais plutôt « Je ne suis pas d'accord avec toi, car pour avoir raison tu devrais plutôt dire ceci… » On espère voir peu à peu disparaître ce type d'argument par la pratique répétée de débats scientifiques en classe.

Par exemple, dans la troisième classe, une élève défend que le triangle est isocèle quand $A = E$ car, pour elle, les segments $[BE]$ et $[BC]$ sont de même longueur. Une autre élève s'oppose : « *Mais, tu crois pas que ça serait vrai si le point B était entre B et I ?* » En effet, le triangle formé en reliant les points E et C au milieu M du côté $[BI]$ est isocèle (voir la Figure 5, où un point de vue alternatif sur le cube rend évident la symétrie entre les côtés $[EM]$ et $[CM]$ de ce triangle).

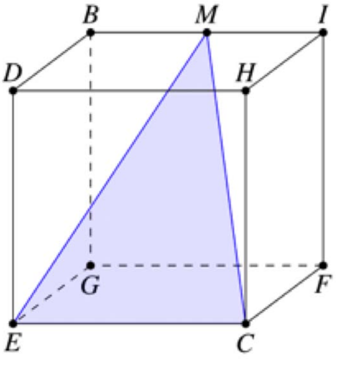


Figure 5 – Lorsque M est le milieu de $[BI]$, le triangle MEC est isocèle.

Penser à cette configuration où le triangle est assez clairement isocèle permet à l'élève qui avait proposé l'argument de réaliser son erreur. Elle répond : « *Ah oui, c'est comme si ça traversait qu'une face alors que là, ça en traverse deux.* » Si elle ne le formule pas en ces termes, elle semble avoir maintenant vu que le côté [*BE*] est la diagonale d'une face du cube et le côté [*BC*] une diagonale du cube, qui « traverse » donc une plus longue distance.

C'est d'ailleurs l'argument qui a été proposé dans les autres classes pour balayer cette conjecture. Par exemple, dans la première classe, on peut entendre un élève lancer : « *Un côté d'un carré, c'est plus petit qu'une diagonale d'un carré !* ». Dans la dernière classe, un élève montre sur le dessin au tableau : « *Cette longueur* [le côté [*BC*]], *elle traverse tout le cube, cette longueur* [le côté [*EB*]], *elle traverse une face, donc elle est plus courte et cette longueur* [le côté [*EC*]], *c'est un côté.* »

L'argument fonctionne, mais l'élève qui « contre-argumente » en proposant de regarder un autre triangle n'a fait ici que proposer une solution alternative, sans directement démonter ce qui clochait dans le raisonnement de sa camarade.

Isoler une partie d'une figure par la pensée

L'argument convaincant dans la première classe pour réfuter la conjecture « Si *A* se trouve "à l'intersection" *Y* de [*HI*] et [*DE*], alors le triangle *ABC* est isocèle. » (voir la Figure 4 plus haut) a été de « déplier » le cube : un élève a dessiné au tableau les faces *CHDE* et *BGED* à plat, comme sur la Figure 6. On « voit » alors clairement que le côté [*BY*] est plus court que le côté [*CY*].

Une élève s'est appropriée le raisonnement pour l'adapter au cas où $A = D$ ou E et se convaincre d'une nouvelle façon que, dans ce cas, le triangle n'est certainement pas isocèle. L'argument, particulièrement simple une fois exposé, est cependant remarquable en ce qu'il demande de fortement simplifier la figure de départ pour n'en retenir que les informations utiles pour résoudre la question posée.

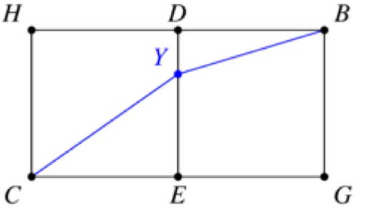


Figure 6 – Reproduction du dessin d'un élève pour justifier que les longueurs des côtés [*BY*] et [*CY*] sont différentes.

Une variante de cet argument a été donnée dans la dernière classe pour voir que le triangle est isocèle lorsque *A* est au milieu de [*DE*]. Là, le cube n'a pas été autant dépouillé, mais le dessin initial a quand même été simplifié pour appuyer l'argument. L'élève dessine au tableau un dessin semblable à la Figure 7 et explique : « *Les deux faces sont les mêmes, vu que c'est un carré, du coup si on fait la moitié jusque-là et la moitié jusque-là, ça fera d'office la même chose.* »

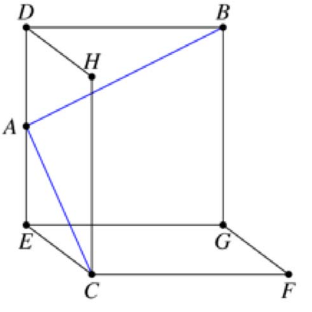


Figure 7 – Reproduction du dessin d'un élève pour montrer que *ABC* est isocèle lorsque *A* est le milieu de [*DE*].

Se ramener à des situations plus accessibles

Dans la classe de sixième, la conjecture du triangle isocèle pour *A* le point milieu de [*DE*] est la dernière à avoir été formulée, en cours de débat qui plus est. Un élève semble voir clairement ce qui se passe : « *La longueur CA, si A est au milieu, c'est la même que AB* », mais ça n'est pas clair pour tout le monde. Une autre élève n'est pas convaincue : « *Si le triangle était isocèle, il aurait fallu que ça soit ABG, ou alors AIF, ou alors ACH, …* » Après quelques temps, on arrivera à dire que la longueur de [*AG*] est la même que celle de [*AC*], or le triangle *ABG* apparaît comme clairement isocèle lorsque A est au milieu de [*DE*], donc on peut aussi conclure qu'*ABC* est isocèle dans ce cas.

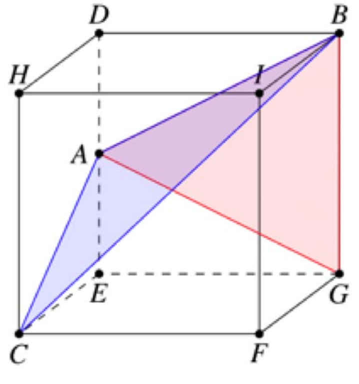


Figure 8 – Si A est le milieu de [*DE*], les élèves voient clairement que *ABG* est isocèle. Or, [*AG*] et [*AC*] ont même longueur.

Changer de point de vue

Dans la première classe, la conjecture du triangle toujours rectangle n'a pas été énoncée au départ, mais elle est apparue en cours de débat : « *Est-ce que ça serait pas un triangle rectangle peu importe où est A ?* »

L'argument proposé est de regarder seulement la face supérieure du cube, *BIHD*. Alors, le point *A* se trouve toujours « *dans la profondeur du point D* » et le triangle *ABC* semble confondu avec le triangle *DBH* qui, lui, est clairement rectangle car formant la moitié d'une face du cube (cf. Figure 9). « *Peu importe où est A dans la profondeur, l'angle sera droit.* »

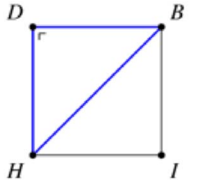


Figure 9 – La face supérieure du cube, ou le cube « vu du dessus ».

Cette illusion peut être déjouée, ou tout au moins mise en doute, en prenant le point de vue d'une autre face du cube. C'est ce qui a été fait dans la dernière classe : le même argument a été proposé, mais un autre élève a répliqué de regarder plutôt la face *DHCE*, du côté gauche du cube sur la figure initiale (voir Figure 10).

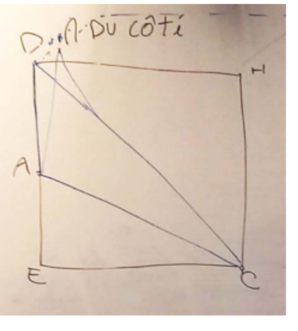


Figure 10 – Dessin d'un élève montrant le cube « vu de côté ».

Lorsque, par exemple, le point *A* se trouve au milieu de [*DE*], il est alors beaucoup moins clair que le triangle *ABC* est rectangle. Ce contre-argument ne sera pas suffisant pour conclure, mais sème le doute quant à l'affirmation précédente, qui semblait pourtant si séduisante.

Dans une autre classe, c'est également un changement de point de vue sur le cube qui a permis de convaincre les élèves que le triangle était rectangle lorsque *A* = *E*. Pour voir que le triangle *BCE* est rectangle en *E*, une élève propose de regarder le cube en mettant la face *CEDH* vers l'avant, comme sur la Figure 11. « *C'est juste que le triangle est penché, mais l'angle il est droit.* » Une élève acquiesce : « *Je trouve que c'est pertinent, ça se voit.* »

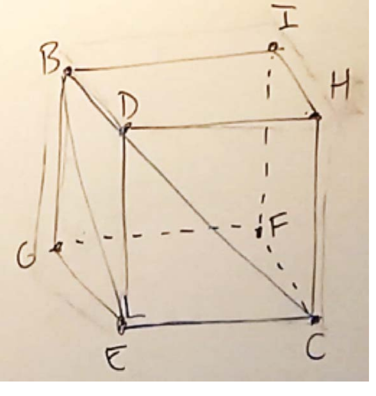


Figure 11 – Dessin au tableau montrant le cube tourné avec la face *CEDH* vers l'avant.

Penser un mouvement

L'élève qui a proposé de regarder le cube du dessus dans la première classe revient ensuite à la charge avec un autre argument : si on prend une équerre et qu'on la met à l'horizontale avec un côté de l'angle droit contre le tableau, puis qu'on la fait pivoter par rotation autour de ce côté (il montre avec une équerre), on voit que l'angle de l'équerre (et donc, dans son argument, du triangle considéré) reste droit.

Cet argument n'est pas applicable ici car, en fait, lorsque le point *A* se meut sur l'arête [*DE*], aucun côté du triangle *ABC* ne reste horizontal comme dans sa manipulation de l'équerre. L'argument peut donc s'appliquer quand *A* = *D*, car alors le côté [*AB*] = [*DB*] est bien horizontal, ou quand *A* = *E*, avec le côté horizontal [*AC*] = [*EC*], mais pas dans les autres cas. L'argument ne sera cependant pas remis en cause lors du débat.

Dans une autre classe, un argument semblable à celui-ci a été utilisé, mais cette fois à bon escient. Un élève propose : « *Si A = E, alors le côté du triangle sera sur le même plan que DBGE, du coup si l'angle DEC est rectangle, alors si le triangle pivote, ABC est aussi rectangle.* » Il s'ensuit une courte discussion, car les triangles *DEC* et *BEC* ne sont pas isométriques, donc on ne peut pas réellement amener le premier sur le second par une rotation. Cependant, les élèves sont convaincus que ce mouvement préserve bien l'angle droit et que l'argument permet quand même bien de voir que le triangle *BEC* est rectangle en *E*.

Compléter une figure

Dans la première classe, suite à l'argument de la vue du dessus et de l'équerre qui tourne, un élève qui n'était jusqu'alors pas intervenu dans le débat vient au tableau pour développer un nouvel argument pour montrer que le triangle *BCD* est rectangle : « *FCDB, ça fait un rectangle, du coup l'angle du rectangle c'est à chaque fois droit, du coup CDB, c'est droit.* » Pour rendre son argument encore plus clair, il dessine un cube tronqué, coupé le long du plan *FCDB*, comme sur la Figure 12 (page suivante). Un argument identique avec le rectangle *BICE* permet de montrer que le triangle *BCE* est rectangle.

L'élève qui a proposé l'argument semble pressentir que l'angle ne sera droit que dans ce cas, mais n'arrive pas à adapter son argument pour en convaincre le reste de la classe.

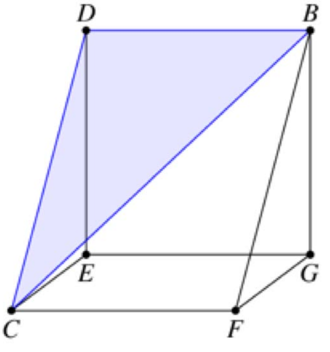


Figure 12 – Reproduction du dessin d'un élève pour appuyer l'argument du triangle dans le rectangle.

Invoquer un « théorème » erroné

Outre l'argument de la vue du dessus, un autre argument, convaincant pour beaucoup d'élèves, est donné pour conclure que l'angle *BAC* est toujours droit. Dans une classe, un élève, qui n'est jusqu'alors pas intervenu dans le débat, propose : « *Je pense que c'est tout le temps droit, parce que c'est deux droites qui font partie de plans perpendiculaires. [...] Deux droites, quelles qu'elles soient, elles sont dans ces deux plans-là, donc elles sont perpendiculaires.* » Un élève acquiesce : « *Mais du coup, ça revient à comme si on voyait d'au-dessus, comme je le disais.* » Il propose ensuite une généralisation : si on choisit un point dans le plan *CEDH* et un point dans le plan *DBGE* et qu'on les relie en passant par l'intersection des deux plans, on aura un angle droit.

Cet argument, qui reviendra dans pratiquement toutes nos observations, met en évidence une *confusion autour de la définition et des propriétés des plans perpendiculaires.* Il est aisé d'avoir une compréhension intuitive de ce que sont deux plans perpendiculaires : par exemple, deux murs dans un coin d'une pièce, un mur et le plafond, etc. Cette intuition est cependant délicate à traduire mathématiquement. La définition usuelle est la suivante : « Deux plans π et π' sont perpendiculaires lorsqu'il existe, dans π, une droite *d* perpendiculaire à π'. » Cette définition se base à son tour sur celle de droite perpendiculaire à un plan : « Une droite *d* est perpendiculaire à un plan π si et seulement si elle est perpendiculaire à toute droite *d'* contenue dans π qui lui est sécante. » Autrement dit, deux plans π et π' sont perpendiculaires lorsqu'il existe dans π une droite *d* telle que toute droite de π' sécante à *d* est perpendiculaire à *d*. Dans nos observations, la propriété que semblent appliquer les élèves serait plutôt : « Deux plans π et π' sont perpendiculaires lorsque *toute* droite *d* contenue dans π est perpendiculaire à π' », c'est-à-dire si toute droite *d* contenue dans π est orthogonale à toute droite *d'* contenue dans π'. Le quantificateur existentiel s'est transformé en quantificateur universel.

Cette dernière définition (fausse) de plans perpendiculaires correspond en fait à la notion de sous-espaces *orthogonaux*. On dit en effet que deux sous-espaces d'un espace euclidien sont orthogonaux si tout vecteur de l'un est orthogonal à tout vecteur de l'autre. Dans l'espace tridimensionnel, il est cependant impossible que deux plans soient orthogonaux, ce n'est possible qu'en dimensions 4 et supérieures.

Relevons aussi *la difficulté pour les élèves de détecter une droite perpendiculaire à un plan lorsque celle-ci n'est pas verticale.* Dire qu'une droite verticale est perpendiculaire à un plan horizontal et donc à toute droite horizontale ne leur pose aucun problème. En effet, à plusieurs reprises des élèves utilisent dans leurs raisonnements le fait que la droite *BG* est perpendiculaire au segment [*CG*] (appartenant au plan horizontal *CEGF*) sans ressentir le besoin de justifier cette perpendicularité. Ils l'utilisent par exemple pour appliquer le théorème de Pythagore au triangle BCG et calculer la longueur du côté [*BC*], sans que personne dans l'assistance ne demande de raison à cette orthogonalité autre que « ça se voit ».

Cependant, dans le cas de l'arête [*BD*], perpendiculaire au segment [*CD*], même si la situation est rigoureusement symétrique à la précédente (on peut passer de l'une à l'autre par rotation du cube), les élèves ne sont généralement pas convaincus de prime abord de cette perpendicularité.

Manipuler et expérimenter

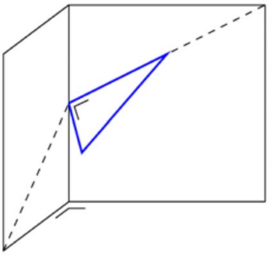


Figure 13 – En plaçant une équerre à l'intersection de deux plans perpendiculaires, si un côté de l'équerre est incliné et collé à un des plans, l'autre côté ne peut coller à l'autre plan.

Dans la première classe, pratiquement toute la deuxième heure de débat sera consacrée à la mise à l'épreuve de la conjecture du triangle toujours rectangle. Le débat s'essouffle un peu et les arguments sont moins fournis. Les élèves procèdent à pas mal de manipulations, notamment avec le tableau vert qui dispose d'un abattant monté sur charnières, qui permet de mettre la conjecture de l'angle toujours droit à l'épreuve : un élève dessine un point sur le tableau dans le plan du mur et un point sur le tableau abattant, les relie puis tente de refermer le tableau sur une équerre. Évidemment, il faut refermer le tableau sur un angle plus petit que 90° pour coller à l'équerre, mais ça n'ébranle pas sa conviction : « *C'est parce que c'est pas assez précis !* », « *C'est parce que l'équerre est pas assez précise, le matériel est pas assez bon.* »

Un élève adapte la manipulation avec une feuille pliée en deux et l'équerre dans le pli pour montrer que lorsque l'équerre bouge comme le triangle *ABC*, on doit refermer le pli selon un angle plus petit, donc l'angle du triangle ne sera pas toujours droit lorsque *A* se déplace. Cette fois, l'argument semble convaincre.

Finalement, un dernier vote sur la conjecture « Le triangle est toujours rectangle, peu importe où est le point *A* » dans cette classe donne onze « faux » sur seize et cinq élèves restent non convaincu·es. Peu après, un autre vote, à propos de la conjecture « Le triangle est rectangle lorsque le point *A* est au milieu de [*DE*]. » donnera cependant huit « vrai », cinq « faux » et trois indécisions.

La démarche de manipulation d'une équerre dans un coin s'est révélée plus probante dans une autre classe. Durant la discussion de la conjecture du triangle toujours rectangle, une élève explique qu'elle a essayé de mettre une équerre penchée entre deux plans perpendiculaires et que l'équerre ne « colle » pas aux plans. Cependant, si elle ajoute un bout de papier à l'équerre pour augmenter son angle de 90° à environ 100°, alors ça marche. Cet argument empirique convainc une bonne partie de la classe, mais pas tout le monde. Un élève reste persuadé que le triangle sera toujours rectangle et propose de le démontrer en faisant un calcul à l'aide du théorème de Pythagore.

Appliquer un théorème démontré en cours

L'argument de cet élève est d'appliquer le théorème de Pythagore aux triangles *ABD*, *ACE* et *BCG* pour calculer les longueurs des côtés du triangle *ABC*, montrer qu'ils satisfont l'égalité $|AB|^2 + |AC|^2 = |BC|^2$ et ainsi conclure, *via* la réciproque du théorème de Pythagore que le triangle *ABC* est rectangle. Il commence par le cas où *A* se trouve aux deux cinquièmes du côté [*DE*] et, à sa grande surprise, le calcul effectué au tableau montre que le triangle ne satisfait justement pas l'égalité des longueurs du théorème ! La Figure 14 reproduit ses annotations sur la figure du cube donnée au début de la séance.

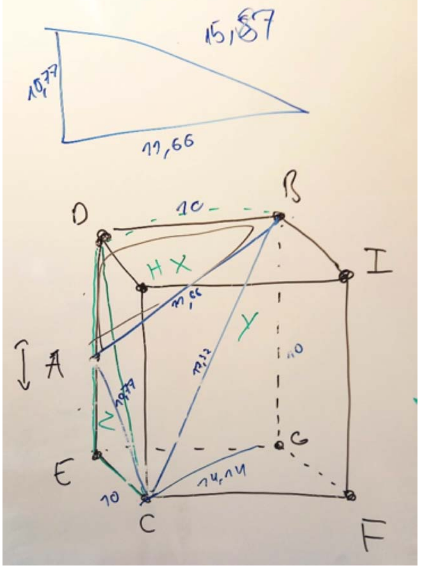


Figure 14 – Calcul des longueurs des côtés du triangle *ABC* effectué par un élève au tableau.

L'élève se rabat ensuite sur le cas où *A* est au milieu de [*DE*] et, à nouveau, constate que les calculs sont contraires à ce qu'il veut démontrer. Il est alors bien obligé et de reconnaitre que, visiblement, l'angle n'est alors pas droit et que son raisonnement, dans lequel il a entière confiance, démontre l'inverse de ce qu'il souhaitait prouver. Presque malgré lui, l'élève est convaincu par le calcul qu'il a effectué, mais, pour reprendre les termes de Barbin évoqués plus haut, ce raisonnement ne l'éclaire pas, alors même que c'est lui qui l'a produit.

Dans une autre classe, le théorème de Pythagore a été appliqué pour montrer que le triangle *BCD* ne pouvait être isocèle : un élève a calculé les longueurs des côtés [*BD*] et [*CD*] du triangle *BCD*, en prenant le côté du cube comme unité et en appliquant le théorème de Pythagore au triangle *CDE*.

Absence de transfert

Pour conclure le débat dans la première classe, le professeur habituel de la classe (qui n'était pas l'animateur du débat) fait le lien avec la matière du cours : la classe a terminé une semaine plus tôt le chapitre sur la géométrie vectorielle et le produit scalaire. Pour trancher la question de l'angle droit, il leur propose donc de traduire le problème en géométrie vectorielle et de calculer des produits scalaires pour voir quand l'angle est effectivement droit.

Il est assez frappant d'observer qu'aucun argument des élèves durant le débat n'a fait appel à ces connaissances fraichement acquises. L'observation se répète dans l'autre classe de cinquième « maths six heures » avec une autre enseignante.

Ceci rejoint le constat posé par Schoenfeld (1986), cité par Duval (1994, p. 136) :

« Certains exemples de recherches en cours indiquent que les étudiants sont compétents lorsqu'il s'agit de déduire et compétents lorsqu'il s'agit de construire, mais qu'ils *compartimentalisent*[13] souvent leurs connaissances de façons inappropriées… Il en résulte qu'une grande part de leurs connaissances reste inutilisée et que leurs performances dans la résolution de problème sont beaucoup plus faibles qu'elles ne pourraient (et ne devraient) être… – contrairement à ce qui est visé dans le curriculum mathématique – La *compartimentalisation inappropriée* des activités de *déduction* et des activités de *construction* est une conséquence directe de l'enseignement. »[14]

De fait, une fois l'indication donnée par le professeur, les élèves ont pu appliquer les connaissances fraichement acquises et ont pu montrer leur résolution du problème à leur professeur lors d'une séance de cours ultérieure.

Nos observations concernant ce problème particulier montrent un échec des élèves à réinvestir et transférer leurs connaissances de la géométrie vectorielle pour l'appliquer dans cette situation.

Dans les deux autres classes avec moins d'heures de mathématiques à l'horaire, où les vecteurs ne faisaient pas partie du programme, l'enseignante a utilisé d'autres outils pour revenir sur le problème.

Le ressenti des élèves

Quelques jours après l'activité, les élèves ont été invités à remplir un bref questionnaire anonyme en ligne les interrogeant sur leur ressenti.

1a. As-tu l'habitude de prendre la parole en classe ?

☐ Oui ☐ Non ☐ Autre…

1b. As-tu pris la parole « publiquement » pendant le débat ?

☐ Oui ☐ Non

1c. Pourquoi (pas) ?

2a. Lorsque tu as pris la parole, t'es-tu senti·e écouté·e ?

☐ Oui ☐ Non ☐ Autre…

2b. Explique.

3a. Qu'as-tu appris lors de cette activité de débat ?

3b. Souhaiterais-tu qu'il y ait plus de débats dans les cours de mathématiques ?

3c. D'autres commentaires ?

Figure 15 – Le questionnaire proposé aux élèves *via* un formulaire en ligne. Le deuxième volet du questionnaire (questions 2a et 2b) n'était accessible que si l'élève avait répondu « Oui » à la question 1b.

Un ressenti globalement positif

Dans l'ensemble, beaucoup d'élèves semblent avoir apprécié l'activité et souhaiteraient refaire d'autres débats en classe de mathématiques. À la question « Qu'as-tu pensé de cette activité de débat ? », un·e élève répond : « *Elle était chouette et montrait que les mathématiques pouvait*[15] *servir à autre choses que remplir des feuilles.* » Un·e autre répond : « *C est très intéressant. Ça fait réfléchir chacun de son*

13 Nous dirions plutôt « compartimentent », mais conservons la traduction de Duval.

14 C'est Duval qui souligne.

15 Nous avons fait le choix de conserver les réponses des élèves telles quelles, fautes d'orthographe comprises.

côté et puis permets de résoudre une question que une seule personne aurait sûrement pas réussi à résoudre seul. »

Au-delà des apprentissages purement liés aux mathématiques, on peut relever un bénéfice concernant le développement d'une pensée critique et de compétences citoyennes. Un·e élève répond par exemple *« Qu'on pouvais persuader des gens de choses fausses si on avait d'asser bon arguments* » à la question « Qu'as-tu appris lors de cette activité de débat ? ». Un·e autre répond : « *Que il faut parler même si ton idée est complètement contradictoire à tout les autres car dans mon cas,j avais raison depuis le début.* »

Les enseignants des classes participantes ont relevé positivement la motivation des élèves. Dans certains cas, des élèves qui n'interviennent jamais ou très peu au cours se sont pris au jeu du débat mathématique et ont participé activement à l'activité. Dans une classe, un élève dont le professeur titulaire « *n'a jamais entendu le son de la voix* » a pris part au débat et fait des propositions constructives.

Quelques freins au débat

Le ressenti n'est cependant pas entièrement positif pour tous les élèves, l'absence de résolution facile à digérer et certifiée par le professeur engendre chez plusieurs élèves une certaine frustration. Les élèves ont du mal à accepter la responsabilité de la validité des énoncés discutés et on peut par exemple entendre au cours de certains débats : « *À la fin du cours, on aura les* vraies *réponses ou pas ?* », ou encore « *J'en ai marre de réfléchir, donnez-nous les* vraies *réponses.* » Pour ces élèves, c'est toujours l'enseignant qui détient les « vraies » réponses et qui doit les donner. Dans la plupart des cas, ils n'ont pas tort, mais on aimerait qu'ils arrivent à décider par eux-mêmes si leurs réponses sont « vraies » ou pas. La classe de sixième, d'orientation « faible » en mathématiques, est celle qui a le plus souffert de ce manque de réponses. Contrairement aux autres classes, où tous les élèves répondant au questionnaire en ligne ont répondu « oui » à la question « Souhaiterais-tu qu'il y ait plus de débats dans le cours de mathématiques ? », dans cette classe, six élèves répondent « oui » et cinq répondent « non ». Ce qui ressort de leurs commentaires est que l'activité était un peu trop étirée en longueur pour eux et pas suffisamment cadrée.

Dans la première classe de cinquième, lorsque l'argument de la « vue du dessus » est présenté par un élève au tableau pour appuyer l'affirmation que le triangle est toujours rectangle, trois filles, qui ne sont pas intervenues dans le débat, secouent vigoureusement la tête, indiquant leur désaccord. Bien qu'elles ne soient pas intervenues dans la discussion, elles semblent bien impliquées, l'une d'entre elles a construit un cube en papier pour visualiser la situation. Nos tentatives de les inclure dans la discussion et de les inviter à partager leur éventuelle objection resteront vaines : elles refusent de prendre la parole. On se trouve ici face à un frein à la pratique du débat en classe : que faire avec les élèves qui n'osent pas ou ne veulent pas prendre la parole ? Une issue peut être d'organiser des débats privés en cours de discussion, pour que les idées des élèves moins à l'aise avec la prise de parole soient reprises par d'autres et partagées malgré tout avec le reste de la classe par ce biais. Après tout, l'objectif n'est pas nécessairement que chacun·e prenne la parole devant le groupe, mais bien que toutes les opinions et tous les arguments de élèves soient partagés.

Dans la classe de sixième avec deux heures de mathématiques par semaine, certains élèves se désintéressent complètement du débat. D'autres peinent à trouver des justifications à ce qu'ils avancent et on peut entendre des élèves brader leur conviction : « *Si tu me dis que c'est vrai, moi j'te crois hein.* »

Une piste de relance pour susciter des justifications plus profondes peut être de demander aux élèves ce qu'ils diraient à un élève d'une autre classe, qui n'a pas assisté au débat, pour le convaincre que ce qu'ils avancent est vrai.

À un autre moment du débat, on entend « *Du coup on est tous d'accord ? – Au pire on se trompe ensemble, hein, les gars !* » Nous rejoignons à ce propos l'Irem de Lyon, qui prend comme règle du débat mathématique : « En mathématiques, on ne peut pas décider de la validité d'un énoncé en s'appuyant sur le fait que la majorité des personnes présentes sont persuadées que cet énoncé est vrai. » (Arsac et *al*., 1992, p. 14). La conviction en soi n'est pas le but du débat, mais plutôt la production d'arguments amenant à justification satisfaisante et, *in fine*, une meilleure compréhension.

Conclusion

Malgré les quelques nuances apportées dans la section précédente, nous restons persuadés des bénéfices de cette activité. Mieux, nous pensons que le manque de motivation et l'attitude désabusée et défaitiste de certains élèves pourraient être, sinon entièrement évités, au moins limités par une pratique régulière du débat, amenant une plus grande responsabilisation des élèves par rapport au contenu du cours de mathématiques. Bien sûr, cette pratique demande un investissement certain de la part de l'enseignant et peut rencontrer une résistance de la part des élèves, qui doivent quitter leur posture familière pour entrer dans une recherche active, mais le gain en sens et en profondeur des apprentissages nous semble certain.

En particulier, nous pensons que la pratique du débat scientifique pourrait contribuer à améliorer la confiance en eux des élèves, les pousser à se départir du besoin incessant de validation de l'enseignant, et les guider vers une plus grande autonomie.

De surcroît, les activités de débat développent les compétences d'argumentation des élèves, compétences à la fois utiles pour préparer le terrain à l'apprentissage de la démonstration (sinon par l'entrée naturelle dans une démarche de raisonnement déductif, au moins par l'émergence d'une nécessité de démonstration) et pour permettre leur mobilisation dans d'autres domaines.

Références

Gilbert Arsac, Gisèle Chapiron, Alain Colonna, Gilles Germain, Yves Guichard et Michel Mante (1992). *Initiation au raisonnement déductif au collège.* Lyon, Presses universitaires de Lyon.

Gaston Bachelard (1949). *Le rationalisme appliqué.* Paris, Presses universitaires de France.

Nicolas Balacheff (1991). Benefits and Limits of Social Interaction: The Case of Mathematical Proof. Dans A. J. Bishop, S. Mellin-Olsen et J. van Dormolen (éd.), *Mathematical Knowledge: Its Growth Through Teaching* (p. 175-192), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Nicolas Balacheff (2019). Contrôle, preuve et démonstration : trois régimes de la validation. Dans J. Pilet et C. Vendeira (éd.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2018* (p. 423-456). Paris, IREM de Paris.

Evelyne Barbin (1988). La démonstration mathématique : significations épistémologiques et questions didactiques. *Publications de l'Institut de recherches mathématiques de Rennes*, n° 5, p. 1-34.

Claire Bayart, Claude Gos, Chantal Hindelang, Marie-Anne Keyling, Claude Mathern, Monique Ortlieb, Jean-Claude Rauscher et Gabrielle Roesch (1998). Voir et raisonner : à la conquête de l'espace au collège, *Repères-IREM*, n° 33, p. 19-36.

Stéphanie Bridoux et Céline Nihoul (2015). Difficulté des élèves à interpréter des constructions dans l'espace. Une étude de cas. *Petit x*, n° 98, p. 53-76.

Raymond Duval (1993). Argumenter, démontrer, expliquer : continuité ou rupture cognitive. *Petit x*, n° 31, p. 37-61.

Raymond Duval (1994). Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. *Repères-IREM*, n° 17, p. 121-138.

Raymond Duval et Marie-Agnès Egret (1993). Introduction à la démonstration et apprentissage du raisonnement déductif. *Repères-IREM*, n° 12, p. 114-140.

Dominique Gaud, Jean-Paul Guichard, Madeleine Marot, Claude Robin et Micheline Robin (1988). *Géométrie de 4ème - Fascicule 1. Initiation à la démonstration.* Poitiers, IREM de Poitiers.

Thérèse Gilbert (2020). Comparaison de carrelages et d'ensembles infinis. *Losanges*, n° 49, p. 27-39.

Gila Hanna (1990). Some Pedagogical Aspects of Proof. *Interchange*, vol. 21, n° 1, p. 6-13.

Thomas Lecorre (2015). Définir : une nécessité à construire. Le cas de la définition de la limite d'une fonction. *Repères-IREM*, n° 100, p. 51-64.

Marc Legrand (1993). Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse. *Repères-IREM*, n° 10, p. 123-158.

Marc Legrand (2017). *Désir de démocratie et d'humanisme authentiques et nécessité d'opérer une révolution dans notre façon de concevoir le savoir et son partage à l'école. Un exemple : « le principe du débat scientifique en cours »*. Forum de l'Éducation. Accessible sur https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/debat-scientifique-documents-en-cours-d-elaboration-602875.kjsp, consulté le 7 avril 2022.

Liouba Leroux et Thomas Lecorre (2007). Le « Débat scientifique » en classe. Comment donner à l'élève une responsabilité scientifique réelle en cours de mathématique ? *APMEP-Plot*, n° 19, p. 2-15.

Bernard Parzysz (1988). "Knowing" vs "Seeing", Problems of the Plane Representation of Space Geometry Figures. *Educational Studies in Mathematics*, n° 19, p. 79-92.

Alan H. Schoenfeld (1986). On having and using geometric knowledge. Dans J. Hiebert (éd.), *Conceptual and Procedural Knowledge: the case of Mathematics* (p. 225-263). Hillsdale NJ, Erlbaum.

Daniel Zimmer (2023). *Narration et analyse, sous le prisme de la logique, d'un débat mathématique vécu en formation d'enseignants*, à paraître dans Nexus, vol. 3.

ANNEXE

Conjectures des élèves

Ci-après, nous présentons le relevé des conjectures proposées dans les différentes classes. Nous les retranscrivons telles qu'écrites au tableau durant l'activité, dans l'ordre dans lequel elles sont apparues lors de la discussion en classe.

Classe 1 (5ème générale, 6h/semaine de mathématiques)

1. Si $A = D$ ou E, alors le triangle ABC est rectangle.
2. Plus A se rapproche de D, plus l'angle CAB diminue.
3. Si A est au milieu du côté $[DE]$, alors ABC est isocèle.
4. Plus A se rapproche de E, plus l'angle BAC diminue.
5. Si A se trouve au point Y [« l'intersection » de $[HI]$ et $[DE]$, qui ne s'intersectent pas dans l'espace, mais se croisent sur le dessin en 2D, cf. Figure 4], alors le triangle ABC est isocèle.
6. Si $A = D$ ou E, alors le triangle est isocèle.
7. Si A est au milieu de $[DE]$, alors le triangle ABC est rectangle.

Classe 2 (5ème générale, 6h/semaine de mathématiques, même école que la précédente)

1. Si $A = D$ ou E, alors le triangle ABC est isocèle.
2. Plus A se rapproche de D, plus la distance $|AC|$ augmente, et plus la distance $|AB|$ diminue.
3. Si $|DA| = |EA|$, alors le triangle ABC est isocèle.
4. Si $A = D$, alors le triangle est rectangle.
5. Si $A = D$, alors le triangle recouvre 50% du volume du cube.
6. Le triangle est toujours rectangle.
7. Le triangle est toujours isocèle.
8. La longueur $|AC|$ est anti-proportionnelle à la longueur $|AB|$. [Une élève dit « comme des vases communicants. » Cette conjecture ne sera pas vraiment discutée par la classe.]

Classe 3 (6ème générale, 2h/semaine de mathématiques + 2h de renforcement)

1. Si $A = D$, alors le triangle est rectangle.
2. Si $A = E$, alors le triangle est isocèle.
3. Si $A = D$, alors le triangle est équilatéral.
4. Si A est au milieu de $[DE]$, alors le triangle est rectangle.
5. Si le point A est « comme sur le dessin », alors le triangle est obtusangle.

Trois conjectures ont été ajoutées à la liste au tableau en cours de discussion, durant la première moitié du débat.

6. Si $A = E$, alors le triangle est rectangle.
7. Peu importe où est A sur $[DE]$, le triangle sera rectangle.
8. Si A est au milieu de $[DE]$, le triangle est isocèle.

Classe 4 (5ème générale, 4h/semaine de mathématiques, même école que la précédente)

1. Si A est au milieu de $[DE]$, le triangle est isocèle.
2. Si A est au milieu de $[DE]$, le triangle est rectangle.
3. Si $A = E$ ou $A = D$, le triangle est rectangle.
4. Le triangle est toujours rectangle.
5. Si $A = D$, le triangle est isocèle.