DEVELOPPER UNE EXPRESSION NUMERIQUE OU ALGEBRIQUE : QUEL(S) DISCOURS ENSEIGNANT(S) ?

Cécile BARTHES GARNIER
LDAR (EA 4434), Université de Paris, irem de Paris
LaB-E3D (EA 7441), Université de Bordeaux,
Lalina COULANGE
LaB-E3D (EA 7441), Université de Bordeaux,
Christophe HACHE
LDAR (EA 4434), Université de Paris, Irem de Paris

L'institution scolaire française considère la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition (ou à la soustraction) comme un savoir mathématique à enseigner. Cette propriété est exposée en tant que tel au niveau du cycle 4, en lien avec le domaine du calcul littéral [1]. Pourtant, des connaissances liées à cette propriété semblent mises en fonctionnement dès le cycle 2 dans le domaine du calcul numérique, à la fois en lien avec le calcul posé, le calcul mental et le calcul en ligne. Des références à l'usage de telles connaissances par les élèves sont d'ailleurs citées dans un document institutionnel récent à l'usage des enseignants de primaire [2].

Dans Barthès-Garnier (2020), l'auteure a précisément cherché à questionner les usages de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition au primaire. Cette recherche a permis de montrer que les élèves de CM2 mettent bel et bien en fonctionnement des connaissances relevant de la distributivité pour accomplir certaines tâches de calcul posé ou mental. Pour autant, les élèves ne semblent pas spontanément en mesure de formuler de manière aboutie les techniques de calcul sous-jacentes. En accord avec les hypothèses formulées par Constantin (2017) sur la base d'une étude des programmes et des manuels de primaire, les élèves de cycle 3 ne produisent pas ou peu de discours ou quand ils en produisent, ceux-ci restent centrés sur des actions (« il faut soustraire 2 de 10 ») voire sur des manipulations de signes « donnant à voir » des actions liées

1 Programme de cycle 4 : « Utiliser le calcul littéral : Connaissance : Propriétés de distributivité (simple et double) » (BOEN n° 31 du 30 juillet 2020)

2 Pour enseigner le nombre, le calcul, et la résolution de problème au CP : « la distributivité de la multiplication sur l'addition, propriété plus complexe, sera illustrée par du matériel et explicitée comme dans l'exemple : « Le double de 21, c'est le double de 20 plus le double de 1 ». (Page 64, MEN, juin 2021)

à ces actions (par exemple « on rajoute un zéro en changeant de ligne [dans une opération posée] »). Ces discours paraissent dès lors peu à même de rendre intelligibles les techniques mathématiques mises en œuvre et encore moins de les légitimer ou de les justifier. Certains élèves semblent davantage appliquer une « recette » sans que l'on soit assuré du sens que celle-ci recouvre en termes de connaissances mathématiques. Cependant, il semble que l'on peut permettre, sous certaines conditions, aux élèves de ce même niveau scolaire d'enrichir leurs discours sur ces techniques en prenant appui sur d'autres systèmes de signes (à l'instar de la représentation rectangulaire) (Barthès-Garnier, 2020) : les élèves parlent plus aisément des décompositions de nombres qui pilotent les transformations d'écriture en jeu (« j'ai décomposé 15 en 10 + 5 », « j'ai coupé le chiffre en deux »).

Bien qu'enrichis, de tels discours d'élèves demeurent toutefois assez faibles en termes de justifications liées à la propriété de distributivité qui n'est d'ailleurs formalisée que bien plus tardivement dans le curriculum français. Ils demeurent notamment privés d'arguments liés à la structure d'expressions numériques, ce qui n'est pas sans lien avec la centration constatée par d'autres auteurs (Grugeon-Allys & Pilet, 2017) sur l'aspect procédural de telles expressions (Sfard, 1991), majoritairement mobilisé par les élèves. Ainsi, même quand les élèves évoquent des décompositions de nombres, ils n'utilisent que très rarement des parenthèses pour faire apparaître un produit d'un nombre par une somme ou une différence, à l'origine d'un développement qui participerait à une reconnaissance de structure des expressions numériques en jeu dans la mise en œuvre de la propriété de distributivité. Les conditions ne semblant pas réunies pour institutionnaliser les savoirs mathématiques en jeu, les élèves cherchent à généraliser des « règles » d'action liées au calcul numérique qui peuvent se révéler erronées ou privées de moyens de contrôle pertinents au regard de ces savoirs.

Toutefois qu'en est-il s'agissant d'élèves au collège pour lesquels la propriété est cette fois explicitée et enseignée en tant que telle ? S'avère-t-il plus simple pour les élèves et pour les enseignants de tenir des discours sur des usages de la propriété de distributivité dans le domaine du calcul (à la fois numérique et littéral) au cycle 4, une fois celle-ci introduite ?

Quels discours possibles (d'élèves et d'enseignants) au cycle 4 ?

En effet, si l'on peut penser que l'officialisation de la propriété de distributivité enseignée au cycle 4 peut répondre pour partie aux difficultés constatées dans les discours produits par des élèves de cycle 3, nous faisons l'hypothèse que la question n'est pas réglée pour autant. Il nous semble d'autant plus intéressant de nous intéresser aux discours d'élèves et d'enseignants de cycle 4, en lien avec l'usage de la propriété de distributivité dans des calculs à même de la convoquer, que la verbalisation d'écritures symboliques est loin d'aller de soi s'agissant du calcul littéral (et même numérique puisque celui-ci emprunte à l'algèbre certains de ses symboles « historiques »).

De même, Chevallard identifie, lui aussi, cette dualité entre l'oral et l'écrit qu'il va qualifier de « trouble culturel » au niveau de l'algèbre :

> « L'avènement historique de l'algèbre met en relief le « trouble » culturel dans la relation entre l'écrit et l'oral. Lorsque, de nos jours, on « lit » sur le papier l'expression $2x(x+3)$, nous savons qu'il s'agit, en essence, d'une expression écrite, qu'il nous faut alors oraliser en disant : « deux *x* facteur de *x* plus trois ». Cette

expression orale n'est que l'oralisation d'une expression qui reste fondamentalement écrite » (Chevallard, 2020, p. 114)

D'autre part, quand Chevallard parle d'oralisation, cela sous-entend apparemment une forme d'activité langagière spécifique, celle liée à la description orale d'une expression symbolique donnée. Nous nous intéressons, quant à nous, à quelque chose qui inclut potentiellement mais ne se résume pas à ce que cet auteur évoque : c'est-à-dire à toute forme de discours oral qui est à même d'accompagner des actions de calcul algébrique (comprenant éventuellement la description d'expressions données ou obtenues mais aussi à leurs transformations ou à ce qui pilote ces transformations). Pour cette raison, nous avons préféré retenir le terme de « verbalisation », considérant que celui-ci a une acception plus large (Fluckiger, 2020), renvoyant au langage verbal qui peut accompagner des actions d'élèves ou d'enseignants quand ils convoquent et utilisent la propriété de distributivité. De notre point de vue, la verbalisation recouvre des « oralisations » d'écritures symboliques (comme celle d'un produit qui peut être « oralisé » de différentes façons), mais aussi les caractéristiques de ces écritures, liées au caractère procédural et structural d'une expression (Sfard, 1991), et les opérations de réécritures d'expressions numériques et littérales (portées par des égalités de type « identité ») qualifiées de « transformations de mouvement » (Drouhard & Panizza, 2012) qui prennent appui sur la propriété de distributivité (ou d'autres propriétés des nombres et des opérations, telles la commutativité, l'associativité...). Ce sont donc autant d'objets de discours possibles que nous avons essayé d'envisager en amont même de l'étude de verbalisations effectives d'élèves et d'enseignants en lien avec les usages de la distributivité.

Un premier objet de discours possible qui nous est apparu rapidement est la verbalisation d'expressions symboliques relevant de produits : comment les enseignants et les élèves verbalisent-ils des écritures de type « $a \times b$ » ?

Verbalisation d'un produit

Nous nous sommes intéressés à des verbalisations possibles du produit, celui-ci étant nécessairement convoqué dans l'usage de la distributivité (que ce soit dans le domaine du calcul numérique ou algébrique) et étant d'emblée apparu comme un objet de discours à questionner (plus que la somme).

En effet, si l'on se réfère aux manuels cités page suivante (tableau 1), on constate que les manuels anciens faisaient exister une « norme » de verbalisation liée à une distinction à opérer entre multiplicande et multiplicateur dans un produit de deux nombres : soient a et b deux nombres entiers, « $a \times b$ » se verbalise « a multiplié par b » ou « b fois a », avec b multiplicateur et a multiplicande pris autant de fois qu'il y a d'unités dans le multiplicateur (Chambris, 2021). Ainsi, si l'on se réfère à la norme alors en vigueur, le produit 6×4 s'énonce « 6 multiplié par 4 » ou « 4 fois 6 », c'est le nombre 6 qui est pris 4 fois, ce qui renvoie si l'on se réfère à l'addition itérée à $6 + 6 + 6 + 6$.

De telles verbalisations « normées » en prise d'appui sur une telle distinction ne semblent plus d'actualité dans de nombreux manuels contemporains et dans les habitudes courantes, comme en attestent les deux autres extraits de manuels cités dans le tableau de la page suivante : « $a \times b$ » étant tour à tour verbalisé « a fois b » et « a multiplié par b ». Notre hypothèse à ce sujet (que nous chercherons à mettre à l'épreuve par la suite) est que la distinction faite autrefois entre multiplicateur et multiplicande (et *a fortiori* les liens entre certaines formulations et la

<table>
<tr>
<td>

MULTIPLICATION

109. — Une classe contient 4 bancs avec 8 élèves par banc. Quel est le nombre des élèves de la classe?

Le nombre des élèves est égal à

$8+8+8+8=32$ élèves.

Nous faisons la somme de quatre nombre égaux à 8.
Mais, comme on ajoute des nombres égaux, on dit, plus simplement, 4 fois 8 font 32 et l'on écrit :

$8\times 4=32$;

ce qui s'énonce :

8 *multiplié par* 4 *égale* 32.

</td>
<td>

La multiplication

Sens de l'opération

Première présentation

6 pts + 6 pts + 6 pts + 6 pts = 24 pts
6 points pris 4 fois font 24 points
6 points × 4 = 24 points

**La multiplication permet de trouver rapidement le résultat d'une addition de nombres égaux.
6 points est le multiplicande.
4 est le multiplicateur.**

Deuxième présentation

Il y a 6 points par groupe et il y a 4 groupes.
6 points × 4 = 24 points
(par groupe) groupes

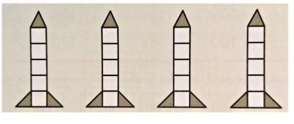
**Le multiplicande exprime toujours une valeur de l'unité.
Le multiplicateur indique le nombre d'unités.
6 points (par groupe) est le multiplicande.
4 (groupes) est le multiplicateur.**

**Le signe de la multiplication est le signe × (multiplié par).
24 points est le produit. Il est toujours exprimé avec la même unité que le multiplicande.**

$\boxed{\text{Valeur de l'unité} \times \text{nombre d'unités} = \text{valeur totale}}$

</td>
</tr>
<tr>
<td>Arithmétique, Armand Colin, 1918</td>
<td>Arithmétique, Armand Colin, 1959</td>
</tr>
<tr>
<td>

Pour construire 4 fusées de 5 cubes chacune, il faut commander 20 cubes.



5 + 5 + 5 + 5 = 20

Je fais une multiplication : 4 × 5 = 20

« 4 fois 5 égale 20. »

« 4 multiplié par 5 égale 20. »

</td>
<td>

Leçon 2 : La multiplication

La **multiplication** est l'opération que l'on fait quand on additionne toujours le même nombre.

On utilise le signe « × » qui se lit « fois » ou « multiplié par »

5 × 6 = 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 30

« 5 fois 6 » ou « 5 multiplié par 6 »

</td>
</tr>
<tr>
<td>D'après Maths au CE1 2019</td>
<td>MHM CE2 2021</td>
</tr>
</table>

Tableau 1 : extraits de manuels : verbalisation de la multiplication

position des termes dans les écritures de multiplication) ayant disparu des savoirs mathématiques aujourd'hui enseignés sur le produit, les verbalisations associées à des écritures de produits (numériques ou algébriques) ne sont plus « normées », en tout cas au sens où elles pouvaient l'être autrefois, en vue d'assurer une forme de cohérence explicitement liée à des connaissances ou à des notions mathématiques exposées en amont. L'accent est peut-être même mis sur des verbalisations devenant indépendantes de l'écriture au regard de la propriété de commutativité de la multiplication enseignée plus précocement qu'autrefois et très présente dans le cadre algébrique.

Se rajoutent à cela, des formes de re-négociations probables liées au domaine du calcul algébrique allant de pair avec l'omission du signe « × » qui peuvent aussi conduire à de nouvelles verbalisations le rendant tout aussi muet dans le discours. Dans Drouhard (1992), l'auteur parle d'ailleurs de pseudo-monômes (par exemple $5x$) en vue de signaler le rôle joué par cette omission dans le cas particulier des monômes (pour laquelle l'omission devient systématique). L'écriture du pseudo-monôme impose une priorité liée à sa forme. On peut envisager que les pseudo-monômes soient « oralisés » en omettant tout autant une expression de type « fois » ou « multiplié par » (par exemple « cinq x ») ce qui n'est sans doute pas sans conséquence sur l'appréhension du produit que de telles écritures symboliques recouvrent si on se réfère à ce qu'elles pourraient recouvrir vis-à-vis de l'addition réitérée (même dans le cas où la lettre représente un nombre entier « cinq x » étant sans doute plus volontiers appréhendé comme l'addition $x + x + x + x + x$ que comme l'addition de x termes $5 + ... + 5$). Ce questionnement dépasse le seul cas des pseudo-monômes [3] : par exemple dans le cas d'écritures du type « $5(n + 3)$ » ou « $6n(2n + 5)$ ».

Ce que recouvrent potentiellement des interprétations d'élèves ou d'enseignants de telles expressions algébriques en lien avec des verbalisations possibles de produits est en rapport avec un autre objet de discours possible : celui qui relève de l'aspect procédural ou structural d'une expression littérale (et qui peut être étendu aux expressions numériques) (Sfard, 1991).

3 Dans Constantin (2018), l'auteure montre que les pseudo-monômes étaient presque immédiatement convoqués dès les premiers exemples de calcul algébrique, donnés dans les manuels de collège après l'introduction de la propriété de distributivité. Elle donne aussi à voir comment les conséquences sur la représentation des calculs effectués (invitant par exemple à voir $(8x – 4)×2x$ comme un produit de deux facteurs et non de trois facteurs).

Verbalisation du caractère procédural ou structural d'une expression

S'agissant des expressions numériques et littérales et des verbalisations associées aux usages de la distributivité, un objet de discours important à construire est a priori celui qui relève de la structure de l'expression comme un produit (de facteurs) ou une somme (de termes). En effet, cet objet de discours peut être considéré comme un point d'appui essentiel des connaissances permettant l'usage de la propriété de distributivité dans ce qui relève du développement (on « développe » ce qui relève d'un produit de deux facteurs dont l'un est une somme) ou de la factorisation (on « factorise » ce qui relève d'une somme de termes correspondant chacun à un produit ayant un facteur en commun). Un tel objet de discours, lié à la structure d'une expression, renvoie à ce que Sfard qualifie (dans ses travaux de 1991) du caractère structural d'une expression algébrique ou numérique (lié à cette expression en soi, considérée comme objet) qui peut être opposé au caractère procédural de cette même expression (lié au processus de calcul ordonné qu'elle recouvre par ailleurs) [4]. En revenant au propos tenu ci-dessus sur la verbalisation de produits, nous faisons l'hypothèse qu'un retour à l'addition itérée (potentiellement orienté par certaines de ces verbalisations) relèverait davantage du caractère procédural de telles expressions algébriques ou numériques.

En effet, ce retour suggère un processus de calcul (l'addition itérée) que recouvre un produit (dès lors appréhendé en tant que « processus » plus que comme « objet »). Par ailleurs, que ce soit en lien avec les caractères procédural ou structural d'une expression, on peut aussi

4 Dans les travaux de Sfard (1991), deux caractères des concepts mathématiques cohabitent potentiellement dans l'activité mathématique outillée par ces concepts : le caractère procédural (lié au processus) et le caractère structural (lié à l'objet en soi).

s'interroger sur la nature plus ou moins partielle (par exemple ne disant pas « tout » d'une structure ou d'une procédure de calcul d'une expression donnée) et contextualisée des verbalisations produites associées à la structure d'une expression ou à la procédure de calcul que celle-ci recouvre. Notamment, il s'agit de considérer des éléments de discours qui accompagnent des actions liées au développement ou à la factorisation d'expressions numériques ou littérales données que l'on peut appréhender comme des opérations de réécriture de telles expressions (pour produire des expressions équivalentes) liées à ce que dans Drouhard & Panizza (2012) les auteurs appellent des « transformations de mouvement ».

Verbalisation de transformations d'expressions numériques ou algébriques

Développer ou factoriser une expression numérique ou littérale donnée peut être appréhendé comme une transformation de cette expression en une autre, équivalente, en prenant appui sur la propriété de distributivité. Le signe égal dénote alors la relation d'équivalence entre les deux expressions [5] (celle donnée au départ et celle obtenue après « transformation ») allant de pair avec le statut d'identité alors pris par l'égalité (égalité quantifiée universellement, toujours vraie). Dans Drouhard et Panizza (2012), de telles transformations sont qualifiées par les auteurs de « transformations de mouvement », pour en souligner le caractère dynamique, prennent appui sur des règles de réécriture (qui garantissent l'équivalence entre expressions) que ces auteurs considèrent comme centrales dans l'activité de calcul algébrique. Une des questions que nous nous posons à ce sujet, est de préciser la façon dont des verbalisations peuvent potentiellement permettre d'identifier de telles transformations de mouvement liées au développement ou à la factorisation d'une expression numérique ou littérale. Cela peut avoir trait à des aspects structuraux ou procéduraux d'une expression numérique ou littérale donnée au départ et celle obtenue après « transformation », mais aussi à certains de ces aspects associés au « mouvement » opéré pour passer de l'une à l'autre. En considérant l'aspect structural dans le cas d'un développement d'une expression, on peut envisager des mises en relation — entre les termes de la somme donnée initialement et ceux de la nouvelle somme obtenue — plus ou moins explicites dans les verbalisations qui accompagnent ce développement [6].

Une telle analyse de discours liés aux usages de la propriété de distributivité, organisée autour d'objets de discours identifiés en amont (comme possiblement construits ou à construire en lien avec de tels usages), nous conduit finalement à penser d'une part une grande variété possible de verbalisations dont il reste au demeurant à apprécier les potentialités au regard du rôle que celles-ci peuvent jouer dans l'accompagnement de l'activité de calcul algébrique (en permettant d'expliciter des actions, de formuler les connaissances en jeu). Elle nous permet d'identifier d'une part des variables didactiques (Brousseau, 1997) liées à des tâches de calcul numériques ou algébriques, à même d'influencer de telles verbalisations, et d'autre part d'envisager des aspects importants à prendre en compte dans l'étude de discours d'enseignants ou d'élèves, liés à l'accomplissement de telles tâches. Nous y reviendrons ci-après.

5 Équivalence que ces mêmes auteurs appréhendent comme une conservation de la dénotation : deux expressions sont considérées comme équivalentes quand elles « dénotent » le même objet (Drouhard & Panizza, 2012).

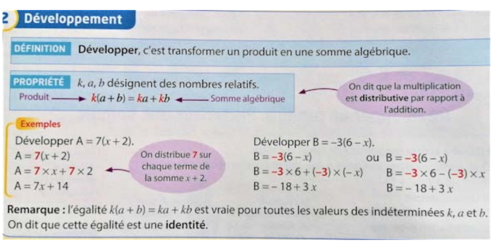
6 La nouvelle somme obtenue est telle que chacun de ses termes correspond à un produit d'un terme de la somme initiale par le facteur du produit initial.

Étude de discours d'enseignants dans les usages de la propriété de distributivité dans des tâches de développement d'expressions algébriques : quelles verbalisations ?

Nous avons décidé dans un premier temps de nous intéresser aux verbalisations des enseignants dans des tâches de développement d'expressions algébriques. Les manuels sont les premiers observables à la fois de discours possibles d'enseignants et de ce qui pourrait contribuer à les orienter. Nous avons donc observé quelques manuels pour voir en quoi ils pouvaient nous renseigner, en amont de l'enquête conduite, sur les verbalisations possibles des enseignants ou ce qui pourrait nourrir ou orienter de telles verbalisations.

Quelles verbalisations dans les manuels ?

Intéressons-nous donc aux manuels pour savoir s'ils apportent des informations sur ce que les enseignants sont susceptibles de dire pour accompagner cette propriété dans des tâches de développement d'expressions algébriques. Nous présentons ici quatre extraits de manuels récents ayant des approches différentes :



2 Développement

DÉFINITION **Développer**, c'est transformer un produit en une somme algébrique.

PROPRIÉTÉ k, a, b désignent des nombres relatifs.

Produit → $k(a+b) = ka + kb$ ← Somme algébrique

On dit que la multiplication est **distributive** par rapport à l'addition.

Exemples

Développer $A = 7(x+2)$.

$A = 7(x+2)$

$A = 7 \times x + 7 \times 2$

$A = 7x + 14$

On distribue 7 sur chaque terme de la somme $x+2$.

Développer $B = -3(6-x)$.

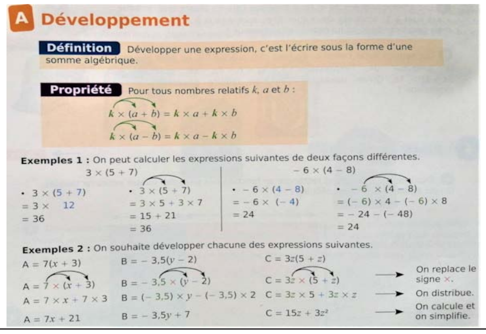
$B = -3(6-x)$ ou $B = -3(6-x)$

$B = -3 \times 6 + (-3) \times (-x)$ ou $B = -3 \times 6 - (-3) \times x$

$B = -18 + 3x$ ou $B = -18 + 3x$

Remarque : l'égalité $k(a+b) = ka + kb$ est vraie pour toutes les valeurs des indéterminées k, a et b. On dit que cette égalité est une **identité**.

Extrait 1 : Transmaths 4e 2021, page 40



A Développement

Définition Développer une expression, c'est l'écrire sous la forme d'une somme algébrique.

Propriété Pour tous nombres relatifs k, a et b :

$k \times (a+b) = k \times a + k \times b$

$k \times (a-b) = k \times a - k \times b$

Exemples 1 : On peut calculer les expressions suivantes de deux façons différentes.

$3 \times (5+7)$

- $3 \times (5+7)$ $= 3 \times 12$ $= 36$
- $3 \times (5+7)$ $= 3 \times 5 + 3 \times 7$ $= 15 + 21$ $= 36$

$-6 \times (4-8)$

- $-6 \times (4-8)$ $= -6 \times (-4)$ $= 24$
- $-6 \times (4-8)$ $= (-6) \times 4 - (-6) \times 8$ $= -24 - (-48)$ $= 24$

Exemples 2 : On souhaite développer chacune des expressions suivantes.

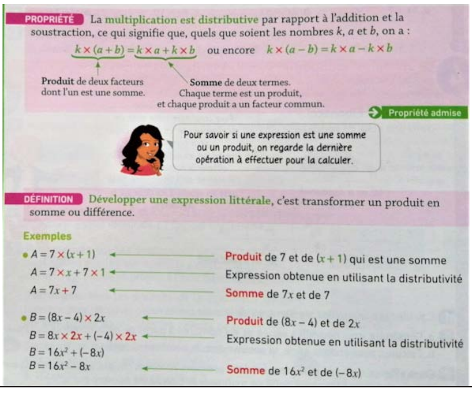
$A = 7(x+3)$ | $B = -3{,}5(y-2)$ | $C = 3z(5+z)$

$A = 7 \times (x+3)$ | $B = -3{,}5 \times (y-2)$ | $C = 3z \times (5+z)$ → On replace le signe ×.

$A = 7 \times x + 7 \times 3$ | $B = (-3{,}5) \times y - (-3{,}5) \times 2$ | $C = 3z \times 5 + 3z \times z$ → On distribue.

$A = 7x + 21$ | $B = -3{,}5y + 7$ | $C = 15z + 3z^2$ → On calcule et on simplifie.

Extrait 2 : I-parcours 4e 2021, page 68



PROPRIÉTÉ La multiplication est distributive par rapport à l'addition et la soustraction, ce qui signifie que, quels que soient les nombres k, a et b, on a :

$\underbrace{k \times (a+b)}_{} = \underbrace{k \times a + k \times b}_{}$ ou encore $k \times (a-b) = k \times a - k \times b$

Produit de deux facteurs dont l'un est une somme.

Somme de deux termes. Chaque terme est un produit, et chaque produit a un facteur commun.

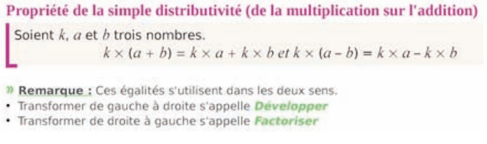
Propriété admise

DÉFINITION Développer une expression littérale, c'est transformer un produit en somme ou différence.

Exemples

- $A = 7 \times (x+1)$ ← **Produit** de 7 et de $(x+1)$ qui est une somme
  $A = 7 \times x + 7 \times 1$ ← Expression obtenue en utilisant la distributivité
  $A = 7x + 7$ ← **Somme** de $7x$ et de 7
- $B = (8x-4) \times 2x$ ← **Produit** de $(8x-4)$ et de $2x$
  $B = 8x \times 2x + (-4) \times 2x$ ← Expression obtenue en utilisant la distributivité
  $B = 16x^2 + (-8x)$
  $B = 16x^2 - 8x$ ← **Somme** de $16x^2$ et de $(-8x)$

Extrait 3 : Myriade 4e 2021, page 104



Propriété de la simple distributivité (de la multiplication sur l'addition)

Soient k, a et b trois nombres.

$k \times (a+b) = k \times a + k \times b$ et $k \times (a-b) = k \times a - k \times b$

» **Remarque :** Ces égalités s'utilisent dans les deux sens.

- Transformer de gauche à droite s'appelle ***Développer***
- Transformer de droite à gauche s'appelle ***Factoriser***

Extrait 4 : Sésamath cycle 4 2016, page 10

Tableau 2 : extraits de manuel de cycle 4

Dans l'ensemble, ce tableau fait apparaître des verbalisations, soit minimalistes (extraits 2 et 4), soit partielles (extraits 1 et 3), par rapport aux objets de discours que nous avons identifiés en amont.

Ainsi l'extrait 4 (manuel Sésamath) parle de transformations « géographiquement » situées, de gauche à droite (ou inversement) correspondant au développement ou à la factorisation sans aucune référence aux aspects structuraux ou proceduraux des expressions algébriques en jeu.

L'extrait 2 (manuel I-parcours) fait quant à lui apparaître une absence quasi-totale de verbalisation mise à part la définition du développement comme une écriture « sous forme d'une somme » et des commentaires succincts formulés sur un des deux exemples donnés en termes d'actions sur les signes (« on replace le signe × ») ou de désignation générique de ces actions (« on distribue », « on calcule et on simplifie »). Ce sont davantage les flèches que l'on peut penser « classiquement utilisées » dans l'enseignement de la propriété de distributivité qui semblent à même d'accompagner l'usage de la propriété de distributivité pour « développer » une expression algébrique donnée (dont rien n'est dit en termes de structure initiale).

Dans l'extrait 1 (manuel Transmaths), le développement est défini comme une transformation d'un produit en une somme de manière décontextualisée. Cette définition est mise en lien avec l'énoncé général algébrique de la propriété de distributivité via le discours « on dit que la multiplication est distributive par rapport à l'addition » inscrit dans une bulle. Dans l'exemple d'un premier calcul donné en dessous, une action de réécriture partiellement contextualisée (« 7 ») est verbalisée : « on distribue 7 sur chaque terme de la somme » ; mais sans discours explicite sur ce qui pilote cette réécriture tant du point de vue de la structure de l'expression donnée que de celle à produire, comme si la mise en lien avec la verbalisation décontextualisée donnée en amont de ce que recouvre un développement allait de soi. Ainsi on ne parle pas du produit « par 7 » ou « avec le facteur 7 » par exemple.

L'extrait 3 (manuel Myriade) donne davantage de précisions sur la structure des expressions : un commentaire lié à l'énoncé algébrique général indique ainsi que l'on s'intéresse au « produit de deux facteurs dont l'un est une somme » et à « une somme de deux termes, chaque terme est un produit et chaque produit à un facteur commun » sans toutefois préciser que le « facteur commun » correspond à un des deux facteurs (qui n'est pas la somme) du produit initial, même si un jeu de couleur vise à rendre visible ce point lié à la transformation de mouvement sous-jacente (dans le sens du développement comme dans le sens de la factorisation qui ne sont pas distingués dans cet énoncé général). Par ailleurs, une technique liée à ce qui permettrait de « reconnaître » la structure en s'appuyant sur l'aspect procédural d'une expression est explicité : « on regarde la dernière opération à effectuer pour la calculer ». Dans les exemples de développement donnés par la suite, on retrouve des éléments de verbalisation liés à la structure d'expressions : avec l'identification et la désignation explicite de produits et de sommes en amont et en aval du développement. C'est l'extrait de manuel (parmi ceux étudiés) qui donne à voir le plus de verbalisations visant à accompagner l'usage de la propriété de distributivité pour développer. Toutefois, même dans cet ouvrage, on constate une mobilisation lacunaire au regard de certains des objets de discours signalés en amont. Ainsi, si les structures des expressions sont identifiées et désignées - de manière contextualisée dans les exemples (sans revenir toutefois à la technique donnée en amont censée permettre cette identification) - des mises en relation entre des éléments de ces structures (facteur d'un produit et « facteur commun de deux produits », termes d'une somme et « facteurs » des produits), qui pourraient contribuer à donner de la visibilité à la « transformation de mouvement », ne sont pas verbalisés [7].

Pour finir, mis à part dans ce dernier extrait, les verbalisations visant à accompagner le travail de calcul algébrique semblent absentes, partielles ou peu contextualisées (davantage associées à l'énoncé général qu'aux exemples donnés) [8]. Ces premiers constats laissent à penser que la question des discours enseignants tenus à l'oral qui viseraient à étayer les usages de la propriété de distributivité dans le développement d'expressions numériques ou littérales, reste relativement ouverte. Comment les enseignants « verbalisent-ils » quand ils cherchent à accompagner le travail des élèves dans l'accomplissement d'une tâche de calcul numérique ou algébrique donnée ?

Mise en place d'une enquête sur le discours des enseignants : quelles variétés dans les verbalisations associées à des tâches de calcul algébrique ?

De façon à aborder ces questions, nous avons conduit une enquête ayant pour but d'apporter un premier éclairage sur les usages langagiers des enseignants concernant l'utilisation de la propriété de distributivité dans des tâches relevant de développement d'expressions numériques ou algébriques. Précisons qu'il s'agit d'un travail exploratoire (qui vise à appréhender une variété de discours tenus par des enseignants donnés) et non d'une étude ayant des objectifs d'exhaustivité (qui viserait à explorer tous les discours tenus possiblement par les enseignants de mathématiques). Nous avons travaillé avec cinq enseignants d'horizons assez variés exerçant en collège. Certains sont certifiés d'autres agrégés, certains appartiennent à des groupes de travail de type Irem, d'autres non, certains travaillent dans des établissements ruraux, d'autres sont urbains. Par contre, ils ont en commun une certaine expérience (au minimum 10 ans d'ancienneté) du métier d'enseignant.

Ces cinq enseignants ont accepté de répondre à la commande suivante : corriger un exercice « comme s'ils étaient devant des élèves de fin de 4ème ». Cette consigne en a perturbé certains, mais tous se sont lancés dans un commentaire oral d'une résolution de l'exercice. Ils avaient la possibilité d'utiliser un tableau. Ils ont accepté d'être filmés, mais ils ignoraient que leurs pratiques langagières seraient au centre de notre attention [9].

L'exercice était répétitif : il s'agissait de développer neuf expressions algébriques, tâche classique en fin de cycle 4. La consigne qui aurait été donnée aux élèves était, classiquement, « Développe les expressions suivantes ». Nous avons cherché à observer la façon dont ils verbalisent ces expressions algébriques, et le discours (au sens commun) qu'ils vont tenir lors des transformations d'écritures de ces expressions.

Nous nous sommes limités à l'usage de la distributivité dite simple pour développer des expressions algébriques du type $k \times (a + b)$.

---

7 On trouve un jeu de « couleurs » dans les exemples donnés qui semble tenter de prendre en charge cet objet de discours lié à la transformation de mouvement, mais il est assez difficile à « décoder » en soi : avec un passage d'un signe opératoire à deux termes ou à deux facteurs codés en vert ou en rouge.

8 Pourtant, dans d'autres chapitres de ces mêmes manuels, on trouve parfois des indications sur la verbalisation d'expressions littérales comme : « a^2 » se lit « a au carré » ou « 10^n » se lit « 10 exposant n ».

9 Chacun a investi la tâche en imaginant ce qui allait être observé (gestes professionnels ? Gestion des nombres négatifs ?...).

En nous appuyant sur notre étude préalable conduite en termes d'objets de discours, nous avons retenu des variables didactiques qui pourraient avoir une influence sur les discours des enseignants :

— La présence du signe × : formulation sous la forme $k \times (...)$ ou $k(...)$;

— La place « du facteur k » : développement d'une expression du type $k \times (...)$ ou du type $(...) \times k$ (avec ou sans la présence du signe ×) ;

— La nature « du facteur k ». Nous avons retenu trois situations : k peut être un nombre entier, un monôme de degré 1 avec signe × apparent, un monôme de degré 1 sans signe apparent.

Ces variables didactiques sont directement en lien avec les objets de discours identifiés en amont. Par exemple, la nature du « facteur k » peut d'après notre étude préalable jouer un rôle important à différents égards : s'il est entier, il peut autoriser des verbalisations et des actions liées à une interprétation d'un produit comme « addition réitérée » (en distinguant un facteur jouant le rôle de multiplicande et un facteur jouant le rôle de multiplicateur). Si k est un pseudo monôme (5n, par exemple) le caractère structural sera peut-être favorisé et les termes « produit » et « somme » pourraient être davantage utilisés. Se pose la question du monôme avec signe × (dans notre test : $3\times n\times(2-4n)$). Ce type d'expressions algébriques est peu courant dans les manuels. Il pourrait y avoir diverses techniques et des verbalisations associées variées. Par ailleurs, $3\times n$ pourrait être reformulé dans un premier temps en $3n$ pour se rapprocher de la formule usuelle.

Nous donnons page suivante la liste des neuf expressions travaillées par les enseignants dans notre expérimentation, et leurs caractéristiques concernant les variables ci-dessus.

Nous présentons nos analyses selon plusieurs entrées. Nous avons tout d'abord observé les premières verbalisations de ces expressions algébriques par chaque enseignant. Plus généralement concernant les verbalisations des expressions algébriques, nous avons cherché à mettre en évidence la congruence (ou la non-congruence) sémantique [10] entre écriture symbolique et dimension structurale ou procédurale des verbalisations. Nous nous sommes ensuite intéressés aux formulations liées aux techniques de développement et à la propriété de distributivité. Nous terminerons en présentant les verbalisations des enseignants concernant l'expression algébrique moins classique $3\times n\times(2-4n)$.

La première verbalisation

Les premières verbalisations des expressions sont différentes pour chaque enseignant (voir tableau 4 page suivante). Nous avons écouté ici la façon dont chaque enseignant prononce les expressions proposées lors de la première verbalisation au début du traitement.

Nous remarquons que les enseignants utilisent trois expressions pour oraliser les écritures symboliques multiplicatives : « fois » « multiplier par » et « facteur de ». Un seul enseignant utilise le vocabulaire permettant d'expliciter la structure : « produit » « somme ». Analysons le lien avec les variables didactiques choisies. La première verbalisation de l'expression fait apparaître l'influence de deux variables didactiques : la présence du signe (ou non) et la place du facteur k.

La comparaison des enseignants F et G laisse apparaître une influence différente selon

10 Duval définit « trois critères permettant de déterminer le caractère congruent ou non congruent de la conversion à effectuer entre deux représentations qui sont sémiotiquement différentes et qui représentent au moins partiellement le même contenu. » (Duval, 1993, p 53)

Les expressions à développer	La présence du signe ×		La place du facteur *k*		La nature du facteur *k*		
	Le signe × est présent	Absence du signe ×	*k* est « derrière »	*k* est « devant »	Nombre entier	Monôme de degré 1 avec signe apparent	Pseudo-monôme
$7\times(n+1)$	v			v	v		
$(8n-4)\times 2n$	v		v				v
$5(n+3)$		v		v	v		
$15\times(10+2)$	v			v	v		
$(5+2n)\times 8$	v		v		v		
$3\times n\times(2-4n)$	v			v		v	
$(20+4)\times 12$	v		v		v		
$16(20+3)$		v		v	v		
$5n(3+2n)$		v		v			v

Tableau 3 : les variables didactiques

les variables en jeu. La verbalisation de l'enseignante F varie en fonction de la présence ou non de la croix × alors que celle de l'enseignant G varie en fonction de la place du facteur *k*. Les deux enseignants utilisent les deux mêmes mots : ils alternent entre les termes « fois » et « facteur de », mais visiblement en fonction de paramètres différents.

L'enseignante A utilise le mot « fois » de manière indéterminée, par défaut en quelque sorte. Par contre, en fonction de la place du facteur k, elle peut aussi être amenée à utiliser « multiplié par » quand k est à droite et « facteur de » quand k est à gauche (comme l'enseignant G pour cet usage précis).

Contrairement à eux, l'enseignant J, lui, a une pratique très stable : il utilise systématiquement le mot « fois », oralement et par écrit : il réécrit l'expression en toutes lettres « fois ». On verra par la suite la technique que cela implique. Il s'attache à une congruence sémantique forte autour du mot « fois ».

Enseignante F	« fois » quand il y a le signe × « facteur de » quand il n'y a pas de signe ×
Enseignant G	« fois » quand k est « derrière » « facteur de » quand k est « devant »
Enseignante A	« multiplié par » quand k est « derrière » « facteur de » quand k est « devant » (puis utilise « multiplié par ») « fois » dans tous les cas (k devant ou derrière, avec ou sans signe)
Enseignant J	« fois » uniquement et de manière très systématique
Enseignant P	Utilise plusieurs niveaux de verbalisation. – 1ère lecture descriptive à destination des élèves : « 5 parenthèse *n* plus 3 fermer la parenthèse », « parenthèse 5 plus 2*n* parenthèse fois 8 » – 2ème lecture à notre destination faisant apparaître la structure : « le produit de 5 et de la somme de *n* et de 3 » – Autre lecture possible : « Multiplié par » que *k* soit devant ou derrière

Tableau 4 : premières verbalisations

Enfin, l'enseignant P a deux niveaux de verbalisation : un premier niveau très descriptif (utilisation du mot « parenthèse », dans le but de donner le moins d'indice aux élèves, et un deuxième niveau de verbalisation faisant apparaître la structure de l'expression (usage des mots « produit » et « somme »). Il peut parfois utiliser « multiplier par », mais ça semble être sans lien avec les paramètres que nous avions choisis. Par cette deuxième formulation, il semble vouloir particulièrement nous indiquer qu'il s'intéresse au caractère structural de l'expression.

Nous soulignons rapidement ici que tous les enseignants verbalisent « $a \times b$ » par « a fois b » comme il en est coutume de nos jours, et non « b fois a » comme il en était l'usage par le passé. Les cinq enseignants verbalisent donc les expressions algébriques de façons différentes. Les variations ont des causes mêlant congruence sémantique, place du facteur k, présence ou non du signe croix ×, et attachement au caractère structural de l'expression.

Il est, à présent, intéressant d'observer comment ces enseignants mettent en mots les transformations d'écritures.

Les phénomènes liés à la recherche d'une congruence sémantique entre écritures symboliques données et verbalisation

Dans certains discours, la recherche d'une congruence sémantique dans la verbalisation d'une écriture symbolique en algèbre paraît être un obstacle à l'identification d'une structure, car la forme de verbalisation change le rôle d'un multiplicateur et du multiplicande.

Nous prenons ici (tableau 5) deux exemples d'expressions et pour chacune d'elles, observons les verbalisations de deux enseignantes.

L'enseignante F n'énonce pas la propriété de distributivité comme une transformation, mais comme une procédure à suivre. En effet, sa verbalisation fait référence à une partie de la structure de l'expression (« somme ») dont

Pour 7 × (n + 1)

Analyse des paroles de l'enseignante F	Analyse des paroles de l'enseignante A
« 7 fois parenthèse n + 1 » puis « il faut utiliser la règle de distributivité. On va la rappeler là : on multiplie un nombre par une somme, c'est la même chose que multiplier ce nombre par chaque terme de la somme ». Pour parler de la propriété, elle change d'expression pour « multiplier par », ce qui crée une dissymétrie dans le rôle des facteurs. « 7 est le nombre qu'on multiplie par la somme ». « On multiplie 7 par n ». Elle écrit « 7 × n ». Dans ces expressions 7 a le rôle traditionnel de multiplicande. Par la suite elle utilise une formulation orale dans laquelle 7 a traditionnellement le rôle de multiplicateur : « 7 fois n ». Pour elle, « multiplier par » ou « fois » c'est la même chose. Par ailleurs, quand k est à droite. Elle introduit des termes moins rigoureux comme « le nombre qui distribue la parenthèse », ou « qui multiplie la parenthèse ». L'enseignante F a la particularité d'utiliser « multiplié par » (forme passive, « on multiplie un nombre par une somme ») et « multiplie » (forme active, « le nombre qui multiplie »). Ceci indépendamment des variables didactiques que nous avions choisies.	« 7 est facteur de n plus 1 ». Ici 7 a un rôle fort de multiplicande. « Alors n plus 1, c'est un nombre, mais on ne sait pas lequel. Donc on ne peut pas effectuer l'addition qui est entre parenthèses, qui serait prioritaire si… il n'y avait pas un nombre inconnu derrière la lettre n. Donc là cette addition, on ne peut pas l'effectuer, donc il faut effectuer la multiplication. Pour ça on va faire ce qu'on appelle développer ». Elle a un discours méta sur la structure de l'expression et utilise la priorité des opérations pour se justifier. « Il faut multiplier par 7 la totalité du nombre qui est entre parenthèse ». Ici 7 a un rôle de multiplicateur. Elle fait, plus loin, à nouveau référence à la structure de l'expression en donnant à 7 ce rôle : « Il va falloir que n soit multiplié par 7 et il va falloir que 1 soit multiplié par 7 ». Les rôles s'inversent ensuite : « Donc ça va faire 7 fois n et 7 fois 1. Ça se réduit en écrivant 7n, on rend le multiplié invisible, plus 7 ».

Tableau 5 : verbalisations autour de l'expression 7 × (n + 1)

on va multiplier les termes. Cela met en avant des tensions entre le caractère procédural et le caractère structural de cette expression. Tout en identifiant la structure de l'addition et de la multiplication, elle énonce une « méthode » à suivre (« on multiplie »).

De même, l'enseignante A commence par analyser la structure de l'expression « cette addition on ne peut pas l'effectuer, donc il faut effectuer la multiplication » et utilise les priorités de calculs pour justifier l'ordre des calculs. Dans un premier temps, elle a ainsi une approche du caractère structural de l'expression. Cependant, dans sa façon de gérer la multiplication, elle favorise le caractère procédural de l'expression (« il va falloir que n soit multiplié par 7, et il va falloir que 1 soit multiplié par 7 »). Donc la verbalisation de l'enseignante A met, elle aussi, en avant des tensions entre les deux caractères structural et procédural de l'expression.

Pour $(8n - 4) \times 2n$

Analyse des paroles de l'enseignant J	Analyse des paroles de l'enseignant P
Il dit « $8n$ moins 4 fois $2n$ » puis écrit « $(8n - 4)$ fois $2n$ », puis écrit en toutes lettres au tableau et dit : « $2n$ est pris $8n$ moins 4 fois, c'est-à-dire 4 de moins que $8n$ fois. Si on prend $8n$ fois $2n$, on doit ajuster en enlevant 4 fois $2n$ ». Il raisonne sur le fait de savoir « qui est pris » et combien de fois. Cela provoque une dissymétrie entre les deux facteurs. Il fait preuve d'une grande cohérence dans sa verbalisation de type procédural. C'est cette cohérence qui crée une dissymétrie dans le rôle de facteurs qui prennent un rôle de multiplicateur et multiplicande.	Il dit « $8n$ moins 4 multiplié par $2n$ », « C'est le produit de la différence de 8 par n et de 4 par $2n$ », « On voit bien qu'ici on a un produit », et « On va donc transformer le produit en … ici différence à l'aide de la simple distributivité » Il met ainsi en avant la structure de l'expression. Il passe ensuite de « multiplié par » à « fois » dans la transformation des écritures : il dit « On va faire $8n$ fois 2 moins 4 fois $2n$ » et écrit « $8n \times 2n - 4 \times 2n$ ». On peut penser que pour lui, c'est la même chose

Tableau 6 : verbalisations autour de l'expression $8n \times 2n - 4 \times 2n$

La verbalisation de l'enseignant J est liée à l'utilisation de l'addition itérée. Il a une forte cohérence verbale. Son utilisation exclusive de l'addition itérée ne lui permet de ne travailler qu'à partir du caractère procédural de l'expression.

Contrairement à lui, pour l'enseignant P, l'attention portée à la structure de l'expression est très prégnante. Il redonne la définition de « développer » du point de vue de la structure (« transformer le produit en … ici différence à l'aide de la simple distributivité »). La méthode donnée aux élèves est la recherche de la structure.

Dans la variété des verbalisations observées on perçoit donc des alternances et des tensions entre formulations mettant en avant le caractère structural de l'expression ou le caractère procédural. Mis à part pour l'enseignant P, c'est une lecture procédurale qui domine le discours.

Nous allons retrouver une certaine continuité avec cette observation dans l'analyse suivante consacrée aux discours sur la technique de développement et la propriété de distributivité.

Ce que les enseignants donnent à voir pour amorcer une technique de développement, et la façon dont ils font référence à la propriété de distributivité

Nous faisons donc un « zoom » plus particulier sur la façon d'amorcer la technique de développement par chaque enseignant, et voyons si elle détermine si l'enseignant met en avant le caractère structural ou procédural de l'expression.

L'amorce proposée par les enseignants pour initier un développement propose une verbalisation qui tend à mettre en avant le caractère structural ou procédural de l'expression. Mis à part l'enseignant P qui propose une lecture structurale de l'expression, les autres enseignants donnent à voir un mélange de technique et de questionnement tourné vers l'aspect procédural. L'enseignant G ne propose pas de réelle procédure : la

Enseignante F	« Cherchez le nombre par lequel on multiplie la somme » Elle demande aux élèves de se questionner sur le multiplicateur.
Enseignant G	« On utilise la formule de distributivité » Il propose aux élèves d'appliquer la formule. Il ne rappelle pas la règle, elle n'est pas écrite (ce qui pourrait faciliter le rapprochement entre cette dernière et l'expression).
Enseignante A	« On a une expression entre parenthèses multipliée par un nombre » La parenthèse a le rôle de multiplicande. Elle utilise de nombreux termes pour parler de l'addition : — l'addition entre parenthèses — la totalité du nombre entre parenthèses — une expression entre parenthèses — l'addition qui est entre parenthèses — l'expression — la parenthèse
Enseignant J	« Ça veut dire que c'est un nombre de fois qu'on prend des choses » Il utilise exclusivement l'addition itérée, et il décrit le fait que l'on écrit plusieurs fois la même chose. Il écrit « fois » en toutes lettres.
Enseignant P	« Est-ce un produit ou une somme ? » Il veut que ses élèves se questionnent sur la structure de l'expression. On peut penser que sa première lecture est volontairement neutre et descriptive afin de faire chercher aux élèves la structure de l'expression.

Tableau 7 : ce qui est dit pour amorcer une technique de développement

substitution de la formule à l'expression est laissée à la charge de l'élève.

On peut s'intéresser d'un peu plus près à la façon dont les enseignants se réfèrent ou tentent de se référer à la propriété de distributivité dans leur discours respectif pour justifier des opérations de réécriture liées aux transformations de mouvement (voir tableau 8 de la page suivante).

La référence à la propriété de la distributivité de la multiplication est très diversement utilisée. Elle n'est parfois pas évoquée du tout. Seule une enseignante a éprouvé le besoin de la réécrire. L'enseignant J repasse par l'addition itérée et n'évoque pas la propriété. Pour justifier la transformation de produit en somme, l'enseignant P nomme la propriété tout en travaillant sur la structure de l'expression.

Donc les références à la propriété de distributivité dans les verbalisations des enseignants sont très diverses. Chaque enseignant semble avoir sa façon propre de mettre en mots l'usage de la propriété pour justifier des

Enseignante F	Elle fait référence à la « règle de distributivité » et elle écrit la formule « $k \times (a + b) = k \times a + k \times b$ » Elle dit qu'on multiplie un nombre par une somme. Ici le multiplicateur, c'est la somme. Elle précise que c'est la même chose que multiplier ce nombre par chaque terme de la somme. Ici ce sont les termes qui sont multiplicateurs.
Enseignant G	Il nomme la « formule de distributivité » mais ne la donne pas par écrit ni oralement. « 7 fois …, 7 facteur de n plus 1, on utilise la formule de distributivité que tout le monde connaît bien dans la classe. Donc ça fait 7 fois n plus 7 fois 1 qui donne, après réduction, $7n$ plus 7 » Le mot « facteur » pourrait être un mot clef pour penser à la distributivité. D'où l'importance de la 2ème lecture. Il applique la formule sans faire référence à la structure de l'expression.
Enseignante A	Elle ne fait aucune référence à la propriété de distributivité, mais elle justifie ses transformations d'écritures par l'impossibilité de calculer (n + 1). Elle utilise les priorités de calculs.
Enseignant J	Il n'évoque jamais la propriété de distributivité. Il utilise l'addition itérée et deux « principes » : — La séparation — La réorganisation Ceci est en accord avec le caractère procédural de son discours.
Enseignant P	« Développer cette expression littérale, c'est donc transformer le produit en… ici différence à l'aide de la simple distributivité » Il nomme la distributivité, mais ne donne pas la formule, ni par écrit ni oralement. Ceci correspond bien au caractère structural de sa verbalisation.

Tableau 8 : référence à la propriété de distributivité dans les verbalisations

opérations de réécritures des expressions numériques ou algébriques liées au développement de ces expressions. Ces verbalisations peuvent plus ou moins prendre appui sur la formule (donnée ou non), expliciter ou non d'autres propriétés des nombres ou des opérations (comme l'associativité, les priorités de calculs), évoquer ou non la structure de l'expression et sa « transformation ». Sur ce dernier point, on note qu'un seul enseignant semble précisément s'y référer (celui dont les premières verbalisations se centraient sur la structure de l'expression).

Cas particulier : $3 \times n \times (2 - 4n)$

Cette expression mérite en soi une analyse de discours de chacun des enseignants (Cf. tableau 9). Ici, au lieu d'un pseudo-monôme du type « $3n$ », un produit apparent « $3 \times n$ ». Les enseignants ont été déstabilisés (peut-être plus que nous ne l'avions anticipé) par cette expression « inhabituelle » et ont visiblement cherché à adapter leur discours.

L'enseignante F cherche « ce qui multiplie la parenthèse » et tente de se rapprocher le plus

Enseignante F	Réécriture : « $3n\times(2-4n)$ » Elle dit « 3 fois *n* fois 2 moins 4 *n*. Pour développer, en fait, on repère ce qui multiplie la parenthèse. On pourrait croire qu'il n'y a que *n*, mais en fait, ce qui multiplie la parenthèse, c'est tout ce qui multiplie la parenthèse. Ce qu'on peut faire aussi avant de commencer, c'est l'écrire plus simplement en enlevant les fois… inutiles, ça nous permet d'y voir plus clair. Donc ici le nombre qui multiplie la parenthèse, c'est $3n$ » L'enseignante tente de se rapprocher le plus possible de la formule écrite au tableau. Elle introduit le pseudo-monôme $3n$.
Enseignant G	Réécriture : « $3n(2-4n)$ » Il dit « 3 fois *n* fois entre parenthèses 2 moins 4 *n*. Donc, 3 fois *n* on peut le laisser sous cette forme-là, ou simplement écrire $3n$. Je transforme un petit peu l'écriture pour avoir une forme un peu plus proche de la formule que l'on connaît » Il précise qu'il va transformer l'expression pour avoir une forme plus proche de celle connue (sous-entendu la distributivité).
Enseignante A	Réécriture : « $3\times[n\times(2-4n)]$ » Elle dit « on va commencer par faire le calcul que je mets là entre crochet. Ça fera 3 fois un résultat » Elle ajoute des crochets et effectue deux développements successifs. Elle ne l'associe pas à l'expression $3n(2-4n)$: elle n'identifie pas $3\times n$ au pseudo-monôme $3n$.
Enseignant J	Réécriture : « $(3\times n)\times(2-4n)$ » Il dit : « 3 fois *n* fois 2 moins 4 *n*. Là, je m'interroge. Est-ce que je vais considérer que c'est 3 fois *n*… ou c'est 3 fois… selon l'ordre de calcul… Je vais partir de ce principe-là. Je vais mettre des parenthèses et je vais le présenter comme ça. C'est 2 moins 4 fois *n* qui est pris 3 fois *n* fois. Ici on peut dire le 2 moins 4 *n* est pris 3 fois *n* fois. Ça sera identiquement égal à 3 fois *n* fois le 2 on enlève ensuite 3 fois *n* fois $4n$ ». Il ajoute des parenthèses pour faire apparaître la structure.
Enseignant P	Réécriture : « $3\times n\times2-3\times n\times4n$ » Il dit : « 3 fois *n* fois parenthèse 2 moins 4 fois *n* fermer la parenthèse ». Après un long discours hésitant, il ajoute : « 3 fois *n* comme facteur » et écrit l'expression ci-dessus. Il développe au maximum pour utiliser la commutativité de la multiplication.

Tableau 9 : verbalisations autour de l'expression $3\times n\times(2-4n)$

possible de la formule de distributivité qu'elle a écrite au tableau « $k\times(a+b)=k\times a+k\times b$ ». Elle identifie rapidement $3\times n$ au pseudo-monôme $3n$. De même l'enseignant G tente de se rapprocher de la formule, mais fait « disparaître » tous les signes ×, ce qui sous-entend qu'il utilise une formule du type $k(a+b)=ka+kb$ (il ne l'a pas écrite). Il ne fait pas référence à la multiplication. Il semble être dans un jeu d'écriture.

L'enseignant J ajoute des parenthèses comme délimitantes pour faire apparaître la structure de l'expression. Le produit rendu visible permet d'activer le développement. Il utilise la formulation complexe « pris 3 fois *n* fois ».

On voit donc ici que les enseignants F, G et J tentent de se rapprocher d'expressions plus usuelles à l'aide de l'introduction du pseudo-monôme ou de parenthèses. Leur discours est dans un premier temps centré sur l'expression elle-même et son écriture.

Contrairement à eux, l'enseignante A effectue deux développements successifs (multiplication par *n*, puis multiplication par 3). Elle ne fait donc pas apparaître de pseudo-monôme. Mais elle partage ses doutes sur cette procédure avec nous en fin de traitement.

L'enseignant P est habitué à faire apparaître la structure dans son discours. Dans le cas de ce développement, il est encore plus gêné que les autres enseignants… Une hypothèse pourrait être qu'il utilise la verbalisation pour dépasser la complexité de l'écriture introduite par la présence du signe « × » : l'expression « 3-fois-*n* » devient dans sa verbalisation un bloc qui, comme le pseudo-monôme, impose une priorité par sa forme.

Les enseignants sont déstabilisés par cette écriture faisant apparaître deux produits que recouvrent pourtant d'autres expressions avec un facteur de type « pseudo-monôme ». Ceci donne à voir l'importance et la fonction des pseudo-monômes dans leurs verbalisations antérieures : en permettant de les considérer comme « une entité facteur » indépendamment du fait qu'ils recouvrent eux-mêmes un produit. Ainsi les enseignants se sont vus contraints d'adapter fortement leurs discours, et ce, de manière variée, parfois en ayant conscience de l'inconfort provoqué et en émettant des doutes sur la voie empruntée. Ceci conduit à nous interroger sur la transparence du rôle joué par les pseudo-monômes à la fois pour les élèves et les enseignants dans le calcul algébrique.

Conclusion

Un premier résultat concerne la variété des discours des enseignants. Cela concerne autant la verbalisation du produit ou d'expressions symboliques plus complexes, que la verbalisation des opérations de réécritures d'expressions prenant appui sur la distributivité.

Dans cette variété, des éléments apparaissent en tension dans les discours. Par exemple la congruence sémantique pilotant des premières verbalisations (concernant notamment la formulation du produit) peut se retrouver en tension avec la façon de considérer (implicitement) un facteur comme multiplicande ou comme multiplicateur, dont on a pu voir l'importance dans un discours d'enseignant s'appuyant sur l'addition réitérée, quand dans d'autres discours, la question semblait réglée en convoquant implicitement la commutativité.

Des verbalisations parfois descriptives de manipulation de signes versus des verbalisations qui visent à exposer la logique des actions, voire à les justifier... Des verbalisations qui parfois (re)prennent appui sur des aspects procéduraux des expressions liées aux produits initiaux parfois qualifiés de manière variée (suivant les choix de variables didactiques) ce qui peut poser la question de la cohérence des discours tenus d'une expression à l'autre, par un même enseignant.

On peut d'ailleurs s'étonner que l'aspect structural d'une expression ne domine que dans le discours d'un seul enseignant. Ce dernier, par ailleurs, semble « réfléchir » à haute voix pour rendre son discours cohérent et fonctionnel par rapport aux suites de calculs effectuées et il se retrouve, à l'instar des autres, déstabilisé par la structure d'une expression rendant apparent le « produit » caché derrière le pseudo-monôme. Ceci ouvre la voie à de nouvelles questions dans notre recherche. Nous nous interrogeons maintenant sur ce qui peut, dans des verbalisations associées à des tâches de calcul algébrique (produites par l'enseignant, voire à produire par les élèves ?), constituer des éléments de discours à même d'accompagner « au mieux » la pratique de calcul algébrique dans la classe de mathématiques. Autrement dit, il s'agit d'examiner en quoi et comment, la verbalisation pourrait devenir un levier dans l'enseignement et l'apprentissage du calcul algébrique …

Bibliographie

Barthès-Garnier, C. (2020). *Calcul multiplicatif et propriété de distributivité au cycle 3 : où en sont les élèves avant leur entrée dans le formalisme de l'algèbre ?* Mémoire de recherche en didactique des Mathématiques, Université de Paris, LDAR. http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/Memoire-M2RDDM-Barthes-Garnier-2020.pdf

Brousseau, G. (1997). *La théorie des situations : le cours de Montréal de 1997.* Document en ligne http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2011/06/MONTREAL-archives-GB1.pdf

Chambris, C. (2021) *Raison d'être des grandeurs, le cas de l'arithmétique à l'école élémentaire.* Dans Chaachoua et al. *Nouvelles perspectives en didactique : le point de vue de l'élève, questions curriculaires, grandeur et mesure*, pp. 167-196, La pensée sauvage édition.

Chevallard, Y. (2020) *L'humble séminaire 2019-2020, séance 6.* Document en ligne http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/HS_2019-2020_-_6.pdf

Constantin, C. (2017). *La distributivité : quelles connaissances pour enseigner la multiplication à l'école primaire ? Grand N* (100), pp. 105-130. https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/GN/IGR17019/IGR17019.pdf

Constantin, C. (2018), *Une étude des articulations entre techniques de calcul et construction de systèmes de nombres dans les manuels de collège, Petit x* (107), pp. 5-27. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/107x1_1585215641446-pdf

Drouhard, J.-P. (1992). *Les écritures symboliques de l'algèbre élémentaire.* Thèse de doctorat, Université Paris Diderot (Paris 7). https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00925358/

Drouhard, J.-P., & Panizza, M. (2012). *Hansel et Gretel et l'implicite sémio-linguistique en algèbre élémentaire.* Dans L. Coulange & J.-P. Drouhard (Eds.), *Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives. Numéro spécial hors série Revue Recherches en didactique des mathématiques,* La pensée sauvage, pp. 209-235.

Duval,R. (1993). *Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. Annales de didactique et de sciences cognitives.* IREM de Strasbourg, pp. 37-65 https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/ST/IST93004/IST93004.pdf

Flückiger, A. (2000). *Genèse expérimentale d'une notion mathématique : la notion de division comme modèle de connaissances numériques.* Thèse de doctorat, Université de Genève. https://archive-ouverte.unige.ch/unige:105/THESIS

Grugeon-Allys, B., & Pilet, J. (2017). *Quelles connaissances et quels raisonnements en arithmétique favorisent l'entrée dans l'algèbre ? Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*, 20(3), pp. 80-102. https://doi.org/10.7202/1055730ar

Sfard, A. (1991). *On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. Educational Studies in Mathematics*, 22, pp. 1-36. https://www.researchgate.net/publication/226068580_On_the_dual_nature_of_mathematical_conceptions_Reflections_on_processes_and_objects_as_different_sides_of_the_same_coin

Documents officiels et manuels

Désignation dans l'article	*Références précises*
MEN 2020	Programme de cycle 4 : BOEN n° 31 du 30 juillet 2020 https://eduscol.education.fr/document/621/download
MEN 2021	Le guide pour enseigner le nombre, le calcul, et la résolution de problème au CP https://eduscol.education.fr/document/3738/download
I-parcours 4e 2021	Hache, K. et *al.* (2016) *I Parcours 4*[e], Génération 5
Maths au CE1 2019	Duprey, G. et al. (2019) *Maths au CE1*, Accès Edition
MHM CE2 2021	Pinel, N. (2021) Méthode heuristique maths (MHM) CE2 Ressources en lignes : https://methodeheuristique.com/modules/ce2/
Myriade 4e 2021	Boullis M. et al. (2021) *Maths 4e Myriade*, Bordas
Sésamath cycle 4 2016	Association Sésamath (2016) Sésamath cycle 4, Magnard https://manuel.sesamath.net/send_file.php?file=/files/cycle4_2016_v2.pdf
Transmaths 4e 2021	Malaval, J. et al. (2021), *Transmaths 4e*, Nathan
Arithmétique, Armand Colin, 1918	Gonon, H. (1918), *Nouveau cours de Mathématiques Borel-Montel, Arithmétique, classe de 8e et 7e, garçons, et 2e et 3e années de primaire, filles*, Librairie Armand Colin
Arithmétique, Armand Colin, 1959	Adam, A. et Gouzou, H. (1959), *Arithmétique Cours Moyen*, Librairie Armand Colin