DEVELOPPER LE CALCUL REFLECHI CHEZ LES ELEVES DE CYCLE 4

Vers un enseignement du calcul mental et du calcul en ligne en cycle 4

Axes de formation pour des équipes de mathématiques de collège sur le calcul mental et le calcul en ligne, à partir des résultats à l'évaluation Cedre 2019 Mathématiques en fin de collège

Céline HUGOT
Lise MALRIEU
Vincent BERNIGOLE (DEPP)

Résumé : L'article commence par un état des lieux et un rappel des enjeux du calcul réfléchi dès le cycle 2, s'appuyant à la fois sur les textes institutionnels et l'état de la recherche en didactique, et illustrés par l'analyse des résultats à quelques items issus de l'évaluation Cedre 2019 fin de collège. La deuxième partie donne des axes pour une formation des équipes de mathématiques de collège sur le calcul réfléchi : les données de Cedre 2019, en lien là encore avec la recherche en didactique, permettent de sensibiliser à son importance et d'aller vers quelques préconisations de ce que pourraient être de « bonnes pratiques » d'un enseignement qui développe le calcul réfléchi en cycle 4, avec pour leviers principaux le calcul mental et le calcul en ligne.

En préambule, nous allons présenter quelques informations utiles sur le dispositif Cedre.

Le Cedre[1], Cycle des Évaluations Disciplinaires Réalisées sur Échantillon, est un dispositif conçu et conduit par la DEPP (Direction de l'Evaluation, de la Prospective et de la Performance). Depuis 2003, le Cedre établit des bilans nationaux des acquis des élèves en fin d'école et en fin de collège au regard des objectifs fixés par les programmes officiels. Il porte sur les savoirs et savoir-faire des élèves. Chaque année, Cedre porte sur l'un des cinq domaines disciplinaires. Les mathématiques ont été évaluées en 2008, 2014 et 2019. Ces bilans permettent de répondre à la question de l'évolution du niveau des élèves au fil du temps. Le Cedre a pour objectif de mesurer plus finement les savoirs et savoir-faire des élèves, en les positionnant sur une échelle de performances balayant différents niveaux de maîtrise, des plus élémentaires aux plus complexes.

L'évaluation Cedre 2019 fin de collège a été réalisée en mai 2019, sur ordinateur, par un échantillon représentatif d'élèves de troisième à la rentrée scolaire 2018-2019 des collèges publics et privés sous contrat de France.

1 cf. https://www.education.gouv.fr/cycle-des-evaluations-disciplinaires-realisees-sur-echantillon-cedre-en-fin-d-ecole-et-fin-de-2870

310 collèges ont été sélectionnés en vue d'une représentativité nationale, soit un échantillon de plus de 8 000 élèves. L'évaluation était constituée de 269 items au total.

Chaque élève a dû répondre à une soixantaine de questions de mathématiques réparties en deux séquences de 50 minutes. La première séquence commence par une dizaine de questions de calcul mental à réaliser en 5 minutes (30 secondes par calcul) pendant lesquelles la calculatrice n'est pas autorisée.

Les questions sont de formats divers, majoritairement des questions à choix multiples et des réponses construites courtes.

L'évaluation porte en partie sur les programmes publiés en 2015 et mis en application à la rentrée scolaire de 2016. Chaque item est catégorisé selon un thème, une compétence, un type de tâche, et la complexité *a priori* de la tâche à réaliser.

Les modèles de réponse à l'item, utilisés dans cette évaluation, permettent de positionner sur une même échelle les paramètres de difficulté des items et les niveaux de compétences des élèves. Cette correspondance permet de caractériser les compétences maîtrisées pour différents groupes d'élèves.

Les élèves sont répartis en six groupes de niveaux en fonction de leurs performances : des groupes de plus faible niveau (groupe < 1 et groupe 1) au groupe le plus performant (groupe 5). Les compétences de chaque groupe sont décrites dans une échelle de performances dont on peut trouver la description dans la note d'information de la DEPP [1].

De même, chaque item est associé à un des six groupes, en fonction des probabilités estimées de réussite selon les groupes. Précisons pour terminer qu'un item est dit « maîtrisé » par un groupe dès lors que l'élève ayant le score le plus faible du groupe a au moins 50 % de chance de réussir l'item. Les élèves du groupe ont alors plus de 50 % de chance de réussir cet item.

1. — Le calcul réfléchi : un maillon essentiel

Commençons par définir les notions sur lesquelles nous nous appuierons dans cet article.

1. 1. *Définitions*

Calcul mental d'après le document-ressource « Le calcul aux cycles 2 et 3 » [2] :

> *Le calcul mental est une modalité de calcul sans recours à l'écrit si ce n'est, éventuellement, pour l'énoncé proposé par l'enseignant et la réponse fournie par l'élève.*

Calcul en ligne selon la même source [2] :

> *Le calcul en ligne est une modalité de calcul écrit ou partiellement écrit. Il se distingue à la fois :*
>
> *• du calcul mental, en donnant la possibilité à chaque élève, s'il en ressent le besoin, d'écrire des étapes de calcul intermédiaires qui seraient trop lourdes à garder en mémoire ;*
>
> *• du calcul posé, dans le sens où il ne consiste pas en la mise en œuvre d'un algorithme, c'est-à-dire d'une succession d'étapes utilisées tout le temps dans le même ordre et de la même manière indépendamment des nombres en jeu.*
>
> *L'énoncé est donné par le professeur à l'oral ou à l'écrit ; le résultat est donné par l'élève à l'écrit.*

Fait numérique

> *Résultat automatisé, qui doit être mémorisé par les élèves et, par suite, disponible immédiatement.*

Les faits numériques sont indiqués dans les programmes officiels [3] et [4].

Procédure automatisée (dit aussi « module élémentaire de calcul ») :

« Une procédure est *automatisée* quand elle est restituée par l'élève pour résoudre un calcul sans que celui-ci la reconstruise » (Fisher 1987, Boule 1997), cités par Butlen et Charles-Pézard [5].

Automatisme :

Procédure automatisée ou fait numérique.

Calcul automatisé :

Calcul qui s'opère par une récupération en mémoire d'un fait numérique ou d'une procédure directement applicable.

Calcul réfléchi d'après le document d'accompagnement de 2002 [6] :

Le calcul réfléchi est d'une autre nature que le calcul automatisé. Il ne s'agit plus de récupérer directement en mémoire un résultat ou une procédure directement applicable, mais d'élaborer une procédure adaptée au calcul particulier qui est proposé. Stratégie et raisonnement sont alors sollicités.

Dans [7], Piolti-Lamorthe et Roubin en donnent la définition suivante :

Nous appelons calcul réfléchi, un calcul mental ou écrit qui nécessite de mettre en œuvre une stratégie. Ainsi nous considérons que ce n'est pas parce que l'on fait des calculs que l'on se situe seulement dans une activité automatique comme peut l'être la mobilisation des tables de multiplication ou de procédures algorithmiques qui consistent à poser une opération. Il y a donc du raisonnement dans cette activité de calcul réfléchi. C'est d'ailleurs ce que souligne bien le texte du document d'accompagnement des programmes consacré au calcul numérique. « Le calcul mental réfléchi nécessite l'élaboration de stratégies de calcul personnelles. Il met donc en jeu l'initiative, le raisonnement et des connaissances (explicites ou non) sur la numération et les propriétés des opérations. »

Le calcul réfléchi et le calcul automatisé sont mobilisés conjointement dans le calcul mental et le calcul en ligne. Le calcul mental et le calcul en ligne constituent par conséquent des leviers fondamentaux pour faire progresser les élèves aussi bien en calcul automatisé qu'en calcul réfléchi. Venons-en maintenant aux enjeux dans la formation mathématique des élèves, à partir du cycle 2.

1. 2. Les enjeux

Voici un extrait du document-ressource de cycle 4 « Calculer » [8] :

Outre l'acquisition de techniques efficaces et le développement d'automatismes indispensables à la réalisation autonome d'une activité mathématique, l'apprentissage du calcul au cycle 4 vise :

- *La familiarisation avec les nombres (notamment leurs différents registres de représentation) et les opérations, mais aussi la découverte de nouveaux nombres (les relatifs) et de nouveaux objets mathématiques engagés dans les calculs (les lettres) ;*
- *Le développement de stratégies de vérification et de contrôle permettant de développer l'esprit critique et de favoriser une utilisation raisonnée des instruments de calcul.*

Clairement identifiée par la recherche en didactique, l'importance du calcul réfléchi dès le cycle 2 n'est plus à démontrer. Les habiletés qui y sont travaillées, notamment par des modalités de travail en calcul mental et en calcul en ligne, ont une influence déterminante et directe sur la réussite dans le domaine « Nombres et calculs » mais aussi en résolution de problèmes ([5], p.15), du cycle 2 au cycle 4, et, fait moins connu des enseignants, une influence certaine et indirecte sur la réussite en calcul littéral. Nous allons maintenant détailler ces différents points.

1. 2. a *Le rôle du calcul mental et du calcul en ligne dans la compréhension du nombre (aspects décimal et positionnel, multiplicité des écritures)*

Dans un article sur la numération décimale en CE2 [9], Tempier montre que si l'aspect positionnel de la numération est bien souvent construit chez les élèves, l'aspect décimal reste un enjeu majeur d'enseignement : les relations entre les unités de numération (1 dizaine = 10 unités, 1 centaine = 10 dizaines, etc.) ne sont pas mobilisées par tous les élèves, soit parce qu'elles ne sont pas connues, soit parce qu'elles ne sont pas assimilées. Pour préciser un peu, la relation « 1 dizaine = 10 unités » est souvent la seule disponible, les autres (les « groupements de groupements » comme 1 centaine = 10 dizaines) semblent être beaucoup plus difficiles à enseigner et à intégrer par les élèves.

Or la maîtrise du seul aspect positionnel peut parfois donner l'illusion aux enseignants que l'élève a compris la numération décimale ; le moment de l'apprentissage des nombres décimaux en début de cycle 3 constitue à ce titre un temps de diagnostic, qui est souvent celui de la désillusion pour les enseignants. Les erreurs constatées dès le CM1 (datant parfois d'une mauvaise compréhension du système décimal qui remonte au CP) risquent donc d'être très ancrées et s'avérer difficiles à éradiquer.

L'item suivant a été proposé à l'évaluation Cedre 2019, pour des élèves de 3^{e} :

Calculer mentalement puis écrire le résultat :

2,5 + 3,7 + 1,2 + 0,3 =

Source : MENJS-DEPP, enquêtes Cedre, compétences en mathématiques en fin de collège en 2019.
Champ : élèves de troisième générale de France métropolitaine + DROM, Public + Privé sous contrat.

Cet item de calcul mental (pour rappel demandé en 30 secondes sans calculatrice mais sans interdire le brouillon), est réussi par 51,5 % des élèves (indiquant la réponse attendue : 7,7), soit à peine plus de la moitié. 13 % n'ont pas répondu. Si l'élève n'a pas une conception erronée d'un nombre décimal (deux entiers séparés par une virgule), une procédure efficace, qui s'appuie sur la maîtrise de l'aspect décimal de la numération et sur la maîtrise en acte des propriétés de commutativité et d'associativité de l'addition, consiste à associer les nombres « qui vont bien ensemble », par exemple 3,7 avec 0,3 (complément à l'unité supérieure). Cette procédure peut être associée à un raisonnement typique de numération, consistant à travailler dans une unité de numération pertinente, ici en dixièmes : ajouter 3,7 et 0,3, c'est ajouter 37 dixièmes et 3 dixièmes.

Voici l'analyse des réponses erronées les plus significatives :

— **autres réponses du type 7, …** (5,5 %) : amorce de l'addition avec partie entière montrant un lien fait avec la partie décimale (une unité supplémentaire) mais partie décimale non gérée.

— **réponse 6,7** (3,4 %) : erreur montrant une bonne gestion de la partie décimale mais sans répercussion sur la partie entière.
— **réponse 6,17** (2,6 %) : erreur typique d'une conception du décimal par juxtaposition de deux entiers.
— **autres réponses du type 6, …** (2,4 %) : amorce de l'addition par la partie entière, avec partie décimale non gérée.

En nous appuyant sur Tempier [9], nous considérons que cet item est caractéristique de la maîtrise de l'aspect décimal de la numération.

Ainsi, en prenant en compte le taux de non-réponse (TNR) et le taux d'élèves dont les réponses sont fausses mais non analysables (autour de 20 %), le Cedre 2019 souligne qu'en fin de cycle 4, au moins 30 % des élèves ne maîtrisent pas l'aspect décimal de la numération.

Par ailleurs, cette absence de maîtrise concerne essentiellement les élèves les plus en difficulté en mathématiques, puisqu'il n'est réussi à plus de 50 % qu'à partir du groupe 3.

Cela signifie notamment qu'au moins 30% des élèves, en fin de 3^{e}, ne comprennent pas correctement l'objet mathématique manipulé ici, à savoir le nombre décimal.

Parce qu'il nécessite d'élaborer des stratégies prenant en compte les propriétés des nombres et des opérations, le calcul réfléchi oblige à sortir des automatismes d'écriture et à se confronter à leur sens. Pour l'item ci-dessus, donné en calcul mental en classe, une mise en commun avec une explicitation des propriétés utilisées (par un calcul en ligne, par exemple) permettrait de rappeler la connaissance « dix dixièmes égalent une unité » et mettrait l'accent sur l'importance de la reconnaître et de la mobiliser quand on ajoute des nombres décimaux. Elle pourrait aussi permettre d'activer ou de réactiver des raisonnements axés sur un choix pertinent d'unité de numération (ici, le dixième).

1. 2. b *Le rôle du calcul réfléchi dans le passage de l'arithmétique à l'algèbre*

Le calcul en ligne constitue un élément majeur dans la continuité entre l'activité arithmétique et algébrique.

Dans [10], Pilet et Grugeon-Allys nous montrent l'existence d'une activité mathématique à la frontière entre les domaines arithmétique et algébrique, appelée numérico-algébrique, qui, lorsqu'elle est peu développée pourrait expliquer des difficultés dans l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre. Cette activité, parce qu'elle met en jeu des concepts communs aux domaines arithmétique et algébrique joue un rôle crucial dans l'entrée dans l'algèbre.

En premier lieu, selon les travaux de Vergnaud [11], la transition entre l'arithmétique et l'algèbre est caractérisée par une double rupture : « D'une part, l'introduction d'un détour formel dans le traitement des problèmes habituellement traités intuitivement, d'autre part, l'introduction d'objets mathématiques nouveaux comme ceux d'équation et d'inconnue, de fonction et de variable » (p. 189). »

Cette seconde rupture porte sur le statut des objets et notamment celui de l'égalité. En arithmétique, l'égalité est utilisée de façon dominante comme annonce de résultat dans le sens où elle sert à effectuer les calculs, souvent de gauche à droite, jusqu'à obtention d'un nombre, donc sans signe opératoire. Or le traitement des expressions algébriques repose sur le statut d'équivalence de l'égalité, ce qui demande une évolution du statut du signe d'égalité chez les élèves.

En ce sens, lors de calculs réfléchis, la nécessité de réécrire les nombres et les expressions numériques pour réduire le coût des calculs conduit à une utilisation du signe d'équivalence de l'égalité (par exemple, $25 \times 32 = 25 \times 4 \times 8 = 100 \times 8 = 800$) qui se rapproche de son usage en algèbre. Les réécritures prennent appui sur les propriétés des opérations, des nombres et de la structure du système de numération (Butlen et Charles-Pézard, [5]).

Concernant les réécritures multiplicatives, analysons l'item suivant, proposé à l'évaluation Cedre 2019, pour des élèves de 3e :

> Calculer mentalement
> puis écrire le résultat :
>
> $25 \times 400 =$

Source : MENJS-DEPP, enquêtes Cedre, compétences en mathématiques en fin de collège en 2019.
Champ : élèves de troisième générale de France métropolitaine + DROM, Public + Privé sous contrat.
© DEPP

Réponse attendue : 10 000.

(Taux de réussite : 47,5 % et
Taux de Non-Réponse : 16 %, groupe 4).

Cet item est peu réussi (moins de la moitié des élèves) : les faits numériques $25 \times 4 = 100$ et $25 = 100 \div 4$ ne sont majoritairement pas mobilisés.

On peut classer les réponses erronées en trois catégories :

- Les puissances de 10, de 10 à 10 000 000 (11,4 %) ;
- Les nombres déclinés à partir de 4 : 40 ; 400 etc. (4 %) ;
- Les nombres déclinés à partir de 25 : 250 ; 2 500 etc. : il est probable que les élèves aient amorcé le calcul par 25×100. (3 %).

Il existe de nombreuses procédures pour parvenir au résultat :

1) passer par la décomposition $25 \times 4 \times 100$ puis associer deux des trois facteurs :
25×4 ou 25×100 ou 4×100.
Ces trois catégories d'erreurs semblent liées chacune à un choix d'association initial, qui n'a pas abouti du fait que l'élève n'a pas réussi à gérer le troisième facteur.

2) passer par le fait numérique $25 = 100 \div 4$ puis chercher à calculer $(100 \div 4) \times 400$.

Remarquons que le fait numérique $25 \times 4 = 100$ ou le fait numérique $25 = 100 \div 4$ ne sont alors potentiellement mobilisés que par les 11,4 % d'élèves qui ont abouti à une puissance de 10.

3) passer par un raisonnement sur les unités de numération : 25×400, c'est 25×4 centaines, donc 100 centaines, puis convertir en unités.

Au-delà du statut d'équivalence de l'égalité, les expressions numériques et les expressions algébriques ont aussi une valeur monstrative ; elles ne donnent pas à voir les mêmes informations ou propriétés. Par exemple, les écritures « $4 + 8$ » et « $2^2 + 2^3$ » du nombre 12 ne donnent pas les mêmes informations : si on veut montrer que 12 est la somme de deux puissances consécutives, on choisira l'expression « $2^2 + 2^3$ » ; si on veut ajouter 12 à 96, on choisira plutôt « $4 + 8$ ». La tâche demandée à l'élève doit guider son choix.

Le calcul réfléchi vise un calcul raisonné fondé sur le choix de calculs plus efficaces et économiques *via* une réécriture d'expressions numériques à l'aide des propriétés des nombres et des opérations, comme $25 \times 32 = 25 \times 4 \times 8$ (pour se ramener à $25 \times 4 = 100$) ou $11 \times 8 = 10 \times 8 + 8$ (pour utiliser la distributivité en acte). Cette réécriture d'expressions numériques conduit selon les termes de Chevallard [12], à faire apparaitre une « *information monstrative pertinente* » au regard du but visé.

Voici un exemple d'item mobilisant le calcul réfléchi, proposé à l'évaluation Cedre 2019, pour des élèves de 3^e^ :

Calculer mentalement puis écrire le résultat :

$11 \times 23 =$

Source : MENJS-DEPP, enquêtes Cedre, compétences en mathématiques en fin de collège en 2019.
Champ : élèves de troisième générale de France métropolitaine + DROM, Public + Privé sous contrat.
© DEPP

Réponse attendue : 253.

(Taux de réussite : 35 % et Taux de Non-Réponse : 14,5 %, groupe 4).

Les procédures attendues sont :

$$(10 + 1) \times 23 = 10 \times 23 + 1 \times 23 = 230 + 23 = 253$$

ou

$$11 \times (20 + 3) = 11 \times 20 + 11 \times 3 = 220 + 33 = 253$$

La première procédure étant plus efficace (calculs plus simples, s'appuyant sur une procédure automatisée : produit d'un entier par 10, ou sur une lecture de 10×23 en 23 dizaines, moyennant une mobilisation de la commutativité de la multiplication).

Cet item est très majoritairement traité (à 85 %), mais il n'y a que 35 % d'élèves qui répondent correctement.

Les erreurs significatives 233 (8,6 %), 230 (7,1 %), 23 (5,4 %) et 241 (3,9 %) semblent indiquer uniquement une utilisation de la distributivité à partir de la décomposition du 11 en 10 + 1 mais qui n'a pas été menée correctement à son terme :

Réponses 23 et 230 : seule la multiplication de 23 par 1 ou par 10 a été faite ; il se peut aussi que l'élève s'appuie uniquement sur la notion d'ordre de grandeur pour l'exécution de son calcul.

Réponse 233 : erreur de calcul dans la dernière opération 230 + 23, peut-être due à une surcharge cognitive (mémorisation de 230 et de 23 puis somme à effectuer) ; on peut souligner ici que cette hypothèse conduit à s'interroger sur la place donnée au brouillon par les élèves.

Réponse 241 : erreur dans l'utilisation de la distributivité ; 23 a bien été multiplié par 10, mais c'est le 11 qui a été multiplié par 1 puis ajouté à 230.

1. 3. *Les « indispensables » d'un enseignement construit en calcul réfléchi*

1. 3. a *Calcul mental*

Partons du constat fait par Butlen et Charles-Pézard [5] :

> Dans le cas où ils n'ont pas bénéficié d'un enseignement construit en calcul mental, les

« *élèves préfèrent utiliser des procédures sûres (qui fonctionnent dans tous les cas et conduisent, à condition d'être menées à terme, au résultat attendu) mais coûteuses plutôt que des procédures mieux adaptées au calcul en jeu. Ces dernières nécessitent une prise en compte de la spécificité des nombres intervenant dans le calcul et de leurs propriétés. De plus, leur domaine de validité est limité.* » ([5] p.9).

Les différentes recherches qu'ils ont menées sur le calcul mental en fin de cycle 2 montrent à la fois « *un défaut d'adaptation dû à l'installation de procédures automatisées mais aussi un défaut de performances dû à un manque de procédures de calcul automatisées. Ces manques révèlent, selon nous, une connaissance insuffisante des nombres, des opérations et de leurs propriétés.* » [5] p.9).

Nous retrouvons ici en germe les éléments développés précédemment dans le paragraphe sur les enjeux. Il apparaît donc quelques objectifs incontournables d'un enseignement du calcul mental qui vise à développer le calcul réfléchi chez les élèves, et ce, quel que soit le niveau de classe.

➢ *Mémorisation de faits numériques et de procédures automatisées (automatismes)*

Il s'agit d'organiser une mémorisation en qualité et en quantité, avec pour objectif la constitution d'une bibliothèque personnelle d'automatismes de l'élève, la plus fournie possible et la mieux référencée possible.

Citons Artigue [13] :

« *Ce qui fait la puissance des mathématiques, enfin, ce n'est pas seulement le fait qu'elles se dotent d'objets calculables et de systèmes de représentations supportant efficacement ce calcul, c'est aussi que ce calcul puisse s'algorithmiser et s'automatiser. Le calcul est ainsi pris dans un autre mouvement puissant, celui de sa mécanisation qui, lorsqu'elle est réussie, permet de l'exécuter sans intelligence, le réduisant à une succession automatisée de gestes. Cette mécanisation est nécessaire à l'avancée de la connaissance et il y a donc, dans la plupart des calculs, une alchimie subtile entre intelligence et routine.* »

Selon Butlen et Charles-Pézard [5], il n'y a pas d'accès au calcul réfléchi sans cette mémorisation, notamment dans des calculs complexes.

Les auteurs attirent par ailleurs notre attention sur le fait qu'une bibliothèque d'automatismes peu fournie peut avoir des effets contre-productifs, en maintenant l'élève dans des comportements eux aussi automatisés. C'est ce qu'ils appellent « *le paradoxe de l'automatisme* » ([5] p.10). Ce qui est recherché en calcul réfléchi n'est pas l'automatisme en tant que tel ; ces automatismes, parce qu'ils sont facilement mobilisables par l'élève, sont destinés à servir la capacité à élaborer puis à mettre en œuvre une stratégie de calcul efficace en tirant parti au mieux des nombres donnés, de leurs propriétés et de celles des opérations en jeu.

C'est pourquoi dans l'analyse des items de Cedre 2019 fin de collège proposé sur le site de la DEPP [2], nous nous sommes intéressés à la fois aux items constitués d'automatismes et aux items nécessitant du calcul réfléchi.

2 Les analyses de ces items sont détaillées ici https://education.gouv.fr/calcul-reflechi-calcul-mental-calcul-en-ligne-au-cycle-4-que-nous-apprennent-les-donnees-de-la-depp-343441

➢ *Mise en place d'une progression de calcul mental à l'année, voire sur le cycle, articulée avec les séquences menées par ailleurs, comprenant des temps identifiés d'apprentissages, d'entraînement et d'évaluations.*

En calcul mental comme en toute chose ou presque, c'est par l'entraînement et la sollicitation répétée, sous des formes variées, que les connaissances et procédures s'ancrent, deviennent puis demeurent disponibles. Un fait numérique non utilisé pendant plusieurs mois peut être oublié, ce qui nécessitera un réapprentissage, certes souvent plus rapide que le premier, mais qui fera provisoirement perdre en efficacité sur des calculs complexes.

Les orientations pour l'enseignement du calcul mental (automatisé et réfléchi) et l'intérêt de l'utilisation du calcul en ligne comme trace écrite des procédures qui sont travaillées en calcul mental, sont largement diffusés en primaire et sont reproduits dans de nombreux supports de formation départementaux, comme le dossier de calcul mental écrit par le Groupe départemental 63 (académie de Clermont-Ferrand) [14]. En revanche, il nous semble qu'avant la parution du document-ressource de lycée « Automatismes » en 2019 , aucune préconisation explicite n'était donnée pour l'enseignement du calcul mental dans le secondaire, si ce ne sont des principes très généraux comme *« à la suite de l'école primaire, le collège doit en particulier permettre aux élèves d'entretenir et de développer leurs compétences en calcul mental » (extrait des programmes de 2008),* passant ainsi sous silence que le calcul mental gagnerait à être pensé comme un véritable enseignement au service du calcul réfléchi, et mis en lien avec d'autres champs mathématiques, notamment la numération et la résolution de problèmes. Nous développerons ce point en deuxième partie.

1. 3. b *Calcul en ligne*

Comme le calcul mental, le calcul en ligne s'appuie sur la mémorisation des faits numériques et procédures, sur la connaissance des nombres et des propriétés des opérations.

Il présente une plus-value par rapport au calcul mental puisque le passage à l'écrit permet une explicitation :

— Des propriétés opératoires (associativité, commutativité, …) ;
— De la signification du « = » ;
— De la signification des parenthèses ;
— Des priorités opératoires.

C'est une modalité de travail qui favorise l'intelligence de calcul :

« *L'élève est appelé à « faire parler » les nombres, c'est-à-dire envisager diverses écritures, des décompositions additives, multiplicatives ou utilisant les unités de numération* » [16] .

1. 3. c *Le rôle du calcul approché et des ordres de grandeur.*

Comme le souligne Michèle Artigue [8]

« *les besoins sociaux comme scientifiques du calcul aujourd'hui ne sont pas les même qu'hier. Ils se sont notamment déplacés de capacités d'exécution à des capacités d'anticipation, de contrôle et d'adaptation* ».

En ce sens, le calcul approché joue un rôle complémentaire au calcul exact. L'ordre de grandeur permet d'accepter le résultat, de l'envisager ou au contraire de le rejeter, de l'écarter.

Les conditions de passation de Cèdre 2019 (30 secondes par calcul) excluaient ce rôle complémentaire.

Ainsi, quand nous supposons que parfois des élèves ont raisonné par ordre de grandeur, nous émettons l'hypothèse que l'élève a fait ce choix, uniquement dans la mesure où le calcul exact lui est inaccessible. Selon Artigue [17], « *le calcul approché est vu comme un calcul par défaut, celui auquel on se résout quand le calcul exact s'avère impossible* ».

Si on reprend l'exemple précédent 11×23, l'élève qui ne maitrise pas la distributivité, considère alors le calcul approché 10×23 et donne la réponse 230.

De même, pour le calcul $2{,}5 + 3{,}7 + 1{,}2 + 0{,}3$, les réponses aboutissant aux entiers 6 et 7 peuvent se justifier par un calcul approché.

Vous trouverez les analyses complètes de certains items de calcul mental posés lors de l'évaluation Cedre 2019 fin de collège sur le document de la DEPP [3]. Partant des éléments mathématiques et didactiques de cette première partie et des résultats du document précédent, nous nous proposons maintenant de nous intéresser à la formation des équipes de cycle 4 sur cette question vive.

2. — Axes pour une formation des équipes de mathématiques de collège : comment faire travailler le calcul réfléchi en classe ?

Dans la modification des programmes du cycle 4 publié dans le BO n°30 du 26 juillet 2018, il est dit en préambule [4] :

Une place importante doit être accordée à la résolution de problèmes. *Mais pour être en capacité de résoudre des problèmes, il faut à la fois prendre des initiatives, imaginer des pistes de solution et s'y engager sans s'égarer en procédant par analogie, en rattachant une situation particulière à une classe plus générale de problèmes, en identifiant une configuration géométrique ou la forme d'un nombre ou d'une expression algébrique adaptée. Ceci suppose de disposer* d'automatismes *(corpus de connaissances et de procédures automatisées immédiatement disponibles en mémoire). À la fin de l'explicitation des attendus de fin de cycle de chacun des quatre premiers thèmes du programme figure une liste de ces automatismes à développer par les élèves. L'acquisition de ces automatismes est favorisée par la mise en place d'activités rituelles, notamment de calcul (mental ou réfléchi), ayant pour double objectif la stabilisation et la pérennisation des connaissances, des procédures et des stratégies.*

Le programme donne donc des préconisations et une direction mais peu d'éléments opérationnels. On trouvera ces éléments, qui sont autant de bases de réflexion pour des équipes de cycle 4, dans le document-ressource lycée « Automatismes » paru en 2019 [15].

Ce document est destiné prioritairement, dans ses contenus mathématiques, à l'enseignement en lycée. Toutefois, les aspects opérationnels qu'il donne sont aussi valables pour le cycle 4 (p. 2) et les pistes qui sont données (pp. 3 et 4) pour leur mise en œuvre méritent d'être également portées à la connaissance de tous les enseignants de mathématiques de collège.

Le document ressource de cycle 4 « Calculer » paru en 2016 [8] donne aussi des éléments de réflexions variés mais succincts.

3 Les analyses de ces items sont détaillées ici https://education.gouv.fr/calcul-reflechi-calcul-mental-calcul-en-ligne-au-cycle-4-que-nous-apprennent-les-donnees-de-la-depp-343441

Les principes sur lesquels repose l'enseignement du calcul mental en primaire sont définis à partir des idées suivantes (adaptées de [14]) :

— La distinction entre :
  - ➢ la mémorisation des faits numériques et leur mobilisation,
  - ➢ l'enseignement et l'automatisation des procédures (celles de calcul mental ou en ligne, et non pas les algorithmes de calcul posé) qui utilisent les résultats mémorisés (faits numériques) ;

— Le travail sur les procédures de calcul mental, automatisé et réfléchi, qui inclut leur enseignement systématique ;

— La progressivité et la cohérence de cet enseignement ;

— Les liens à assurer avec les autres enseignements en mathématiques.

Mobiliser les faits numériques et procédures automatisées régulièrement et de façon organisée est indispensable. Il s'agit aussi de s'assurer que les procédures soient collectivement travaillées, c'est-à-dire que les faits numériques et les propriétés des nombres et des opérations sur lesquelles elles s'appuient soient explicités et qu'elles donnent éventuellement lieu à une trace écrite. On voit ici l'importance que peut prendre le calcul en ligne comme medium et en même temps comme objet de travail. Tout ceci nécessite une réflexion poussée en amont sur les contenus, l'ordre et les modalités, ainsi que sur l'articulation avec les contenus travaillés dans le cadre des séquences de la progression annuelle.

Nous pensons que c'est un axe fort de formation que de laisser du temps à des équipes de réfléchir ensemble afin de construire une progression de calcul mental/en ligne sur le cycle, en partant des principes suivants :

— La nécessité d'entretenir cette mémoire, notamment en proposant des calculs complexes s'appuyant sur certains de ces faits numériques et procédures ;

— La nécessité d'identifier des objets d'apprentissage et de fixer des objectifs progressifs ;

— La nécessité de concevoir une progression de calcul mental chaque année, adossée aux programmes, pour atteindre les objectifs identifiés et permettant en outre :
  - ➢ de travailler sur les prérequis d'une séquence, avant celle-ci, pour limiter le coût d'entrée et pouvoir se concentrer sur les nouvelles notions,
  - ➢ de favoriser en classe des acquisitions de faits numériques ou de procédures mobilisées dans des calculs complexes, pendant une séquence (sous forme de questions-flash de début de séance par exemple),
  - ➢ d'entretenir des acquisitions des séquences précédentes, pour les renforcer et les maintenir disponibles.

Il s'agit donc d'une réflexion assez essentielle (au sens premier du terme), à même de faire évoluer les pratiques de façon importante. Notamment parce qu'en-dessous d'un certain volume horaire dédié au calcul réfléchi, il n'y aura que peu de résultats chez les élèves et que ce volume horaire sera au mieux à réorganiser dans les pratiques actuelles, au pire à créer entièrement, mettant l'enseignant face à des dilemmes de métier sur les choix de contenus et de *modus operandi*.

Partant de leur étude, Butlen et Charles-Pézard, [5] p.17 préconisent un dispositif d'enseignement complet du calcul mental autour de trois axes :

1 – une pratique régulière du calcul mental ;

2 – des bilans écrits de savoir élaborés collectivement au cours d'un débat entre pairs ;

3 – une confrontation régulière à l'explicitation de méthodes de calcul, notamment celles qui s'appuient sur la compréhension de l'aspect décimal de la numération, et de résolution de problèmes.

Nous ajoutons : avec pour objectifs de hiérarchiser les techniques, quand c'est possible, pour favoriser l'efficacité mais aussi de rendre les élèves autonomes sur le choix de la technique en fonction des nombres en jeu (flexibilité).

Dans une optique de formation d'enseignants de mathématiques de cycle 4 sur l'enseignement du calcul réfléchi, cela nous paraît être une bonne approche de partir de ces principes et de faire réfléchir les équipes sur ces trois axes. Il sera toutefois indispensable d'adapter ces préconisations en fonction des contextes et de la faisabilité (habitudes de travail, durée des séances dédiées s'il y en a ou inclusion du calcul mental dans des exercices non dédiés, moment de l'année, etc.). Voici des pistes de travail présentées sous forme de questions, qui peuvent aussi bien s'adresser aux équipes de mathématiques de collège souhaitant construire un enseignement de calcul réfléchi en cycle 4, qu'aux IA-IPR et formateurs académiques pour élaborer un contenu de formation en ce sens.

2. 1. Axe 1 : *une pratique régulière du calcul réfléchi*

2. 1. a *Quels sont les domaines mathématiques qui mobilisent le calcul réfléchi ?*

Points de repère et ressources	**Idées pour une réflexion d'équipe / pour une mise en œuvre en formation**
On peut *a minima* citer le domaine « Nombres et calculs » qui inclut : résolution de problèmes (en particulier : ordres de grandeur), nombres relatifs, fractions et nombres rationnels, calcul littéral, etc.	Échanger sur des exemples variés, en identifiant les recours au calcul réfléchi (faits numériques, automatismes, propriétés des nombres et des opérations, unités de numération mobilisés). Cela peut constituer une première base non exhaustive du champ à travailler quand il s'agira de construire une progression.

2. 1. b *Quelles sont les modalités de travail qui favorisent le recours au calcul réfléchi ?*

Points de repère et ressources	**Idées pour une réflexion d'équipe / pour une mise en œuvre en formation**
Calcul mental, calcul en ligne : utilisés lors de questions-flash, de corrections, ...	➢ Partager les pratiques actuelles, leurs limites, leurs points positifs, les freins... ➢ Identifier calcul mental et calcul en ligne comme les leviers principaux pour développer les compétences en calcul réfléchi des élèves.

2. 1. c *Quels contenus en calcul mental en cycle 4 ?*

<table>
<tr><th>Points de repère et ressources</th><th>Idées pour une réflexion d’équipe /
pour une mise en œuvre en formation</th></tr>
<tr><td>

• **Travail sur les structures :**
Les calculs proposés par l’enseignant·e doivent faire travailler deux structures :
➢ la structure additive ;
➢ la structure multiplicative.
Cette classification, explicitée aux élèves, permet de favoriser l’accès au calcul littéral « en assurant une continuité entre activité arithmétique et algébrique » (voir , p 80).
➢ Structure additive
○ s’appuyant sur la notion de suivant :
235 – 136 *[4]
○ s’appuyant sur les compléments (à l’unité, à 10, à 100, à 9, etc.) :
524 – 44 + 176 – 56 *
➢ Structure multiplicative
○ s’appuyant sur des réécritures multiplicatives :
$25 \times 400 = (25 \times 4) \times 100$ *
$12 \times 0{,}25 = 3 \times 4 \times 0{,}25$ *
$24 \times 5 = 24 \times 10 \div 2$ *
○ s’appuyant sur des réécritures additives et sur la distributivité
$306 \times 11 = 306 \times (10 + 1)$ *
$130 \div 5 = (100 + 30) \div 5$ *
Par ailleurs, on peut jouer sur les différentes interprétations d’une expression :
○ à partir de la 5^e ➝ soustraction : soustraire, c’est ajouter l’opposé ;

</td><td>

➢ Connaître finement les contenus des programmes de cycles 2 et 3 ([3] et [4]) : faits numériques et procédures. Connaître les attendus de cycles 2 et 3 concernant le calcul ([2], [16], [8]).
➢ Se renseigner sur les pratiques réelles de cycle 3 en calcul mental et en ligne (par exemple dans le cadre du conseil école-collège) pour envisager une continuité.
➢ Distinguer ce qui doit être entretenu (apprentissages de cycles 2 et 3) de ce qui doit être appris en cycle 4. Les items de Cedre 2019 en donnent quelques exemples.

</td></tr>
</table>

4 Les analyses des items marqués d’une * sont détaillées ici
https://education.gouv.fr/calcul-reflechi-calcul-mental-calcul-en-ligne-au-cycle-4-que-nous-apprennent-les-donnees-de-la-depp-343441

○ à partir de la 4^e ➝ division : diviser, c'est multiplier par l'inverse ; ○ à partir de la 5^e ➝ développer par les formules de distributivité ; ○ à partir de la 3^e ➝ développer ou factoriser par l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ *Exemples :* 524 – 44 + 176 – 56 * 306 × 11 * • **Entretien des faits numériques appris en cycles 2 et 3 :** en tant que tels (très rapide, réponse en moins de 5 secondes) ou combinés à des procédures automatisées de calcul pour mener des calculs plus complexes. • **Entretien de procédures automatisées en cycles 2 et 3 :** en tant que telles (rapide, réponse en 10 secondes environ) ou combinées à des faits numériques ou d'autres procédures de calcul (calcul réfléchi). • Entretien des raisonnements axés sur la numération, et particulièrement le choix des unités de numération et les relations entre elles	

2. 1. d *Apprendre un fait numérique : qu'est-ce cela veut dire ?*

Points de repère et ressources	**Idées pour une réflexion d'équipe / pour une mise en œuvre en formation**
On entend par fait numérique, le fait par lui-même et ce qui en relève directement. Par exemple si on s'intéresse au fait numérique 4 × 25, mémoriser ce fait numérique implique : ○ la connaissance du produit 4 × 25	➢ Solliciter les tables de multiplication « dans tous les sens » dès la 6^e. ➢ Prendre conscience de l'importance que les élèves sachent « jongler » autour des faits numériques.

○ la connaissance de l'un des facteurs du produit : 4 × ? =100 ou ? × 25 = 100 ○ la capacité à mobiliser les facteurs 4 et 25 (entre autres réponses possibles) dans ? × ? =100 ○ la connaissance du quotient 100 ÷ 4 ou 100 ÷ 25 et leur mise en relation pour permettre leur disponibilité. Suivant les préconisations des programmes dès le cycle 2, mémoriser à la fois la composition et la décomposition des nombres est un point d'appui très favorable en calcul réfléchi et donne accès à un champ de procédures plus vaste.	Un bon moyen d'y contribuer est de varier les énoncés des questions : voir exemple ci-contre dans le cadre du calcul numérique ; « factoriser ... » / « écrire … sous la forme d'un produit » dans le cadre du calcul littéral.

2. 1. e *La place du calcul en ligne : comment l'intégrer à la progression ?*

Points de repère et ressources	**Idées pour une réflexion d'équipe / pour une mise en œuvre en formation**
Véritable support pour faciliter l'entrée dans le calcul littéral, les compétences développées en calcul en ligne et en calcul réfléchi sont similaires. Le recours à l'écrit permet toutefois d'aller plus loin, avec la possibilité dans le cadre numérique de travailler différents statuts du « = ». L'ensemble des enjeux du calcul en ligne sont développés dans le document-ressource « Le calcul en ligne au cycle 3 » [16].	➢ Définir le calcul en ligne ; travailler sur des productions écrites d'élèves en dégageant ce qui en fait du calcul en ligne ou non. ➢ Faire le lien entre le calcul en ligne dans le registre arithmétique (peu utilisé) et le calcul en ligne dans le calcul algébrique (forme attendue habituellement en cycle 4 dans ce domaine), en focalisant sur les structures (additive / multiplicative) et les propriétés des opérations en jeu.

2. 1. f *Quelle place pour le brouillon ?*

Points de repère et ressources	**Idées pour une réflexion d'équipe / pour une mise en œuvre en formation**
Le calcul mental est une modalité de travail indispensable pour développer les compétences en	➢ Engager la réflexion sur des écrits de recherche en calcul mental : nature, fonc-

calcul réfléchi. Malgré la définition qui en est donnée institutionnellement, le calcul mental, quand il est réfléchi, n'est pas forcément que « mental ». Ce qui lui donne sa valeur et sa force, c'est le travail qu'il permet sur les nombres à partir de l'appui sur leurs propriétés et sur celles des opérations (contrairement au calcul posé ou instrumenté, qui s'appuient essentiellement sur le chiffre). Un passage à l'écrit peut être autorisé, notamment dans le cadre d'une différenciation : ○ soit pour s'engager dans la résolution (élèves en difficulté) ; ○ soit pour noter des étapes et/ou des résultats intermédiaires afin d'alléger la charge mentale ; ○ soit pour tester des procédures, vérifier leur exactitude. *Exemple : déterminer de nouvelles écritures des nombres, et comparer leur pertinence au regard du calcul visé :* 57 + 15 57 = 51 + 6 = 50 + 7 = 55 + 2 *Les deux dernières décompositions sont intéressantes pour le calcul visé (ajout de 15), avec une efficacité accrue pour la décomposition* 55 + 2. Le point de vigilance à avoir, est que les élèves restent bien dans le registre du calcul réfléchi et ne basculent pas dans le calcul posé.	tions pour l'élève, contrat didactique à mettre en place. ➢ Proposer le brouillon comme un outil de différenciation de processus, réfléchir concrètement à la faisabilité en classe (quel support, quelles modalités)

2. 1. g *La place de la calculatrice :*

Le fait d'organiser de véritables temps de travail au quotidien sur les automatismes (faits numériques ou procédures automatisées), sous forme de questions-flash ou autre, et de vouloir favoriser le calcul réfléchi, s'accompagne d'une nécessaire réflexion sur la place de la calculatrice. Rappelons que la finalité du travail sur le calcul sous toutes ses formes dès le cycle 2, c'est l'autonomie et le choix éclairé des élèves : face à un calcul, quel qu'en soit le cadre, ils doivent disposer de suffisamment de ressources pour choisir celle qui sera la mieux adaptée (la plus sûre / la moins coûteuse / ...) à chaque situation à laquelle ils seront confrontés.

Points de repère et ressources	**Idées pour une réflexion d'équipe / pour une mise en œuvre en formation**
Le document-ressource de cycle 4 « Calculer » [8] met en garde : « Le calcul instrumenté peut être néfaste aux apprentissages lorsque son usage est mal pensé, trop précoce ou exclusif. D'une part, les premiers pas dans l'apprentissage d'une notion calculatoire requièrent souvent une pratique dans laquelle la gestion mentale ou écrite est une aide à sa compréhension. Le recours systématique à la machine peut alors constituer un réel obstacle. D'autre part, l'apprentissage du calcul ne saurait se limiter à la production de résultats. Il comporte aussi tout un travail autour de la réflexion stratégique qu'il engage sur la recherche du calcul le plus approprié, son organisation et son contrôle à travers des allers retours permanents entre le résultat (même lorsqu'il a été obtenu à l'aide d'un instrument) et son interprétation. »	➢ Trier parmi les utilisations actuelles de la calculatrice en classe celles pour lesquelles la calculatrice est un support de réflexion et participe du travail sur le nombre, de celles où la calculatrice n'est qu'un exécutant de calculs. ➢ Identifier des problèmes pour lesquels la compétence « calculer » (domaine 4 du socle commun) peut être considérée comme prioritaire. Travailler alors sur les variables didactiques et les éléments de différenciation (taille et nature des nombres en jeu, liens entre les nombres en jeu), de façon à favoriser le calcul réfléchi.

Les questions abordées dans cet axe 1 débouchent inévitablement sur des questions organisationnelles concrètes : durée des séances, format des séances (énoncés écrits au tableau, dictés, sous forme de diaporamas, etc.), nombre d'items, items panachés ou non (un seul ou plusieurs thèmes travaillés), mise en place de rituels (type questions-flash) ou de séances dédiées, travail à la maison ou en classe (en autonomie) sous forme de fiches ou non, etc.

Quelques ressources :

➢ « Défi calcul » de l'IREM de Paris : https://irem.u-paris.fr/calcul-mental

Sur les sites académiques, comme par exemple…

➢ Site de l'académie d'Orléans-Tours : https://pedagogie.ac-orleans-tours.fr/enseignement_et_pedagogie_par_departement/enseignements_et_pedagogie_45/ressources_pour_le_socle_commun/les_principaux_elements_de_mathematiques_et_la_culture_scientifique_et_technologique/mathematiques/travaux_du_groupe_departemental_mathematiques/calcul_mental/

➢ Site de l'académie de Strasbourg :

https://pedagogie.ac-strasbourg.fr/mathematiques/competitions/course-aux-nombres/

2. 2 Axe 2 *(verbalisation et conceptualisation) : des bilans écrits de savoir élaborés collectivement*

Points de repère et ressources

> [L]*es activités systématiques de calcul mental permettent aux élèves d'acquérir une plus grande maîtrise et d'explorer un domaine de faits numériques plus vastes. Les techniques élémentaires de calcul ainsi automatisées peuvent jouer le rôle de modules de calcul pouvant être mobilisés pour construire des procédures plus complexes. De même, une fréquentation régulière permet d'accroître le domaine des différentes décompositions additives ou multiplicatives rencontrées. Leur utilisation et leur mémorisation les rendent davantage disponibles. Les élèves sont ainsi amenés à les utiliser dans des calculs de sommes ou de produits.* » (…) « *Cependant, certaines conditions doivent être remplies pour que cette dynamique soit possible. Les élèves doivent savoir détecter les moments où il faut inventer et ceux où il faut reproduire, ce qui nécessite de la part du professeur des institutionnalisations « souples ». Ce dernier doit non seulement faire expliciter les procédures mobilisées mais il doit aussi les hiérarchiser et, pour certaines, institutionnaliser aussi leur domaine de validité. Une pratique régulière de calcul mental doit ainsi avoir pour objectif d'amener l'élève non seulement à mettre en œuvre des procédures économiques mais aussi à en percevoir le domaine d'efficacité. L'institutionnalisation que nous qualifions de « souple » porte à la fois sur l'économie de la procédure et sur son domaine d'efficacité. Elle ne doit pas être trop rapide ni trop « forte » car cela risquerait de se faire au détriment de l'adaptabilité. Elle ne doit pas être trop « faible » ni trop « tardive » car alors toutes les procédures pourraient apparaître comme équivalentes. Elle doit amener les élèves à prendre conscience de l'éventail et de la hiérarchie des procédures mises en œuvre dans la classe.* ([15] p. 14).

La question de l'institutionnalisation se pose de façon incontournable, d'autant plus qu'elle ne correspond pas, en calcul réfléchi (et notamment en calcul mental), à des pratiques répandues chez les enseignants, que ce soit au 1er degré ou au 2nd degré. Allard [17] en rappelle le concept : « *institutionnaliser est un mot associé notamment à l'idée de rendre « permanent » et de légitimer une fonction, une institution, un savoir.* » et se réfère, dans ce cadre, à l'« *exposition de connaissances* ».

Dans son étude, qui concerne le 1er degré, elle constate que « *ces moments [d'exposition de connaissances] peuvent donner lieu à un écrit – mais c'est très rare – ou être seulement oraux, avec tout ce que cela comporte d'imprécisions potentielles, de caractère « diffus » (…). Enfin ces moments sont très variés, notamment en termes de degré de généralité (degré de décontextualisation) et de liens avec les activités précédentes (ou, plus rarement) suivantes des élèves.* »

On trouvera dans le chapitre VI ([17], p.192 et suivantes) des exemples d'expositions de connaissances sur lesquelles on pourra s'appuyer en formation.

Avant d'entrer dans un processus d'institutionnalisation, Butlen et Charles-Pézard ([5] p. 18) préconisent une modalité de travail : élaborer des « *bilans de savoir* ». Il s'agit pour les élèves de rédiger par écrit un texte court résumant ce qu'ils ont appris en calcul mental et précisant si ce qui a été appris a été utile pour d'autres activités. Le travail est mené d'abord en binômes puis mis en débat avec l'ensemble de la classe. Ce dispositif semble être efficace pour la plupart des élèves, sauf les plus en difficulté, à condition d'être mené sur le long terme, de façon à ce que des habitudes d'explicitation à l'écrit se prennent, notamment l'utilisation du calcul en ligne pour exprimer les procédures. Néanmoins, c'est un dispositif qui demande un engagement fort de l'enseignant car il est coûteux en temps ; dans ce document, il est surtout cité pour servir de base de réflexion, lors des formations, sur la verbalisation des procédures (par les élèves) et l'institutionnalisation.

Idées de mise en œuvre en formation

2. 2. a *Concernant les pratiques d'institutionnalisation*

Réfléchir aux éléments constitutifs d'une *trace écrite collective* : notamment l'explicitation de chaque procédure jugée intéressante, leur hiérarchisation éventuelle quand il y en a plusieurs, le domaine de validité de chacune. L'élève doit comprendre l'intérêt de faire appel à telle procédure plutôt que d'autres, pour un calcul particulier qui lui est donné.

➢ S'interroger sur la pertinence d'expliciter une procédure à travers un *exemple générique*, en dégageant quelques caractéristiques des nombres en jeu, des relations entre les nombres en jeu et en faisant ressortir les propriétés des opérations (en acte ou explicitement dans le cadre de la distributivité en cycle 4).

➢ Réfléchir aux procédures et faits numériques qui nécessiteront une trace écrite, en identifiant celles qui s'appuient sur les connaissances de numération (aspects décimal et positionnel).

➢ Élaborer une trace écrite durant le stage, collectivement, sur un ou deux exemples précédemment identifiés. L'idée est de faire ressortir le côté « malin » (au sens « astucieux », « opportuniste », c'est-à-dire celui qui fait appel à l'adaptabilité, ainsi que les habilités mises en œuvre (propriétés des nombres, des opérations).

2. 2. b *Concernant les traces écrites intermédiaires*

➢ Réfléchir à des dispositifs possibles pour favoriser le travail entre pairs, qui s'avère porteur.

➢ Accepter une reformulation transitoire avec « leurs mots » afin de prendre en compte les temps d'acquisition (indispensable pour les élèves en difficulté).

Exemple : en s'appuyant sur le document d'accompagnement « le calcul en ligne au cycle 3 » [16], il peut être proposé l'exemple ci-dessous :

Exemple	**Exemple générique**	**Langage parlé des élèves / formulation transitoire**	**Langage formel**
$24 \times (10 + 3)$	$24 \times 10 + 24 \times 3$	« Quand on multiplie une somme, cela revient à multiplier chacun des termes puis à les ajouter »	$k \times (a + b) = k \times a + k \times b$ où k, a et b sont des nombres.

2. 3. Axe 3 *(verbalisation) : une confrontation régulière à l'explicitation de méthodes de calcul et de résolution de problèmes*

<table>
<tr><th>Points de repère et ressources</th><th>Idées pour une réflexion d'équipe /
pour une mise en œuvre en formation</th></tr>
<tr><td>
• Favoriser un enseignement explicite
○ Explicite sur ce qui doit être mémorisé (faits numériques) et les attendus ; connaître le fait numérique $25 \times 4 = 100$, cela signifie automatiser $25 \times 4 = 100$ mais aussi ses « déclinaisons », à savoir :
$100/25 = 4$, $100/4 = 25$, le quart de 100 est 25, $25 \times ? = 100$, $4 \times ? = 100$, etc.
○ Explicite sur ce qui a vocation à être automatisé (procédure élémentaire, notamment : voir les programmes).
○ Mise en place de phases de verbalisation quasi-systématiques : lors de ces mises en commun :
➢ recenser les décompositions des nombres utilisées dans la classe et faire expliciter les élèves sur les raisons de leurs choix ;
➢ recenser les procédures et faire les liens : quelles procédures sont favorisées par quelles décompositions et, à l'inverse, de quelles décompositions a-t-on besoin pour favoriser telle ou telle procédure ? Le calcul mental type « Mathador » ou « Le compte est bon » est particulièrement intéressant pour cela.
➢ Faire hiérarchiser les procédures selon deux critères (sûreté et coût), pour identifier celles qui seront les plus efficaces à la condition de maîtriser les faits numériques et modules élémentaires de calcul associés.
</td><td>
➢ Réfléchir à partir des pratiques actuelles de correction en calcul mental : quelle place pour les procédures des élèves ? Quelle explicitation ?

Réfléchir sur ce que pourrait être une mise en commun des procédures (jeu de rôle à partir d'un item de calcul mental bien choisi comme $235 - 136$ ou 24×5 ou encore 36×25 : plusieurs procédures sont possibles, chacun en explicite une différente et on identifie les propriétés des nombres, de la numération et des opérations mobilisées pour chacune ; on peut affiner en dégageant celles qui ont vocation à être automatisées).
</td></tr>
</table>

• **Habiletés sur les nombres** ○ Faire verbaliser systématiquement les faits numériques mobilisés dans les procédures. ○ Identifier les structures (additive, multiplicative). Pour cette structure, quels sont les nombres qui « vont bien ensemble » ? *Exemple :* 4 et 0,25 « vont bien ensemble » pour la structure multiplicative ; 0,75 et 0,25 « vont bien ensemble » pour la structure additive.	

En conclusion, le champ de formation professionnelle qui s'ouvre est immense et porteur. Les résultats aux items de calcul mental des évaluations Cedre 2019 (niveau 3^{e}) constituent une base de données précieuse, pouvant apporter des éléments de réflexion, mais aussi servir comme ressource pour illustrer et étayer les documents institutionnels récents ou à venir au sujet des automatismes et du calcul réfléchi. L'intérêt de ces sujets dans la formation mathématique des élèves est depuis longtemps démontré par la didactique, et, depuis peu, renforcé par les apports des neurosciences, concernant les automatismes notamment.

Afin de compléter cet article de synthèse, les équipes de mathématiques de collège et les formateurs pourront trouver sur le site https://education.gouv.fr/calcul-reflechi-calcul-mental-calcul-en-ligne-au-cycle-4-que-nous-apprennent-les-donnees-de-la-depp-343441 les analyses que nous avons pu faire en 2020-2021, dans le cadre du groupe « Cedre-analyse » de la DEPP.

Bibliographie

[1] Éducation nationale - DEPP, «NOTE D'INFORMATION n° 20.34 : Cedre 2008-2014-2019 Mathématiques en fin de collège : des résultats en baisse,» Septembre 2020. [En ligne]. Available: https://www.education.gouv.fr/cedre-2008-2014-2019-mathematiques-en-fin-de-college-des-resultats-en-baisse-306338.

[2] Éducation nationale, «Le calcul aux cycles 2 et 3,» Mars 2016. [En ligne]. Available: https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Nombres_et_calculs/99/2/RA16_C2C3_MATH_math_calc_c2c3_N.D_600992.pdf.

[3] Éducation nationale, «Au BO spécial du 26 novembre 2015 : programmes d'enseignement de l'école élémentaire et du collège,» 26 Novembre 2015. [En ligne]. Available: https://www.education.gouv.fr/au-bo-special-du-26-novembre-2015-programmes-d-enseignement-de-l-ecole-elementaire-et-du-college-3737.

[4] Éducation nationale, «Programmes d'enseignement de l'école élémentaire et du collège - Bulletin officiel du 26 juillet 2018,» 26 Juillet 2018. [En ligne]. Available: https://www.education.gouv.fr/francais-mathematiques-emc-des-programmes-plus-clairs-et-plus-precis-du-cp-la-3e-la-rentree-2018-11690.

[5] D. Butlen et M. Charles-Pézard, «Conceptualisation en mathématiques et élèves en difficulté. Le calcul mental, entre sens et technique,» Grand N, pp. 7-32, 2007.

[6] Éducation nationale - Dgesco, «Document d'accompagnement - Le calcul mental,» 2002. [En ligne]. Available :
https://www.arpeme.fr/documents/7D218B44152B38CD292C.pdf.

[7] C. Piolti-Lamorthe et S. Roubin, «Le calcul réfléchi : entre sens et technique,» Le Bulletin Vert de l'APMEP, n° %1488, pp. 272-280.

[8] Éducation nationale, «Calculer au cycle 4,» Mars 2016. [En ligne]. Available: https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Competences_travaillees/37/0/RA16_C4_MATH_comp_calculer_554370.pdf.

[9] F. Tempier, «Une étude des programmes et manuels sur la numération décimale au CE2.,» Grand N, n° %186, pp. 59-90, 2010.

[10] J. Pilet et B. Grugeon-Allys, «Quelles potentialités du calcul en ligne dans l'enseignement primaire en France pour favoriser une entrée précoce dans l'algèbre ?,» chez Le développement de la pensée algébrique à l'école primaire et au début du secondaire, Québec : Livres en ligne du CRIRES, 2020, pp. 71-95.

[11] G. Vergnaud, «Long terme et court terme dans l'apprentissage de l'algèbre,» Actes du Colloque franco-allemand de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique, Marseille, pp. 189-199, 1986.

[12] Y. Chevallard, «Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Première partie : l'évolution de la transposition didactique.,» Petit x, n° %15, pp. 51-94, 1984.

[13] M. Artigue, «L'intelligence de calcul» chez Conférence d'ouverture de l'université d'été de Saint-Flour, Saint Flour, 2005.

[14] G. d. MATH63, «Le calcul mental à l'école élémentaire,» 2018.

[15] Éducation nationale, «Automatismes en 2nde et 1ère au lycée général et technologique,» Août 2019. [En ligne]. Available: https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/84/2/RA19_Lycee_GT_2-1_MATH_Automatismes_1163842.pdf.

[16] Éducation nationale, «Le calcul en ligne au cycle 3,» Mars 2016. [En ligne]. Available: https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Nombres_et_calculs/00/2/RA_16_C3_MATH_calcul_ligne_c3_N.D_601002.pdf.

[17] M. Artigue, «L'enseignement du calcul aujourd'hui : problèmes, défis et perspectives,» Repères IREM n°54, janvier 2004.

[18] C. Allard, «Etude du processus d'Institutionnalisation dans les pratiques de fin d'école primaire : le cas de l'enseignement des fractions.,» 2015.